非标准分析课程讲义

金人麟

College of Charleston, SC, USA

复旦大学哲学院暑期学校

2020 年 8 月 10 – 14 日

第五章

非标准分析和组合数论

5. 非标准分析和组合数论 –1

在过去二十多年中非标准分析在组合数论中的很多应用被发现。组合数论对于初学者来说，门槛比较低，问题比较容易解释清楚。所以非标准分析在此领域中的应用一旦有成，就比较能使不了解非标准分析的学者对非标准分析的实用性产生信心。由于篇幅关系我们只能介绍其中一小部分。感兴趣的读者可看其他的文章。

5. 非标准分析和组合数论 –1

在过去二十多年中非标准分析在组合数论中的很多应用被发现。组合数论对于初学者来说，门槛比较低，问题比较容易解释清楚。所以非标准分析在此领域中的应用一旦有成，就比较能使不了解非标准分析的学者对非标准分析的实用性产生信心。由于篇幅关系我们只能介绍其中一小部分。感兴趣的读者可看其他的文章。

作为热身我们先来证明众所周知的 Ramsey 定理的一个最简单形式。

5.1 Ramsey 定理的非标准证明 –1

设 X 是一集合，记 $[X]^2 := \{\{a, b\} : a, b \in X \wedge a \neq b\}$。

5.1 Ramsey 定理的非标准证明 –1

设 X 是一集合，记 $[X]^2 := \{\{a, b\} : a, b \in X \wedge a \neq b\}$。

定理 (5.1)

任给函数 $f\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1\}$，存在 $i = 0$ 或 $i = 1$ 和一无限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $f \restriction [X]^2 \equiv i$。

5.1 Ramsey 定理的非标准证明 –1

设 X 是一集合，记 $[X]^2 := \{\{a, b\} : a, b \in X \wedge a \neq b\}$。

定理 (5.1)

任给函数 $f\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1\}$，存在 $i = 0$ 或 $i = 1$ 和一无限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $f\restriction [X]^2 \equiv i$。

证明：取定一超整数 N。对 $i = 0, 1$ 定义

$$\mathcal{C}_i := \{C \subseteq \mathbb{N} : {}^*f\restriction [C \cup \{N\}]^2 \equiv i\}.$$

注意，$\mathcal{C}_i$ 可能不是内集。如果 $\mathcal{C}_0$ 包含了一个无限集 C，则 $f\restriction [C]^2 \equiv 0$，即定理得证。所以我们可假设 $\mathcal{C}_0$ 仅包含有限集。同样可假设 $\mathcal{C}_1$ 仅包含有限集。

5.1 Ramsey 定理的非标准证明 –2

取 $C_0 \in \mathcal{C}_0$ 极大，即任何 $\mathcal{C}_0$ 中包含了 C_0 的集合只能是 C_0 自身。取 $C_1 \in \mathcal{C}_1$ 极大。如果 $\mathcal{C}_i = \emptyset$，则取 $C_i = \emptyset$。设 $b \in \mathbb{N}$ 是 $C_0 \cup C_1$ 的上界。显然以下语句

5.1 Ramsey 定理的非标准证明 –2

取 $C_0 \in \mathcal{C}_0$ 极大，即任何 $\mathcal{C}_0$ 中包含了 C_0 的集合只能是 C_0 自身。取 $C_1 \in \mathcal{C}_1$ 极大。如果 $\mathcal{C}_i = \emptyset$，则取 $C_i = \emptyset$。设 $b \in \mathbb{N}$ 是 $C_0 \cup C_1$ 的上界。显然以下语句

$$(\exists n \in {}^*\mathbb{N})\ (n > b \wedge {}^*f\restriction [C_0 \cup \{n\}]^2 \equiv 0 \wedge {}^*f\restriction [C_1 \cup \{n\}]^2 \equiv 1)$$

5.1 Ramsey 定理的非标准证明 –2

取 $C_0 \in \mathcal{C}_0$ 极大，即任何 $\mathcal{C}_0$ 中包含了 C_0 的集合只能是 C_0 自身。取 $C_1 \in \mathcal{C}_1$ 极大。如果 $\mathcal{C}_i = \emptyset$，则取 $C_i = \emptyset$。设 $b \in \mathbb{N}$ 是 $C_0 \cup C_1$ 的上界。显然以下语句

$$(\exists n \in {}^*\mathbb{N})\ (n > b \wedge {}^*f\restriction [C_0 \cup \{n\}]^2 \equiv 0 \wedge {}^*f\restriction [C_1 \cup \{n\}]^2 \equiv 1)$$

在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。这是因为 N 就是 n 的实例。由转换原理存在 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n > b$ 使得对 $i = 0, 1$ 有 $f\restriction [C_i \cup \{n\}]^2 \equiv i$。注意 ${}^*f$ 是从 $[{}^*\mathbb{N}]^2$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数，所以存在 $i \in \{0, 1\}$ 使得 ${}^*f(\{n, N\}) = i$。如果 $i = 0$，则 $C_0 \cup \{n\} \in \mathcal{C}_0$。如果 $i = 1$，则 $C_1 \cup \{n\} \in \mathcal{C}_1$。这和 C_0 或 C_1 的极大性矛盾。所以定理成立。□

5.2 和集现象 –1

和集现象是组合数学中牵涉到密度的问题。密度通常用极限来定义。用非标准分析方法处理数列极限问题比较有优势。我们介绍密度中的一个，称为上 Banach 密度。

5.2 和集现象 –1

和集现象是组合数学中牵涉到密度的问题。密度通常用极限来定义。用非标准分析方法处理数列极限问题比较有优势。我们介绍密度中的一个，称为上 Banach 密度。

定义 (5.2)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 为一无限集。 A 的**上 Banach 密度** (upper Banach density) 是

$$BD(A) := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|A \cap [k, k+n]|}{n+1}.$$

5.2 和集现象 –1

和集现象是组合数学中牵涉到密度的问题。密度通常用极限来定义。用非标准分析方法处理数列极限问题比较有优势。我们介绍密度中的一个，称为上 Banach 密度。

定义 (5.2)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 为一无限集。 A 的**上 Banach 密度** (upper Banach density) 是

$$BD(A) := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|A \cap [k, k+n]|}{n+1}.$$

上 Banach 密度是在自然数集上建立 Banach 空间的重要概念。

5.2 和集现象 –1

和集现象是组合数学中牵涉到密度的问题。密度通常用极限来定义。用非标准分析方法处理数列极限问题比较有优势。我们介绍密度中的一个，称为上 Banach 密度。

定义 (5.2)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 为一无限集。 A 的**上 Banach 密度** (upper Banach density) 是

$$BD(A) := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|A \cap [k, k+n]|}{n+1}.$$

上 Banach 密度是在自然数集上建立 Banach 空间的重要概念。

如果在上 Banach 密度的定义中集合 $\mathbb{N}$ 由整数集合 $\mathbb{Z}$ 替代，则可以定义 $\mathbb{Z}$ 中子集的上 Banach 密度。

5.2 和集现象 –2

在标准实分析中一个勒贝格测度为零的实数子集是一个小集合。大家知道实数集 $\mathbb{R}$ 一定不是可数个零测集的并。除了勒贝格测度之外还有一个衡量实数子集大小的概念，即第一纲/第二纲集。令 X 为一个实数子集，如果在每一个非空开区间 (a, b) 中总有一个非空子开区间 $(c, d) \subseteq (a, b)$ 使得 $(c, d) \cap X = \emptyset$，集合 X 就被称为无处稠密集。如果一个实数子集 X 可以被表示为最多可数个无处稠密集的并，X 就被称为第一纲集。Baire 定理指出实数集 $\mathbb{R}$ 一定不是可数个第一纲集的并，所以第一纲集是在序拓扑意义下的一种小集合。

5.2 和集现象 –2

在标准实分析中一个勒贝格测度为零的实数子集是一个小集合。大家知道实数集 $\mathbb{R}$ 一定不是可数个零测集的并。除了勒贝格测度之外还有一个衡量实数子集大小的概念，即第一纲/第二纲集。令 X 为一个实数子集，如果在每一个非空开区间 (a, b) 中总有一个非空子开区间 $(c, d) \subseteq (a, b)$ 使得 $(c, d) \cap X = \emptyset$，集合 X 就被称为无处稠密集。如果一个实数子集 X 可以被表示为最多可数个无处稠密集的并，X 就被称为第一纲集。Baire 定理指出实数集 $\mathbb{R}$ 一定不是可数个第一纲集的并，所以第一纲集是在序拓扑意义下的一种小集合。但是在测度意义下的小集合概念和在序拓扑意义下的小集合概念是不可比较的。这是因为由构造 Cantor 集的方法，可以构造一个第一纲集 $A \subseteq \mathbb{R}$，使得 $\mathbb{R} \setminus A$ 的勒贝格测度为零。所以在测度意义下 A 是一个大集合而在序拓扑意义下 A 是一个小集合，同时 $\mathbb{R} \setminus A$ 在测度意义下是小集合而在序拓扑意义下是个大集合。

5.2 和集现象 –3

当考虑和集的时候，情况就不同了。如果 A 和 B 是一个加法群中的两个子集，定义

$$A \pm B := \{a \pm b : a \in A,\, b \in B\}.$$

以下是一个众所周知的定理。

5.2 和集现象 –3

当考虑和集的时候，情况就不同了。如果 A 和 B 是一个加法群中的两个子集，定义

$$A \pm B := \{a \pm b : a \in A,\ b \in B\}.$$

以下是一个众所周知的定理。

定理 (5.3)

设 λ 为 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度，$A, B \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $\lambda(A) > 0$ 和 $\lambda(B) > 0$。则 $A + B$ 一定包含了一个非空开区间。

5.2 和集现象 –3

当考虑和集的时候，情况就不同了。如果 A 和 B 是一个加法群中的两个子集，定义

$$A \pm B := \{a \pm b : a \in A,\ b \in B\}.$$

以下是一个众所周知的定理。

定理 (5.3)

设 λ 为 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度，$A, B \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $\lambda(A) > 0$ 和 $\lambda(B) > 0$。则 $A + B$ 一定包含了一个非空开区间。

粗略地讲，以上定理表明了如果 A 和 B 都不是测度意义下的小集合，则 $A + B$ 就不是序拓扑意义下的小集合。

5.2 和集现象 –4

此定理可用勒贝格稠点定理来证明。令 a 是一个实数子集 A 中的元素，如果对任意 $\epsilon > 0$ 总存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $0 < \delta' < \delta$，$\lambda(A \cap (a - \delta', a + \delta'))/(2\delta') > 1 - \epsilon$，则 a 被称为 A 的稠点 (density point)。勒贝格稠点定理指的是如果 A 是一个勒贝格正测集，那么几乎所有 A 中的点都是 A 的稠点。

5.2 和集现象 –4

此定理可用勒贝格稠点定理来证明。令 a 是一个实数子集 A 中的元素，如果对任意 $\epsilon > 0$ 总存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $0 < \delta' < \delta$，$\lambda(A \cap (a - \delta', a + \delta'))/(2\delta') > 1 - \epsilon$，则 a 被称为 A 的稠点 (density point)。勒贝格稠点定理指的是如果 A 是一个勒贝格正测集，那么几乎所有 A 中的点都是 A 的稠点。

如果 A 和 B 都是正测集，令 a 和 b 分别是 A 和 B 的稠点，再令 $\delta > 0$ 使得 $\lambda(A \cap (a - \delta, a + \delta))/(2\delta) > 2/3$ 和 $\lambda(B \cap (b - \delta, b + \delta))/(2\delta) > 2/3$。用鸽巢原理 (pigeonhole principle) 就可证明 $A + B$ 包含了以 $a + b$ 为中心的非空开区间。

5.2 和集现象 –4

此定理可用勒贝格稠点定理来证明。令 a 是一个实数子集 A 中的元素，如果对任意 $\epsilon > 0$ 总存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $0 < \delta' < \delta$，$\lambda(A \cap (a - \delta', a + \delta'))/(2\delta') > 1 - \epsilon$，则 a 被称为 A 的稠点 (density point)。勒贝格稠点定理指的是如果 A 是一个勒贝格正测集，那么几乎所有 A 中的点都是 A 的稠点。

如果 A 和 B 都是正测集，令 a 和 b 分别是 A 和 B 的稠点，再令 $\delta > 0$ 使得 $\lambda(A \cap (a - \delta, a + \delta))/(2\delta) > 2/3$ 和 $\lambda(B \cap (b - \delta, b + \delta))/(2\delta) > 2/3$。用鸽巢原理 (pigeonhole principle) 就可证明 $A + B$ 包含了以 $a + b$ 为中心的非空开区间。

本文作者第一次提出了以下**和集现象** (sumset phenomenon)：假设在一个有序加群 G 上可定义一种类似测度的度量，如果两个 G 的子集 A 和 B 都不是在这类测度意义下的小集合，则 $A + B$ 就不是序拓扑意义下的小集合。以上定理是和集现象的一个证据。是否还有其他证据？

5.2 和集现象 –5

在自然数集上密度概念和测度概念很相像，但因为自然数的序拓扑是离散拓扑，所以没有多大意义。在 Furstenberg 的书中提到了关于 $\mathbb{N}$ 的无限子集的一个概念被称为 syndeticity，似乎和稠密集的概念很接近。让我们暂把 syndeticity 翻译成**链接**。

5.2 和集现象 –5

在自然数集上密度概念和测度概念很相像，但因为自然数的序拓扑是离散拓扑，所以没有多大意义。在 Furstenberg 的书中提到了关于 $\mathbb{N}$ 的无限子集的一个概念被称为 syndeticity，似乎和稠密集的概念很接近。让我们暂把 syndeticity 翻译成**链接**。

定义 (5.4)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是一无限集。

5.2 和集现象 –5

在自然数集上密度概念和测度概念很相像，但因为自然数的序拓扑是离散拓扑，所以没有多大意义。在 Furstenberg 的书中提到了关于 $\mathbb{N}$ 的无限子集的一个概念被称为 syndeticity，似乎和稠密集的概念很接近。让我们暂把 syndeticity 翻译成**链接**。

定义 (5.4)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是一无限集。

1. 如果存在一个自然数 k 使得对任意 $m \in \mathbb{N}$，$A \cap [m, m+k] \neq \emptyset$，则称 A **为链接的** (syndetic)，即 A 在 $\mathbb{N}$ 中的缝隙长度 (gap size) 是有界的。

5.2 和集现象 –5

在自然数集上密度概念和测度概念很相像，但因为自然数的序拓扑是离散拓扑，所以没有多大意义。在 Furstenberg 的书中提到了关于 $\mathbb{N}$ 的无限子集的一个概念被称为 syndeticity，似乎和稠密集的概念很接近。让我们暂把 syndeticity 翻译成**链接**。

定义 (5.4)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是一无限集。

1. 如果存在一个自然数 k 使得对任意 $m \in \mathbb{N}$，$A \cap [m, m+k] \neq \emptyset$，则称 A **为链接的** (syndetic)，即 A 在 $\mathbb{N}$ 中的缝隙长度 (gap size) 是有界的。
2. 如果 A 包含了任意长的有限自然数区间，A 被称为**厚实的** (thick)。

5.2 和集现象 –5

在自然数集上密度概念和测度概念很相像，但因为自然数的序拓扑是离散拓扑，所以没有多大意义。在 Furstenberg 的书中提到了关于 $\mathbb{N}$ 的无限子集的一个概念被称为 syndeticity，似乎和稠密集的概念很接近。让我们暂把 syndeticity 翻译成**链接**。

定义 (5.4)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是一无限集。

1. 如果存在一个自然数 k 使得对任意 $m \in \mathbb{N}$，$A \cap [m, m+k] \neq \emptyset$，则称 A **为链接的** (syndetic)，即 A 在 $\mathbb{N}$ 中的缝隙长度 (gap size) 是有界的。
2. 如果 A 包含了任意长的有限自然数区间，A 被称为**厚实的** (thick)。
3. 如果 A 是一个链接集和一个厚实集的交，则 A 被称为**局部链接的** (piecewise syndetic)，即存在一自然数区间 $[a_n, b_n]$ 使得 $b_n - a_n \to \infty$ 并且 A 在 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ 中的缝隙长度是有界的。

5.2 和集现象 –6

例如，所有 10 的整数倍是一链接集，所有整数区间 $[2^n, 2^n + n]$ 的并是一厚实集，而所有在集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2^n, 2^n + n]$ 中的 10 的整数倍形成了一个局部链接集。

5.2 和集现象 –6

例如，所有 10 的整数倍是一链接集，所有整数区间 $[2^n, 2^n + n]$ 的并是一厚实集，而所有在集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2^n, 2^n + n]$ 中的 10 的整数倍形成了一个局部链接集。

对 $\mathbb{Z}$ 的子集，用同样方法可定义链接集，厚实集，和局部链接集。

5.2 和集现象 –6

例如，所有 10 的整数倍是一链接集，所有整数区间 $[2^n, 2^n + n]$ 的并是一厚实集，而所有在集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2^n, 2^n + n]$ 中的 10 的整数倍形成了一个局部链接集。

对 $\mathbb{Z}$ 的子集，用同样方法可定义链接集，厚实集，和局部链接集。

从直观上讲，链接集可对应于实数上的稠密集，厚实集对应于实数上的开区间，而局部链接集则对应于实数上的非无处稠密集。在 Furstenberg 的书中提到了以下定理。

5.2 和集现象 –6

例如，所有 10 的整数倍是一链接集，所有整数区间 $[2^n, 2^n + n]$ 的并是一厚实集，而所有在集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2^n, 2^n + n]$ 中的 10 的整数倍形成了一个局部链接集。

对 $\mathbb{Z}$ 的子集，用同样方法可定义链接集，厚实集，和局部链接集。

从直观上讲，链接集可对应于实数上的稠密集，厚实集对应于实数上的开区间，而局部链接集则对应于实数上的非无处稠密集。在 Furstenberg 的书中提到了以下定理。

定理 (5.5)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$。如果 $BD(A) > 0$，则 $(A - A) \cap \mathbb{N}$ 是一链接集。

5.2 和集现象 –7

注意，利用类似于构造 Cantor 集的方法，我们可以构造一个无限集 A 使得 $BD(A) > \frac{1}{2}$ 但 A 不是局部链接的。

5.2 和集现象 –7

注意，利用类似于构造 Cantor 集的方法，我们可以构造一个无限集 A 使得 $BD(A) > \frac{1}{2}$ 但 A 不是局部链接的。

虽然我们可以用模糊的语言来叙述关于自然数集的和集现象，但如果能把这些概念加以严格处理应该是很有意义的。特别是关于序拓扑。因为 $\mathbb{N}$ 上的序拓扑是离散拓扑，所以不是很有用。我们怎样来严格定义一种拓扑来替代序拓扑呢？另外在以上定理中集合 $A - A$ 能否被 $A + B$ 替代呢？

5.2 和集现象 –7

注意，利用类似于构造 Cantor 集的方法，我们可以构造一个无限集 A 使得 $BD(A) > \frac{1}{2}$ 但 A 不是局部链接的。

虽然我们可以用模糊的语言来叙述关于自然数集的和集现象，但如果能把这些概念加以严格处理应该是很有意义的。特别是关于序拓扑。因为 $\mathbb{N}$ 上的序拓扑是离散拓扑，所以不是很有用。我们怎样来严格定义一种拓扑来替代序拓扑呢？另外在以上定理中集合 $A - A$ 能否被 $A + B$ 替代呢？

非标准分析方法是解决以上问题的合适方法。在 Keisler 和 Leth 的一篇文章中有一个类似于序拓扑的 U–拓扑被介绍，而那正好是我们所需要的。

5.2 和集现象 –7

注意，利用类似于构造 Cantor 集的方法，我们可以构造一个无限集 A 使得 $BD(A) > \frac{1}{2}$ 但 A 不是局部链接的。

虽然我们可以用模糊的语言来叙述关于自然数集的和集现象，但如果能把这些概念加以严格处理应该是很有意义的。特别是关于序拓扑。因为 $\mathbb{N}$ 上的序拓扑是离散拓扑，所以不是很有用。我们怎样来严格定义一种拓扑来替代序拓扑呢？另外在以上定理中集合 $A - A$ 能否被 $A + B$ 替代呢？

非标准分析方法是解决以上问题的合适方法。在 Keisler 和 Leth 的一篇文章中有一个类似于序拓扑的 U–拓扑被介绍，而那正好是我们所需要的。

定义 (5.6)

设 $U \subseteq {}^*\mathbb{N}$ 是一非空前截，即 $a \in U$ 推出 $[0, a] \subseteq U$，且满足 $1 \in U$ 和 $U + U \subseteq U$，则 U 被称为一个**加法分割** (additive cut)。

5.2 和集现象 –8

加法分割是一个加法半群，且把 $^*\mathbb{N}$ 分割成前截 U 和后截 $^*\mathbb{N} \setminus U$。自然数集 $^*\mathbb{N}$ 上的加法分割有点像实分析中的 Dedekind 分割。按照定义，$^*\mathbb{N}$ 本身是一个加法分割。如果一个加法分割 $U \neq {}^*\mathbb{N}$，那么 U 一定是个外集。这是因为 U 在 $^*\mathbb{N}$ 中有上界但没有最大元。另外 $\mathbb{N}$ 是一个加法分割。

5.2 和集现象 –8

加法分割是一个加法半群，且把 ${}^*\mathbb{N}$ 分割成前截 U 和后截 ${}^*\mathbb{N} \setminus U$。自然数集 ${}^*\mathbb{N}$ 上的加法分割有点像实分析中的 Dedekind 分割。按照定义，${}^*\mathbb{N}$ 本身是一个加法分割。如果一个加法分割 $U \neq {}^*\mathbb{N}$，那么 U 一定是个外集。这是因为 U 在 ${}^*\mathbb{N}$ 中有上界但没有最大元。另外 $\mathbb{N}$ 是一个加法分割。令 H 为一超整数，则

$$U_H := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} [0, H/n]$$

也是一个加法分割。

5.2 和集现象 –8

加法分割是一个加法半群，且把 ${}^*\mathbb{N}$ 分割成前截 U 和后截 ${}^*\mathbb{N} \setminus U$。自然数集 ${}^*\mathbb{N}$ 上的加法分割有点像实分析中的 Dedekind 分割。按照定义，${}^*\mathbb{N}$ 本身是一个加法分割。如果一个加法分割 $U \neq {}^*\mathbb{N}$，那么 U 一定是个外集。这是因为 U 在 ${}^*\mathbb{N}$ 中有上界但没有最大元。另外 $\mathbb{N}$ 是一个加法分割。令 H 为一超整数，则

$$U_H := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} [0, H/n]$$

也是一个加法分割。容易看出 U_H 是 $[0, H]$ 中最大的加法分割，而 $\mathbb{N}$ 是 $[0, H]$ 中最小的加法分割。为了直观上的方便，我们常把 $a \in U$ 写成 $a < U$ 并且把 $a \in {}^*\mathbb{N} \setminus U$ 写成 $a > U$。

5.2 和集现象 –9

定义 (5.7)

设 H 为一超整数，$U \subseteq [0, H]$ 是一加法分割。如果一个集合 $O \subseteq [0, H]$ 满足性质：对任意 $a \in O$ 总存在 $r > U$ 使得 $[a - r, a + r] \cap [0, H] \subseteq O$，则 O 被称为一个 U–开集。

所有 U–开集组成 $[0, H]$ 上的 U–拓扑。注意，U–拓扑不是 T_1 拓扑。

定义 (5.7)

设 H 为一超整数，$U \subseteq [0, H]$ 是一加法分割。如果一个集合 $O \subseteq [0, H]$ 满足性质：对任意 $a \in O$ 总存在 $r > U$ 使得 $[a - r, a + r] \cap [0, H] \subseteq O$，则 O 被称为一个 U–开集。

所有 U–开集组成 $[0, H]$ 上的 U–拓扑。注意，U–拓扑不是 T_1 拓扑。

定义 (5.8)

设 U 为 $[0, H]$ 中的一个加法分割。对每个 $a, b \in [0, H]$，定义

1. $a \sim b$ 当且仅当 $|a - b| < U$;

5.2 和集现象 –9

定义 (5.7)

设 H 为一超整数，$U \subseteq [0, H]$ 是一加法分割。如果一个集合 $O \subseteq [0, H]$ 满足性质：对任意 $a \in O$ 总存在 $r > U$ 使得 $[a - r, a + r] \cap [0, H] \subseteq O$，则 O 被称为一个 U–开集。

所有 U–开集组成 $[0, H]$ 上的 U–拓扑。注意，U–拓扑不是 T_1 拓扑。

定义 (5.8)

设 U 为 $[0, H]$ 中的一个加法分割。对每个 $a, b \in [0, H]$，定义

1. $a \sim b$ 当且仅当 $|a - b| < U$;
2. $[a]_U := \{c \in [0, H] : c \sim a\}$;

5.2 和集现象 –9

定义 (5.7)

设 H 为一超整数，$U \subseteq [0, H]$ 是一加法分割。如果一个集合 $O \subseteq [0, H]$ 满足性质：对任意 $a \in O$ 总存在 $r > U$ 使得 $[a - r, a + r] \cap [0, H] \subseteq O$，则 O 被称为一个 U–开集。

所有 U–开集组成 $[0, H]$ 上的 U–拓扑。注意，U–拓扑不是 T_1 拓扑。

定义 (5.8)

设 U 为 $[0, H]$ 中的一个加法分割。对每个 $a, b \in [0, H]$，定义

1. $a \sim b$ 当且仅当 $|a - b| < U$;
2. $[a]_U := \{c \in [0, H] : c \sim a\}$;
3. $[0, H]/\sim := \{[a]_U : a \in [0, H]\}$;

5.2 和集现象 –9

定义 (5.7)

设 H 为一超整数，$U \subseteq [0, H]$ 是一加法分割。如果一个集合 $O \subseteq [0, H]$ 满足性质：对任意 $a \in O$ 总存在 $r > U$ 使得 $[a - r, a + r] \cap [0, H] \subseteq O$，则 O 被称为一个 U–开集。

所有 U–开集组成 $[0, H]$ 上的 U–拓扑。注意，U–拓扑不是 T_1 拓扑。

定义 (5.8)

设 U 为 $[0, H]$ 中的一个加法分割。对每个 $a, b \in [0, H]$，定义

1. $a \sim b$ 当且仅当 $|a - b| < U$;
2. $[a]_U := \{c \in [0, H] : c \sim a\}$;
3. $[0, H]/\sim := \{[a]_U : a \in [0, H]\}$;
4. $[a]_U < [b]_U$ 当且仅当 $a < b$ 并且 $a \not\sim b$。

5.2 和集现象 –10

利用 U 的可加性质，容易证明 $\sim$ 是 $[0, H]$ 上的一个等价关系，每个 $[a]_U$ 是一等价类，被称为包含 a 的单子 (monad)，并且 $[0, H]/\sim$ 是一个自稠的全序集，即任意两个单子之间存在另一个单子。所以 $[0, H]/\sim$ 上的序拓扑就是 Hausdorff 的了。设 $\varphi(a) = [a]_U$ 是从 $[0, H]$ 到 $[0, H]/\sim$ 上的商映照，则可以看出由 φ 引导出的 $[0, H]$ 上的商拓扑就是 $[0, H]$ 上的 U–拓扑。虽然 U–拓扑不满足 Hausdorff 性质，但它是真正序拓扑的合适替代。以下介绍 $[0, H]$ 上关于和集现象的定理。

5.2 和集现象 –10

利用 U 的可加性质，容易证明 $\sim$ 是 $[0,H]$ 上的一个等价关系，每个 $[a]_U$ 是一等价类，被称为包含 a 的单子 (monad)，并且 $[0,H]/\sim$ 是一个自稠的全序集，即任意两个单子之间存在另一个单子。所以 $[0,H]/\sim$ 上的序拓扑就是 Hausdorff 的了。设 $\varphi(a)=[a]_U$ 是从 $[0,H]$ 到 $[0,H]/\sim$ 上的商映照，则可以看出由 φ 引导出的 $[0,H]$ 上的商拓扑就是 $[0,H]$ 上的 U–拓扑。虽然 U–拓扑不满足 Hausdorff 性质，但它是真正序拓扑的合适替代。以下介绍 $[0,H]$ 上关于和集现象的定理。

定理 (5.9 Jin)

设 H 是一超整数，U 是 $[0,H]$ 中的一个加法分割。如果 A 和 B 是 $[0,H]$ 中的 *Loeb* 正测集，那么 $A+B$ 一定不是 $[0,2H]$ 上的 U–无处稠密集。

5.2 和集现象 –11

证明：首先，集合 A 和 B 可以被设为内集，这是因为每个 Loeb 正测集包含一个 Loeb 正测内集。

证明：首先，集合 A 和 B 可以被设为内集，这是因为每个 Loeb 正测集包含一个 Loeb 正测内集。

假设对特定的 H 和 U，定理 5.9 不成立，我们将导出矛盾。令 μ_H 表示 $[0, H]$ 上的 Loeb 测度。为了方便，在这一小节中如果内集 C 不是 $[0, H]$ 的子集，就规定 $\mu_H(C) := \mu_H(st(|C|/H))$。

证明：首先，集合 A 和 B 可以被设为内集，这是因为每个 Loeb 正测集包含一个 Loeb 正测内集。

假设对特定的 H 和 U，定理 5.9 不成立，我们将导出矛盾。令 μ_H 表示 $[0, H]$ 上的 Loeb 测度。为了方便，在这一小节中如果内集 C 不是 $[0, H]$ 的子集，就规定 $\mu_H(C) := \mu_H(st(|C|/H))$。设

$$\alpha := \sup\{\mu_H(A) : \exists H > U,\ A \subseteq [0, H],\ \exists B \subseteq [0, H],\ A, B \text{ 是内集},\ \mu_H(B) > 0,\ A + B \text{ 是 } [0, 2H] \text{ 中 } U\text{–无处稠密集}\}.$$

证明：首先，集合 A 和 B 可以被设为内集，这是因为每个 Loeb 正测集包含一个 Loeb 正测内集。

假设对特定的 H 和 U，定理 5.9 不成立，我们将导出矛盾。令 μ_H 表示 $[0, H]$ 上的 Loeb 测度。为了方便，在这一小节中如果内集 C 不是 $[0, H]$ 的子集，就规定 $\mu_H(C) := \mu_H(st(|C|/H))$。设

$$\alpha := \sup\{\mu_H(A) : \exists H > U,\ A \subseteq [0, H],\ \exists B \subseteq [0, H],\ A, B \text{ 是内集},\ \mu_H(B) > 0,\ A + B \text{ 是 } [0, 2H] \text{ 中 } U\text{–无处稠密集}\}.$$

因为假设定理不成立，则存在一个反例，所以 $\alpha > 0$。

证明：首先，集合 A 和 B 可以被设为内集，这是因为每个 Loeb 正测集包含一个 Loeb 正测内集。

假设对特定的 H 和 U，定理 5.9 不成立，我们将导出矛盾。令 μ_H 表示 $[0, H]$ 上的 Loeb 测度。为了方便，在这一小节中如果内集 C 不是 $[0, H]$ 的子集，就规定 $\mu_H(C) := \mu_H(st(|C|/H))$。设

$$\alpha := \sup\{\mu_H(A) : \exists H > U,\ A \subseteq [0, H],\ \exists B \subseteq [0, H],\ A, B \text{ 是内集},\ \mu_H(B) > 0,\ A + B \text{ 是 } [0, 2H] \text{ 中 } U\text{–无处稠密集}\}.$$

因为假设定理不成立，则存在一个反例，所以 $\alpha > 0$。设

$$\beta := \sup\{\mu_H(B) : \exists H > U,\ B \subseteq [0, H],\ \exists A \subseteq [0, H],\ A, B \text{ 是内集},\ \mu_H(A) > \frac{9}{10}\alpha,\ A + B \text{ 是 } [0, 2H] \text{ 中 } U\text{–无处稠密集}\}.$$

同样 $\beta > 0$。

5.2 和集现象 –12

因为 α 定义在先，所以 $\beta \leqslant \alpha$。由 α 和 β 的定义我们可以取定一个超整数 $H > U$，取定内集 $A, B \subseteq [0, H]$ 使得 $\mu_H(A) > \frac{9}{10}\alpha$，$\mu_H(B) > \frac{9}{10}\beta$，并且 $A + B$ 是 $[0, 2H]$ 中的 U–无处稠密集。

因为 α 定义在先，所以 $\beta \leqslant \alpha$。由 α 和 β 的定义我们可以取定一个超整数 $H > U$，取定内集 $A, B \subseteq [0, H]$ 使得 $\mu_H(A) > \frac{9}{10}\alpha$，$\mu_H(B) > \frac{9}{10}\beta$，并且 $A + B$ 是 $[0, 2H]$ 中的 U–无处稠密集。

如果 $\alpha + \beta > \frac{10}{9}$，那么 $\mu_H(A) + \mu_H(B) > 1$。由鸽巢原理，可推出 $A + B$ 包含了 $[0, 2H]$ 中的单子 $[H]_U$。因为 $A + B$ 是内集，所以可以找到 $r > U$ 使得 $[H - r, H + r] \subseteq A + B$。这和假设 $A + B$ 在 $[0, 2H]$ 中 U–无处稠密相矛盾。所以我们可假设 $\alpha + \beta \leqslant \frac{10}{9}$ 和 $\beta \leqslant \frac{5}{9}$。

因为 α 定义在先，所以 $\beta \leqslant \alpha$。由 α 和 β 的定义我们可以取定一个超整数 $H > U$，取定内集 $A, B \subseteq [0, H]$ 使得 $\mu_H(A) > \frac{9}{10}\alpha$，$\mu_H(B) > \frac{9}{10}\beta$，并且 $A + B$ 是 $[0, 2H]$ 中的 U–无处稠密集。

如果 $\alpha + \beta > \frac{10}{9}$，那么 $\mu_H(A) + \mu_H(B) > 1$。由鸽巢原理，可推出 $A + B$ 包含了 $[0, 2H]$ 中的单子 $[H]_U$。因为 $A + B$ 是内集，所以可以找到 $r > U$ 使得 $[H - r, H + r] \subseteq A + B$。这和假设 $A + B$ 在 $[0, 2H]$ 中 U–无处稠密相矛盾。所以我们可假设 $\alpha + \beta \leqslant \frac{10}{9}$ 和 $\beta \leqslant \frac{5}{9}$。

给定任一 $m \in U$，集合 $A + B + [0, m]$ 仍在 $[0, 2H]$ 中 U–无处稠密，所以由 β 的定义我们有 $\mu_H(B + [0, m]) \leqslant \beta$。设 $\mathcal{M} := \left\{ m \in [0, H] : \frac{|B+[0,m]|}{H+1} < \frac{11}{10}\beta \right\}$。由命题 3.3，集合 $\mathcal{M}$ 是内集。由习题 5.24，存在 $m_0 > U$ 使得 $[0, m_0] \subseteq \mathcal{M}$。

5.2 和集现象 –13

现在取定 $K > U$ 使得 $K < \frac{1}{100}(H+1)$，$2K < m_0$，并且存在 $x_0 \in [0, H-K]$ 使得 $\frac{1}{K}|A \cap [x_0, x_0+K-1]| > \frac{9}{10}\alpha$。$K$ 的存在是因为存在标准正实数 ϵ 使得 A 的元素多于 $\frac{9+\epsilon}{10}\alpha(H+1)$，所以把区间 $[0, H]$ 切割成长度为 K 的子区间 (最后的子区间可能长度小于 K)，并且 K 足够小的话，其中必能找到一个 $[x_0, x_0+K-1]$ 使得 A 在其中的元素多于 $\frac{9}{10}\alpha K$。

5.2 和集现象 –13

现在取定 $K > U$ 使得 $K < \frac{1}{100}(H+1)$，$2K < m_0$，并且存在 $x_0 \in [0, H-K]$ 使得 $\frac{1}{K}|A \cap [x_0, x_0+K-1]| > \frac{9}{10}\alpha$。$K$ 的存在是因为存在标准正实数 ϵ 使得 A 的元素多于 $\frac{9+\epsilon}{10}\alpha(H+1)$，所以把区间 $[0, H]$ 切割成长度为 K 的子区间 (最后的子区间可能长度小于 K)，并且 K 足够小的话，其中必能找到一个 $[x_0, x_0+K-1]$ 使得 A 在其中的元素多于 $\frac{9}{10}\alpha K$。令

$$\mathcal{I} := \{[iK, (i+1)K-1] : i = 0, 1, \ldots, \lfloor H/K \rfloor\}.$$

5.2 和集现象 –13

现在取定 $K > U$ 使得 $K < \frac{1}{100}(H+1)$，$2K < m_0$，并且存在 $x_0 \in [0, H-K]$ 使得 $\frac{1}{K}|A \cap [x_0, x_0+K-1]| > \frac{9}{10}\alpha$。$K$ 的存在是因为存在标准正实数 ϵ 使得 A 的元素多于 $\frac{9+\epsilon}{10}\alpha(H+1)$，所以把区间 $[0, H]$ 切割成长度为 K 的子区间 (最后的子区间可能长度小于 K)，并且 K 足够小的话，其中必能找到一个 $[x_0, x_0+K-1]$ 使得 A 在其中的元素多于 $\frac{9}{10}\alpha K$。令

$$\mathcal{I} := \{[iK, (i+1)K-1] : i = 0, 1, \ldots, \lfloor H/K \rfloor\}.$$

如果 $\mathcal{I}$ 中至少三分之二的区间包含 B 中的元，那么 $B + [0, m_0]$ 包含了 $\mathcal{I}$ 中至少百分之六十的区间，所以 $\mu_H(B + [0, m_0]) > 0.6 - 0.01 > 0.58 > \beta$，这和 $\beta \leqslant \frac{5}{9}$ 矛盾。所以我们可设 $\mathcal{I}$ 中至少三分之一的区间不含 B 中的元素，即 B 中的元素都集中在 $\mathcal{I}$ 中最多三分之二的区间之中，因此这至少三分之二的区间中必定有一个 $[y_0, y_0+K-1]$ 使得 $B \cap [y_0, y_0+K-1]$ 包含了至少 $\frac{3}{2}\beta K$ 元素。

5.2 和集现象 –14

设

$$A' := A \cap [x_0, x_0 + K - 1] - x_0,$$
$$B' := B \cap [y_0, y_0 + K - 1] - y_0.$$

设

$$A' := A \cap [x_0, x_0 + K - 1] - x_0,$$
$$B' := B \cap [y_0, y_0 + K - 1] - y_0.$$

因为 $\mu_K(A') > \frac{9}{10}\alpha, \quad \mu_K(B') \geqslant \frac{3}{2}\beta,$

设

$$A' := A \cap [x_0, x_0 + K - 1] - x_0,$$
$$B' := B \cap [y_0, y_0 + K - 1] - y_0.$$

因为 $\mu_K(A') > \frac{9}{10}\alpha, \quad \mu_K(B') \geqslant \frac{3}{2}\beta,$

所以由 β 的定义我们可以说 $A' + B'$ 不是在 $[0, 2K]$ 中 U–无处稠密的，因此 $A + B$ 也不是在 $[0, 2H]$ 中 U–无处稠密的，这和 A 和 B 的选择矛盾。 □

5.2 和集现象 –15

让我们来看为什么定理 5.3 是定理 5.9 的简单推论。设 A 和 B 是实数单位区间 I 上的两个勒贝格正测集。我们要证明 $A+B$ 包含一个非空开区间。给定一个超整数 H，定义映照 $f\colon [0,2H] \to \mathbb{R}$ 使得 $f(x) := st(x/H)$。

5.2 和集现象 –15

让我们来看为什么定理 5.3 是定理 5.9 的简单推论。设 A 和 B 是实数单位区间 I 上的两个勒贝格正测集。我们要证明 $A+B$ 包含一个非空开区间。给定一个超整数 H，定义映照 $f\colon [0,2H] \to \mathbb{R}$ 使得 $f(x) := st(x/H)$。令 $U = U_H$，这里 U_H 是 $[0,H]$ 中最大的加法分割。容易证明对任意 $a \in [0,2H]$，$f^{-1}(f(a)) = [a]_U$。由定理 3.10 可知 $f^{-1}(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 是 $[0,H]$ 上 Loeb 可测集并且其 Loeb 测度分别等于 A 和 B 的勒贝格测度。设 $A' \subseteq f^{-1}(A)$ 和 $B' \subseteq f^{-1}(B)$ 使得 A' 和 B' 是 $[0,H]$ 中的 Loeb 正测内集。

让我们来看为什么定理 5.3 是定理 5.9 的简单推论。设 A 和 B 是实数单位区间 I 上的两个勒贝格正测集。我们要证明 $A+B$ 包含一个非空开区间。给定一个超整数 H，定义映照 $f:[0,2H]\to\mathbb{R}$ 使得 $f(x):=st(x/H)$。令 $U=U_H$，这里 U_H 是 $[0,H]$ 中最大的加法分割。容易证明对任意 $a\in[0,2H]$，$f^{-1}(f(a))=[a]_U$。由定理 3.10 可知 $f^{-1}(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 是 $[0,H]$ 上 Loeb 可测集并且其 Loeb 测度分别等于 A 和 B 的勒贝格测度。设 $A'\subseteq f^{-1}(A)$ 和 $B'\subseteq f^{-1}(B)$ 使得 A' 和 B' 是 $[0,H]$ 中的 Loeb 正测内集。

由定理 5.9，$A'+B'$ 不是在 U–无处稠密的，所以存在区间 $[a,b]\subseteq[0,2H]$ 使得 $b-a>U$ 并且 $[a,b]$ 中任意长度大于 U 的区间都含有 $A'+B'$ 中的元素。因为 $A'+B'$ 是内集，所以 $A'+B'$ 在 $[a,b]$ 中最大空隙存在且长度小于 U。现在容易证明 $f(a)<f(b)$ 并且 $(f(a),f(b))\subseteq f(A'+B')\subseteq A+B$。所以 $A+B$ 包含了非空开区间 $(f(a),f(b))$。

在以上证明中我们使用了加法分割 U_H。如果使用 $U = \mathbb{N}$，会得到什么结果？

5.2 和集现象 –16

在以上证明中我们使用了加法分割 U_H。如果使用 $U = \mathbb{N}$，会得到什么结果？

引理 (5.10)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 并且 $\alpha \in \mathbb{R}$。则 $BD(A) \geqslant \alpha$ 当且仅当存在长度为超整数的区间 $[a, b]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [a, b]|/(b - a + 1)) \geqslant \alpha$。

在以上证明中我们使用了加法分割 U_H。如果使用 $U = \mathbb{N}$，会得到什么结果？

引理 (5.10)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 并且 $\alpha \in \mathbb{R}$。则 $BD(A) \geqslant \alpha$ 当且仅当存在长度为超整数的区间 $[a, b]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [a, b]|/(b - a + 1)) \geqslant \alpha$。

证明：“⇒”：由上 Banach 密度的定义对每个 $k \in \mathbb{N}_+$ 能找到 $[a_k, b_k] \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $b_k - a_k > k$，
$|A \cap [a_k, b_k]|/(b_k - a_k + 1) > \alpha - 1/k$。由转换原理，存在一个超整数 K 满足 $b_K - a_K > K$ 和
$|{}^*A \cap [a_K, b_K]|/(b_K - a_K + 1) > \alpha - 1/K \approx \alpha$。显然
$[a, b] = [a_K, b_K]$ 满足要求。

“$\Leftarrow$”：　任给 $k \in \mathbb{N}$。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中存在 $a, b \in {}^*\mathbb{N}$ 满足 $b - a > k$ 和 $|{}^*A \cap [a, b]|/(b - a + 1) > \alpha - 1/k$。由转换原理在 $\mathcal{V}$ 中存在 $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ 满足 $b_k - a_k > k$ 和 $|A \cap [a_k, b_k]|/(b_k - a_k + 1) > \alpha - 1/k$，而这两性质推出 $BD(A) \geqslant \alpha - 1/k$。因为 k 是任意的，所以 $BD(A) \geqslant \alpha$。　□

“$\Leftarrow$”：　任给 $k \in \mathbb{N}$。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中存在 $a, b \in {}^*\mathbb{N}$ 满足 $b - a > k$ 和 $|{}^*A \cap [a, b]|/(b - a + 1) > \alpha - 1/k$。由转换原理在 $\mathcal{V}$ 中存在 $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ 满足 $b_k - a_k > k$ 和 $|A \cap [a_k, b_k]|/(b_k - a_k + 1) > \alpha - 1/k$，而这两性质推出 $BD(A) \geqslant \alpha - 1/k$。因为 k 是任意的，所以 $BD(A) \geqslant \alpha$。 □

引理 (5.11)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$。

1. 集合 A 是厚实的当且仅当存在长度为超整数的区间 $[a, b] \subseteq {}^*A$。

“$\Leftarrow$”：　任给 $k \in \mathbb{N}$。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中存在 $a, b \in {}^*\mathbb{N}$ 满足 $b - a > k$ 和 $|{}^*A \cap [a, b]|/(b - a + 1) > \alpha - 1/k$。由转换原理在 $\mathcal{V}$ 中存在 $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ 满足 $b_k - a_k > k$ 和 $|A \cap [a_k, b_k]|/(b_k - a_k + 1) > \alpha - 1/k$，而这两性质推出 $BD(A) \geqslant \alpha - 1/k$。因为 k 是任意的，所以 $BD(A) \geqslant \alpha$。　□

引理 (5.11)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$。

1. 集合 A 是厚实的当且仅当存在长度为超整数的区间 $[a, b] \subseteq {}^*A$。
2. 集合 A 是局部链接的当且仅当存在长度为超整数的区间 $[a, b]$ 和有限自然数 $k \in \mathbb{N}$ 使得 ${}^*A$ 在 $[a, b]$ 中的缝隙的长度小于 k，即 $g = \max\{d - c : [c, d] \subseteq [a, b] \setminus {}^*A\} < k$。

证明：第一部分只需转换原理的简单应用。我们只证明第二部分。

5.2 和集现象 –18

证明：第一部分只需转换原理的简单应用。我们只证明第二部分。

“$\Rightarrow$”：设 A 是一链接集 B 和一厚实集 C 的交。那么 ${}^*A = {}^*B \cap {}^*C$。因为 B 在 $\mathbb{N}$ 中缝隙的长度小于一个自然数 k，所以由转换原理 ${}^*B$ 在 ${}^*\mathbb{N}$ 中缝隙的长度小于 k。因为 C 是厚实集，由第一部分，存在一超有限区间 $[a, b] \subseteq {}^*C$。显然 ${}^*A$ 在 $[a, b]$ 中缝隙的长度小于 k。

证明：第一部分只需转换原理的简单应用。我们只证明第二部分。

“⇒”：设 A 是一链接集 B 和一厚实集 C 的交。那么 ${}^*A = {}^*B \cap {}^*C$。因为 B 在 $\mathbb{N}$ 中缝隙的长度小于一个自然数 k，所以由转换原理 ${}^*B$ 在 ${}^*\mathbb{N}$ 中缝隙的长度小于 k。因为 C 是厚实集，由第一部分，存在一超有限区间 $[a, b] \subseteq {}^*C$。显然 ${}^*A$ 在 $[a, b]$ 中缝隙的长度小于 k。

“⇐”：设 $g = \max\{d - c : [c, d] \subseteq [a, b] \setminus {}^*A\}$。因为右边所涉集合是内集，所以 g 存在。由引理的假设，g 一定是有限的。对任意 $m \in \mathbb{N}$ 语句“存在区间 $[a, b]$ 满足 $b - a > m$ 并且 ${}^*A$ 在 $[a, b]$ 中的缝隙的长度 $\leqslant g$”在 ${}^*\mathcal{V}$ 中成立，由转换原理，存在区间 $[a_m, b_m] \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $b_m - a_m > m$ 并且 A 在 $[a_m, b_m]$ 中缝隙的长度 $\leqslant g$。令 $C = A \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}}[a_m, b_m]$ 和 $B = (\mathbb{N} \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}}[a_m, b_m]) \cup A$。显然 B 是链接集，C 是厚实集，并且 $A = B \cap C$。 □

定理 (5.12)

设 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $BD(A) > 0$ 和 $BD(B) > 0$。则 $A + B$ 一定是局部链接的。

定理 (5.12)

设 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $BD(A) > 0$ 和 $BD(B) > 0$。则 $A + B$ 一定是局部链接的。

证明 由引理 5.10，存在超有限区间 $[x, x + K_1]$ 和 $[y, y + K_2]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [x, x + K_1]|/(K_1 + 1)) \geqslant BD(A)$ 和 $st({}^*B(y, y + K_2)/(K_2 + 1)) \geqslant BD(B)$。

定理 (5.12)

设 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $BD(A) > 0$ 和 $BD(B) > 0$。则 $A + B$ 一定是局部链接的。

证明 由引理 5.10，存在超有限区间 $[x, x + K_1]$ 和 $[y, y + K_2]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [x, x + K_1]|/(K_1 + 1)) \geqslant BD(A)$ 和 $st({}^*B(y, y + K_2)/(K_2 + 1)) \geqslant BD(B)$。实际上我们可假设 $K_1 = K_2 = K$，因为不然的话取 $K = \lceil \sqrt{\min\{K_1, K_2\}} \rceil$，再把 $[x, x + K_1]$ 和 $[y, y + K_2]$ 分割成长度为 $K + 1$ 的子区间 (最后一个区间的长度可能小于 $K + 1$)，然后在这些子区间中可找到 $[x', x' + K]$ 和 $[y', y' + K]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [x', x' + K]|/(K + 1)) \geqslant BD(A)$ 和 $st(|{}^*B \cap [y', y' + K]|/(K + 1)) \geqslant BD(B)$，再用 K 替代 K_1 和 K_2。

定理 (5.12)

设 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $BD(A) > 0$ 和 $BD(B) > 0$。则 $A + B$ 一定是局部链接的。

证明 由引理 5.10，存在超有限区间 $[x, x + K_1]$ 和 $[y, y + K_2]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [x, x + K_1]|/(K_1 + 1)) \geqslant BD(A)$ 和 $st({}^*B(y, y + K_2)/(K_2 + 1)) \geqslant BD(B)$。实际上我们可假设 $K_1 = K_2 = K$，因为不然的话取 $K = \lceil \sqrt{\min\{K_1, K_2\}} \rceil$，再把 $[x, x + K_1]$ 和 $[y, y + K_2]$ 分割成长度为 $K + 1$ 的子区间（最后一个区间的长度可能小于 $K + 1$），然后在这些子区间中可找到 $[x', x' + K]$ 和 $[y', y' + K]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [x', x' + K]|/(K + 1)) \geqslant BD(A)$ 和 $st(|{}^*B \cap [y', y' + K]|/(K + 1)) \geqslant BD(B)$，再用 K 替代 K_1 和 K_2。由定理 5.9 集合 ${}^*(A + B)$ 在 $[x + y, x + y + 2K]$ 中不是 U–无处稠密的，所以存在超有限区间 $[a, b] \subseteq [x + y, x + y + 2K]$ 和有限自然数 $k \in \mathbb{N}$ 使得 ${}^*(A + B)$ 在 $[a, b]$ 中缝隙的长度都小于 k。由引理 5.11，$A + B$ 是局部链接的。 □

注意，定理 5.12 是对定理 5.5 的一个充实。在定理 5.12 的结论中局部链接不能被改成链接，这是加法和减法本质上的差别。

注意，定理 5.12 是对定理 5.5 的一个充实。在定理 5.12 的结论中局部链接不能被改成链接，这是加法和减法本质上的差别。

在过去十几年中定理 5.12 被不断推广或重证。但在发现定理 5.12 的过程中非标准分析无疑发挥了重要的作用。只有通过定理 5.9，连续情况和离散情况下和集现象才能被严格地统一起来。在定理 5.9 的应用中我们只用到了 $U = U_H$ 和 $U = \mathbb{N}$ 两种情况。对于其他类型加法分割的应用，还有待于进一步探究。

5.3 Szemerédi 定理关于 $k = 4$ 的简单证明 –1

设 a, d 是实数。称一个实数集合 $p := \{a + di : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$ 为长度等于 k 的等差数列，记为 k-a.p.。一般情况下 a, d 是整数，$d \neq 0$。记 p 中的第 i 项 $a + d(i-1)$ 为 $p(i)$。大写字母 P, Q, R 等常被用来表示长度为超整数的 a.p.。如果 p, q 是两个 k-a.p.，记 $p \oplus q := \{p(i) + q(i) : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$。显然 $p \oplus q$ 也是一个 k-a.p.。

5.3 Szemerédi 定理关于 $k = 4$ 的简单证明 –1

设 a, d 是实数。称一个实数集合 $p := \{a + di : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$ 为长度等于 k 的等差数列，记为 k-a.p.。一般情况下 a, d 是整数，$d \neq 0$。记 p 中的第 i 项 $a + d(i-1)$ 为 $p(i)$。大写字母 P, Q, R 等常被用来表示长度为超整数的 a.p.。如果 p, q 是两个 k-a.p.，记 $p \oplus q := \{p(i) + q(i) : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$。显然 $p \oplus q$ 也是一个 k-a.p.。

定理 (Szemerédi)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$。如果 $BD(A) > 0$，则对任意 $k \in \mathbb{N}$，A 中一定包含 k-a.p.。

5.3 Szemerédi 定理关于 $k = 4$ 的简单证明 –1

设 a, d 是实数。称一个实数集合 $p := \{a + di : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$ 为长度等于 k 的等差数列，记为 k-a.p.。一般情况下 a, d 是整数，$d \neq 0$。记 p 中的第 i 项 $a + d(i-1)$ 为 $p(i)$。大写字母 P, Q, R 等常被用来表示长度为超整数的 a.p.。如果 p, q 是两个 k-a.p.，记 $p \oplus q := \{p(i) + q(i) : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$。显然 $p \oplus q$ 也是一个 k-a.p.。

定理 (Szemerédi)

设 $A \subseteq \mathbb{N}$。如果 $BD(A) > 0$，则对任意 $k \in \mathbb{N}$，A 中一定包含 k-a.p.。

Szemerédi 定理其实是在 1936 年由 P. Erdős 和 P. Turán 提出的一个猜想。而这猜想的提出则是为了推广证明于 1927 年的 van der Waerden 定理。

Szemerédi 定理 –2

定理 (van der Waerden)

任给 $n, k \in \mathbb{N}$，**如果** $\mathbb{N}$ **被分割成** n **个子集** $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$，**则一定有一子集** C_i **包含** k-a.p.。

Szemerédi 定理 –2

定理 (van der Waerden)

任给 $n, k \in \mathbb{N}$，如果 $\mathbb{N}$ 被分割成 n 个子集 $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$，则一定有一子集 C_i 包含 k-a.p.。

记 $W(k, n) \in \mathbb{N}$ 为最小自然数 w 使得如果 $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ 是 $[w]$ 的一个分割，则一定有一子集 C_i 包含 k-a.p.。

Szemerédi 定理 –2

定理 (van der Waerden)

任给 $n, k \in \mathbb{N}$，如果 $\mathbb{N}$ 被分割成 n 个子集 $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$，则一定有一子集 C_i 包含 k-a.p.。

记 $W(k, n) \in \mathbb{N}$ 为最小自然数 w 使得如果 $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ 是 $[w]$ 的一个分割，则一定有一子集 C_i 包含 k-a.p.。

在 1953 年 K. F. Roth 用调和分析的方法证明了在 $k = 3$ 的情况下猜想正确。在 1975 年，E. Szemerédi 用纯组合方法证明了对所有 $k \in \mathbb{N}$，猜想都正确。所以我们现在称此猜想为 Szemerédi 定理。可是 Szemerédi 的证明很难读，所以在 1977 年 H. Furstenberg 用测度论中的历遍理论给出了 Szemerédi 定理的又一个非常不同的证明。在 2001 年 T. Gowers 再次用调和分析的方法给出了 Szemerédi 定理的一个新证明，同时还给出了 k 和 $BD(A)$ 之间的一个数值关系。虽然两个新证明比 Szemerédi 的组合证明要好读一些，但各自都不短且需要很多本方向的基础知识。

Szemerédi 定理 –3

在 2017 年一次由美国数学研究所 (AIM) 资助的工作坊 Nonstandard Methods in Combinatorial Number Theory 中本文作者有幸聆听了 T. Tao 的一系列讲座，介绍 Szemerédi 定理的原始组合证明，并试图进行简化。他相信如果 Szemerédi 的原始思想被大家所理解掌握，则会使其在组合数论的研究中发挥更大的影响。T. Tao 挑战讲座的听众，用非标准分析的方法对他的简化再作简化，使得 Szemerédi 的组合证明能更简单直观。而在这一小节中的工作是本文作者响应这一挑战的的尝试。

Szemerédi 定理 –3

在 2017 年一次由美国数学研究所 (AIM) 资助的工作坊 Nonstandard Methods in Combinatorial Number Theory 中本文作者有幸聆听了 T. Tao 的一系列讲座，介绍 Szemerédi 定理的原始组合证明，并试图进行简化。他相信如果 Szemerédi 的原始思想被大家所理解掌握，则会使其在组合数论的研究中发挥更大的影响。T. Tao 挑战讲座的听众，用非标准分析的方法对他的简化再作简化，使得 Szemerédi 的组合证明能更简单直观。而在这一小节中的工作是本文作者响应这一挑战的的尝试。

理解 Tao 或 Szemerédi 文章的困难对不同读者有所不同。对本文作者来说有两点值得一提。第一点是证明中涉及了很多相互联系的参量，例如 $\epsilon, \delta, \kappa, L, H, M, N, L', N'$，等由一种特殊的序关系联系在一起。在非标准证明中这些参量比较少涉及，且它们之间的关系可以比较简单地处理。

Szemerédi 定理 –4

第二点是在他们证明中的归纳方法比较奇特。为了证明在一个有正上 Banach 密度的集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 包含 k-a.p.，需要对每个 $\Omega \subseteq [k]$ 递归证明组合命题 $C(\Omega, k)$。

Szemerédi 定理 –4

第二点是在他们证明中的归纳方法比较奇特。为了证明在一个有正上 Banach 密度的集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 包含 k-a.p.，需要对每个 $\Omega \subseteq [k]$ 递归证明组合命题 $C(\Omega, k)$。其中关键一步是证明如果 $k_0 := \min([k] \setminus \Omega) \leq k$，则 $C(\Omega, k) \Rightarrow C((\Omega \setminus [k_0 - 1]) \cup \{k_0\}, k)$。

Szemerédi 定理 –4

第二点是在他们证明中的归纳方法比较奇特。为了证明在一个有正上 Banach 密度的集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 包含 k-a.p.，需要对每个 $\Omega \subseteq [k]$ 递归证明组合命题 $C(\Omega, k)$。其中关键一步是证明如果 $k_0 := \min([k] \setminus \Omega) \leq k$，则 $C(\Omega, k) \Rightarrow C((\Omega \setminus [k_0 - 1]) \cup \{k_0\}, k)$。首先命题 $C(\emptyset, k)$ 平凡为真。按照此方法，证明 $C([3], 3)$ 的递归步骤就是 $C(\emptyset, 3) \Rightarrow C(\{1\}, 3) \Rightarrow C(\{2\}, 3) \Rightarrow C(\{1, 2\}, 3) \Rightarrow C(\{3\}, 3) \Rightarrow C(\{1, 3\}, 3) \Rightarrow C(\{2, 3\}, 3) \Rightarrow C([3], 3)$。

Szemerédi 定理 –4

第二点是在他们证明中的归纳方法比较奇特。为了证明在一个有正上 Banach 密度的集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 包含 k-a.p.，需要对每个 $\Omega \subseteq [k]$ 递归证明组合命题 $C(\Omega, k)$。其中关键一步是证明如果 $k_0 := \min([k] \setminus \Omega) \leq k$，则 $C(\Omega, k) \Rightarrow C((\Omega \setminus [k_0 - 1]) \cup \{k_0\}, k)$。首先命题 $C(\emptyset, k)$ 平凡为真。按照此方法，证明 $C([3], 3)$ 的递归步骤就是 $C(\emptyset, 3) \Rightarrow C(\{1\}, 3) \Rightarrow C(\{2\}, 3) \Rightarrow C(\{1, 2\}, 3) \Rightarrow C(\{3\}, 3) \Rightarrow C(\{1, 3\}, 3) \Rightarrow C(\{2, 3\}, 3) \Rightarrow C([3], 3)$。对于一般 k，递归步骤需要进行 $2^k - 1$ 步。用这个归纳方法使得证明缺乏直观。当然在 $k = 3$ 时，有简单的直接证明。而我们在此所要显示的是在 $k = 4$ 时也有简单的直接证明，从而避免以上的归纳方法。

Szemerédi 定理 –4

第二点是在他们证明中的归纳方法比较奇特。为了证明在一个有正上 Banach 密度的集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 包含 k-a.p.，需要对每个 $\Omega \subseteq [k]$ 递归证明组合命题 $C(\Omega, k)$。其中关键一步是证明如果 $k_0 := \min([k] \setminus \Omega) \leq k$，则 $C(\Omega, k) \Rightarrow C((\Omega \setminus [k_0 - 1]) \cup \{k_0\}, k)$。首先命题 $C(\emptyset, k)$ 平凡为真。按照此方法，证明 $C([3], 3)$ 的递归步骤就是 $C(\emptyset, 3) \Rightarrow C(\{1\}, 3) \Rightarrow C(\{2\}, 3) \Rightarrow C(\{1, 2\}, 3) \Rightarrow C(\{3\}, 3) \Rightarrow C(\{1, 3\}, 3) \Rightarrow C(\{2, 3\}, 3) \Rightarrow C([3], 3)$。对于一般 k，递归步骤需要进行 $2^k - 1$ 步。用这个归纳方法使得证明缺乏直观。当然在 $k = 3$ 时，有简单的直接证明。而我们在此所要显示的是在 $k = 4$ 时也有简单的直接证明，从而避免以上的归纳方法。有非标准分析基础的读者如果想了解 Szemerédi 定理的组合证明而又觉得 Tao 的文章太难，可以尝试从这一小节入手，再看本文作者对 Szemerédi 定理的完整证明。

Szemerédi 定理 –4

第二点是在他们证明中的归纳方法比较奇特。为了证明在一个有正上 Banach 密度的集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 包含 k-a.p.，需要对每个 $\Omega \subseteq [k]$ 递归证明组合命题 $C(\Omega, k)$。其中关键一步是证明如果 $k_0 := \min([k] \setminus \Omega) \leq k$，则 $C(\Omega, k) \Rightarrow C((\Omega \setminus [k_0 - 1]) \cup \{k_0\}, k)$。首先命题 $C(\emptyset, k)$ 平凡为真。按照此方法，证明 $C([3], 3)$ 的递归步骤就是 $C(\emptyset, 3) \Rightarrow C(\{1\}, 3) \Rightarrow C(\{2\}, 3) \Rightarrow C(\{1, 2\}, 3) \Rightarrow C(\{3\}, 3) \Rightarrow C(\{1, 3\}, 3) \Rightarrow C(\{2, 3\}, 3) \Rightarrow C([3], 3)$。对于一般 k，递归步骤需要进行 $2^k - 1$ 步。用这个归纳方法使得证明缺乏直观。当然在 $k = 3$ 时，有简单的直接证明。而我们在此所要显示的是在 $k = 4$ 时也有简单的直接证明，从而避免以上的归纳方法。有非标准分析基础的读者如果想了解 Szemerédi 定理的组合证明而又觉得 Tao 的文章太难，可以尝试从这一小节入手，再看本文作者对 Szemerédi 定理的完整证明。

因为在 Tao 的文章中假设了 Szemerédi 正则引理的一个弱形式成立，所以我们在此也作同样处理。以下是正则引理的弱形式。

Szemerédi 定理 –5

引理 (5.15)

存在一正值函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。设 V,W 是有限集，$\epsilon>0$，对每个 $w\in W$ 有 $E_w\subseteq V$. 则存在一个 V 的分割 $V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n$ 使得 $n\le f(\epsilon)$，且对每个 $i\le n$ 和 $w\in W$ 存在 $0\le c_{i,w}\le 1$ 使得对每个集合 $F\subseteq V$ 都有集合 $W'\subseteq W$ 满足 $|W'|\ge(1-\epsilon)|W|$ 并对每一 $w\in W'$ 都有

$$\left||F\cap E_w|-\sum_{i=1}^{n}c_{i,w}|F\cap V_i|\right|\le\epsilon|V|.$$

Szemerédi 定理 –6

其实 $f(\epsilon)$ 可以取为指数函数 $b^{1/\epsilon}$，只是我们在证明中并不需要这点。在以上引理中 $|V|$ 比 n 大得多。如果 ϵ 取得越小，就得允许 n 更大。以上正则引理可证明非标准形式的混合引理 (Mixing Lemma)。

Szemerédi 定理 –6

其实 $f(\epsilon)$ 可以取为指数函数 $b^{1/\epsilon}$，只是我们在证明中并不需要这点。在以上引理中 $|V|$ 比 n 大得多。如果 ϵ 取得越小，就得允许 n 更大。以上正则引理可证明非标准形式的混合引理 (Mixing Lemma)。

为简化记号，对 ${}^*\mathbb{N}$ 中两个正自然数 $a < b$，记 $a \lll b$ 当且仅当 $a/b \approx 0$。显然自然数 n 是超有限的当且仅当 $1 \lll n$。在这一小节中所有不在 $\mathbb{N}$ 中的集合都是内集。对任意内集 A 和 $n \in {}^*\mathbb{N}$，记 $\delta_n(A) = |A|/n$ 且 $\mu_n(A) = st(\delta_n(A))$。如果 $A \subseteq \Omega$，则 $\mu_{|\Omega|}(A)$ 就是 A 在 Ω 上的 Loeb 测度。为了方便我们不要求 $|A|$ 小于等于 n。所以 $\mu_n(A) = \infty$ 也是可能的。

Szemerédi 定理 –7

定义 (5.16)

设 $A, S \subseteq {}^*\mathbb{N}$。记

$$SD(A) := \sup\left\{\mu_{|P|}(A \cap P) : P \text{ 是 a.p. 满足 } |P| \gg 1\right\}.$$

Szemerédi 定理 –7

定义 (5.16)

设 $A, S \subseteq {}^*\mathbb{N}$。记

$$SD(A) := \sup\left\{\mu_{|P|}(A \cap P) : P \text{ 是 a.p. 满足 } |P| \ggg 1\right\}.$$

如果 $SD(S) \geq \gamma$，记

$$SD_{S,\gamma}(A) := \sup\{\mu_{|P|}(A \cap P) : P \text{ 是 a.p., } |P| \ggg 1 \text{ 并且 } \mu_{|P|}(S \cap P) \geq \gamma.\}.$$

Szemerédi 定理 –7

定义 (5.16)

设 $A, S \subseteq {}^*\mathbb{N}$。记

$$SD(A) := \sup\left\{\mu_{|P|}(A \cap P) : P \text{ 是 a.p. 满足 } |P| \ggg 1\right\}.$$

如果 $SD(S) \geq \gamma$，记

$$SD_{S,\gamma}(A) := \sup\{\mu_{|P|}(A \cap P) : P \text{ 是 a.p., } |P| \ggg 1 \text{ 并且 } \mu_{|P|}(S \cap P) \geq \gamma.\}.$$

以上定义中 sup 是标准算子，所以 $SD(A)$ 、和 $SD_{S,\gamma}(A)$ 是 $[0,1]$ 中的标准实数。可以证明对任一自然数子集 $A \subseteq \mathbb{N}$，有 $SD({}^*A) \geq BD(A)$。所以可称 $SD({}^*A)$ 为 A 的**强 Banach 密度**。

Szemerédi 定理 –8

引理 (5.17 Mixing Lemma)

设 $N \ggg 1$，$A \subseteq [N]$，$1 \lll H \leq N/2$，和 $R \subseteq [N-H]$ 使得对每个 $x \in R$ 都 $\mu_N(A) = SD(A) = \mu_H((x+[H]) \cap A) = \alpha$。则以下成立。

Szemerédi 定理 –8

引理 (5.17 Mixing Lemma)

设 $N \ggg 1$，$A \subseteq [N]$，$1 \lll H \leq N/2$，和 $R \subseteq [N-H]$ 使得对每个 $x \in R$ 都 $\mu_N(A) = SD(A) = \mu_H((x+[H]) \cap A) = \alpha$。则以下成立。

(i) 给定 $E \subseteq [H]$，$\mu_H(E) > 0$，$K \ggg 1$，和 K-a.p. $P \subseteq R$，存在 $x \in P$ 使得

$$\mu_H(A \cap (x+E)) \geq \alpha \mu_H(E);$$

Szemerédi 定理 –8

引理 (5.17 Mixing Lemma)

设 $N \ggg 1$，$A \subseteq [N]$，$1 \lll H \leq N/2$，和 $R \subseteq [N-H]$ 使得对每个 $x \in R$ 都 $\mu_N(A) = SD(A) = \mu_H((x+[H]) \cap A) = \alpha$。则以下成立。

(i) 给定 $E \subseteq [H]$，$\mu_H(E) > 0$，$K \ggg 1$，和 K-a.p. $P \subseteq R$，存在 $x \in P$ 使得

$$\mu_H(A \cap (x+E)) \geq \alpha \mu_H(E);$$

(ii) 给定 $m, m' \ggg 1$，m-a.p. $P \subseteq R$ 使得 $W\left(3^{m'}, m'\right) \leq m$，给定 $[H]$ 的内分割 $\{V_i \mid i \in [m']\}$，则存在一个 m'-a.p. $P' \subseteq P$，一个集合 $I \subseteq [m']$ 使得 $U = \bigcup\{V_i \mid i \in I\}$ 满足 $\mu_H(U) = 1$，和一个正无穷小 ϵ 使得对每个 $i \in I$ 和每个 $x \in P'$ 有

$$|\delta_H(A \cap (x+V_i)) - \alpha \delta_H(V_i)| \leq \epsilon \delta_H(V_i);$$

Szemerédi 定理 –9

(iii) 给定 $m \ggg 1$，m-a.p. $P \subseteq R$，和一个内集族 $\{E_w \subseteq [H] \mid w \in W\}$ 满足 $|W| \ggg 1$ 和对每个 $w \in W$ 有 $\mu_H(E_w) > 0$。则存在 $x \in P$ 和 $T \subseteq W$ 使得 $\mu_{|W|}(T) = 1$ 并且对每个 $w \in T$ 都有

$$\mu_H(A \cap (x + E_w)) = \alpha \mu_H(E_w).$$

Szemerédi 定理 –9

(iii) 给定 $m \ggg 1$，m-a.p. $P \subseteq R$，和一个内集族 $\{E_w \subseteq [H] \mid w \in W\}$ 满足 $|W| \ggg 1$ 和对每个 $w \in W$ 有 $\mu_H(E_w) > 0$。则存在 $x \in P$ 和 $T \subseteq W$ 使得 $\mu_{|W|}(T) = 1$ 并且对每个 $w \in T$ 都有

$$\mu_H(A \cap (x + E_w)) = \alpha \mu_H(E_w).$$

证明：(i) 由 α 的最大性，对所有 $i \in [N]$ 都有 $\mu_K((i + P) \cap A) \leq \alpha$。如果 (i) 不成立，即 (i) 中所述的 x 不存在，

Szemerédi 定理 –9

(iii) 给定 $m \ggg 1$，m-a.p. $P \subseteq R$，和一个内集族 $\{E_w \subseteq [H] \mid w \in W\}$ 满足 $|W| \ggg 1$ 和对每个 $w \in W$ 有 $\mu_H(E_w) > 0$。则存在 $x \in P$ 和 $T \subseteq W$ 使得 $\mu_{|W|}(T) = 1$ 并且对每个 $w \in T$ 都有

$$\mu_H(A \cap (x + E_w)) = \alpha \mu_H(E_w).$$

证明：(i) 由 α 的最大性，对所有 $i \in [N]$ 都有 $\mu_K((i+P) \cap A) \leq \alpha$。如果 (i) 不成立，即 (i) 中所述的 x 不存在，则

$$\begin{aligned}
\alpha\mu_H(E) &\gg \frac{1}{K}\sum_{x\in P}\frac{1}{H}\sum_{i\in[H]}\chi_{A\cap(x+E)}(x+i) \\
&= \frac{1}{H}\sum_{i\in[H]}\frac{1}{K}\sum_{x\in P}\chi_{A\cap(x+E)}(x+i) \\
&= \frac{1}{H}\sum_{i\in E}\frac{1}{K}\sum_{x\in P}\chi_{A}(x+i) \gtrapprox \alpha\mu_H(E),
\end{aligned}$$

矛盾。所以 (i) 成立。

Szemerédi 定理 –10

(ii) 这部分证明需要利用内集性质，所以基本用 δ_H 而不是 μ_H。取定 $j \in \mathbb{N}$。对每个 $x \in P$ 令

$$c_i^j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta_H((x+V_i)\cap A) \geq \left(\alpha + \frac{1}{j}\right)\delta_H(V_i), \\ -1 & \text{if } \delta_H((x+V_i)\cap A) \leq \left(\alpha - \frac{1}{j}\right)\delta_H(V_i), \\ 0 & \text{所有其他情况.} \end{cases}$$

并令 $c^j : P \to \{-1,0,1\}^{[m']}$ 使得 $c^j(x)(y) = c_y^j(x)$。由 van der Waerden 定理可找到一 m'–a.p. $P_j' \subseteq P$ 使得对任何 $x, x' \in P_j'$，都有 $c^j(x) = c^j(x')$。

Szemerédi 定理 –11

对所有 $x \in P'_j$ **令** $I_j^+ = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = 1\}$,
$I_j^- = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = -1\}$ **和** $I_j = [m'] \setminus (I_j^+ \cup I_j^-)$。

Szemerédi 定理 –11

对所有 $x \in P'_j$ **令** $I_j^+ = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = 1\}$, $I_j^- = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = -1\}$ **和** $I_j = [m'] \setminus (I_j^+ \cup I_j^-)$。**再令** $U_j^+ = \bigcup\{V_i : i \in I_j^+\}$, $U_j^- = \bigcup\{V_i : i \in I_j^-\}$, **和** $U_j = [H] \setminus (U_j^+ \cup U_j^-)$。

Szemerédi 定理 –11

对所有 $x \in P'_j$ **令** $I_j^+ = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = 1\}$, $I_j^- = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = -1\}$ **和** $I_j = [m'] \setminus (I_j^+ \cup I_j^-)$。**再令** $U_j^+ = \bigcup\{V_i : i \in I_j^+\}$, $U_j^- = \bigcup\{V_i : i \in I_j^-\}$, **和** $U_j = [H] \setminus (U_j^+ \cup U_j^-)$。**因为** U_j^- **是** $\{V_i : i \in I_j^-\}$ **中互不相交集合的并，所以** $\delta_H((x + U_j^-) \cap A) \leq (\alpha - 1/j)\delta_H(U_j^-)$。**由** (i) **可推出** $\mu_H(U_j^-) = 0$。**同理** $\delta_H(A \cap (x + U_j^+)) \geq (\alpha + 1/j)\delta_H(U_j^+)$。

Szemerédi 定理 –11

对所有 $x \in P'_j$ 令 $I_j^+ = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = 1\}$, $I_j^- = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = -1\}$ 和 $I_j = [m'] \setminus (I_j^+ \cup I_j^-)$。再令 $U_j^+ = \bigcup\{V_i : i \in I_j^+\}$, $U_j^- = \bigcup\{V_i : i \in I_j^-\}$, 和 $U_j = [H] \setminus (U_j^+ \cup U_j^-)$。因为 U_j^- 是 $\{V_i : i \in I_j^-\}$ 中互不相交集合的并，所以 $\delta_H((x + U_j^-) \cap A) \leq (\alpha - 1/j)\delta_H(U_j^-)$。由 (i) 可推出 $\mu_H(U_j^-) = 0$。同理 $\delta_H(A \cap (x + U_j^+)) \geq (\alpha + 1/j)\delta_H(U_j^+)$。因为 $\alpha \geq \mu_H(A \cap (x + U_j^+)) \geq (\alpha + 1/j)\mu_H(U_j^+)$，所以 $\mu_H(U_j^+) < 1$，进而推出 $\mu_H(U_j) > 0$。如果 $\mu_H(U_j^+) > 0$，则对每个 $x \in P'_j$ 都有 $\mu_H(A \cap (x + U_j)) < \alpha\mu_H(U_j)$，而这和 (i) 矛盾。所以我们有 $\mu_H(U_j^+) = 0$ 和 $\mu_H(U_j) = 1$。

Szemerédi 定理 –11

对所有 $x \in P'_j$ 令 $I_j^+ = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = 1\}$, $I_j^- = \{i \in [m'] : c^j(x)(i) = -1\}$ 和 $I_j = [m'] \setminus (I_j^+ \cup I_j^-)$。再令 $U_j^+ = \bigcup\{V_i : i \in I_j^+\}$, $U_j^- = \bigcup\{V_i : i \in I_j^-\}$, 和 $U_j = [H] \setminus (U_j^+ \cup U_j^-)$。因为 U_j^- 是 $\{V_i : i \in I_j^-\}$ 中互不相交集合的并，所以 $\delta_H((x + U_j^-) \cap A) \leq (\alpha - 1/j)\delta_H(U_j^-)$。由 (i) 可推出 $\mu_H(U_j^-) = 0$。同理 $\delta_H(A \cap (x + U_j^+)) \geq (\alpha + 1/j)\delta_H(U_j^+)$。因为 $\alpha \geq \mu_H(A \cap (x + U_j^+)) \geq (\alpha + 1/j)\mu_H(U_j^+)$，所以 $\mu_H(U_j^+) < 1$，进而推出 $\mu_H(U_j) > 0$。如果 $\mu_H(U_j^+) > 0$，则对每个 $x \in P'_j$ 都有 $\mu_H(A \cap (x + U_j)) < \alpha\mu_H(U_j)$，而这和 (i) 矛盾。所以我们有 $\mu_H(U_j^+) = 0$ 和 $\mu_H(U_j) = 1$。

由可数饱和性可找到 $J \gg\gg 1$ 使得 $|P'_J| \gg\gg 1$ 和 $\mu_H(U_J) = 1$。因为 $1/J \approx 0$，所以只需令 $P' = P'_J$, $I = I_J$, 和 $U = U_J$ 就使 (ii) 得证。

Szemerédi 定理 –12

(iii) 应用正则引理和转换原理可找到一正无穷小 ϵ，$[H]$ 的一个超有限分割 $[H] = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{m'}$，和对所有 $i \in [m']$ 和 $w \in W$ 有实数 $0 \leq c_{i,w} \leq 1$ 使得 $W(3^{m'}, m') \leq m$ 并且对每个集合 $F \subseteq [H]$ 存在集合 $T_F \subseteq W$ 满足 $|W \setminus T_F| \leq \epsilon |W|$ 使得对每个 $w \in T_F$ 有

Szemerédi 定理 –12

(iii) 应用正则引理和转换原理可找到一正无穷小 ϵ，$[H]$ 的一个超有限分割 $[H] = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{m'}$，和对所有 $i \in [m']$ 和 $w \in W$ 有实数 $0 \le c_{i,w} \le 1$ 使得 $W(3^{m'}, m') \le m$ 并且对每个集合 $F \subseteq [H]$ 存在集合 $T_F \subseteq W$ 满足 $|W \setminus T_F| \le \epsilon |W|$ 使得对每个 $w \in T_F$ 有

$$\left| |F \cap E_w| - \sum_{i=1}^{m'} c_{i,w} |F \cap V_i| \right| \le \epsilon H.$$

无穷小 ϵ 存在是因为如果 ϵ 标准正数，则 m' 一定在 $\mathbb{N}$ 中。所以当 ϵ 是相当大的无穷小时可保证 m' 是足够小的超整数。

Szemerédi 定理 –13

由以上不等式并令 $F := [H]$ **可得出对所有** $w \in T_{[H]}$.

$$\left| |E_w| - \sum_{i=1}^{m'} c_{i,w} |V_i| \right| \leq \epsilon H.$$

Szemerédi 定理 –13

由以上不等式并令 $F := [H]$ 可得出对所有 $w \in T_{[H]}$.

$$\left| |E_w| - \sum_{i=1}^{m'} c_{i,w} |V_i| \right| \leq \epsilon H.$$

应用 (ii) 能找到 $x \in P$, 一个正无穷小 ϵ_1, 和集合 $I \subseteq [m']$ 满足

Szemerédi 定理 –13

由以上不等式并令 $F := [H]$ 可得出对所有 $w \in T_{[H]}$.

$$\left| |E_w| - \sum_{i=1}^{m'} c_{i,w} |V_i| \right| \leq \epsilon H.$$

应用 (ii) 能找到 $x \in P$, 一个正无穷小 ϵ_1, 和集合 $I \subseteq [m']$ 满足

$I = \{i \in [m'] : |\delta_H((x + V_i) \cap A) - \alpha \delta_H(V_i)| < \epsilon_1 \delta_H(V_i)\}$,

Szemerédi 定理 –13

由以上不等式并令 $F := [H]$ 可得出对所有 $w \in T_{[H]}$.

$$\left| |E_w| - \sum_{i=1}^{m'} c_{i,w} |V_i| \right| \leq \epsilon H.$$

应用 (ii) 能找到 $x \in P$, 一个正无穷小 ϵ_1, 和集合 $I \subseteq [m']$ 满足

$I = \{i \in [m'] : |\delta_H((x + V_i) \cap A) - \alpha \delta_H(V_i)| < \epsilon_1 \delta_H(V_i)\}$,

$U = \bigcup \{V_i : i \in I\}$, 和 $\mu_H(U) = 1$。

Szemerédi 定理 –13

由以上不等式并令 $F := [H]$ 可得出对所有 $w \in T_{[H]}$.

$$\left| |E_w| - \sum_{i=1}^{m'} c_{i,w} |V_i| \right| \leq \epsilon H.$$

应用 (ii) 能找到 $x \in P$, 一个正无穷小 ϵ_1, 和集合 $I \subseteq [m']$ 满足

$I = \{i \in [m'] : |\delta_H((x + V_i) \cap A) - \alpha \delta_H(V_i)| < \epsilon_1 \delta_H(V_i)\}$,

$U = \bigcup \{V_i : i \in I\}$, 和 $\mu_H(U) = 1$。

令 $I' = [m'] \setminus I$ 和 $U' = [H] \setminus U$。对每个
$w \in T := T_{[H]} \cap T_{(A-x)\cap[H]}$ 有

Szemerédi 定理 –14

$$|\delta_H(A \cap (x + E_w)) - \alpha\delta_H(E_w)|$$

Szemerédi 定理 –14

$$
\begin{aligned}
&|\delta_H(A \cap (x + E_w)) - \alpha\delta_H(E_w)| \\
&\quad \leq \frac{1}{H}\left(\left||(A-x) \cap E_w| - \sum_{i\in[m']} c_{w,i}|(A-x) \cap V_i|\right|\right. \\
&\qquad + \left|\sum_{i\in[m']} c_{w,i}|A \cap (x+V_i)| - \sum_{i\in[m']} c_{w,i}\alpha|V_i|\right| \\
&\qquad \left. + \left|\alpha \sum_{i\in[m']} c_{w,i}|V_i| - \alpha \sum_{i\in[m']} |E_w|\right|\right)
\end{aligned}
$$

Szemerédi 定理 –14

$$
\begin{aligned}
&|\delta_H(A \cap (x + E_w)) - \alpha\delta_H(E_w)| \\
&\quad \leq \frac{1}{H}\left(\left||(A-x) \cap E_w| - \sum_{i\in[m']} c_{w,i}|(A-x) \cap V_i|\right|\right. \\
&\qquad + \left|\sum_{i\in[m']} c_{w,i}|A \cap (x+V_i)| - \sum_{i\in[m']} c_{w,i}\alpha|V_i|\right| \\
&\qquad \left. + \left|\alpha \sum_{i\in[m']} c_{w,i}|V_i| - \alpha \sum_{i\in[m']} |E_w|\right|\right) \\
&\quad \leq \epsilon + \frac{1}{H}\sum_{i\in I} c_{w,i}\epsilon_1|V_i| + 2\delta_H(U') + \alpha\epsilon
\end{aligned}
$$

Szemerédi 定理 –14

$$
\begin{aligned}
&|\delta_H(A \cap (x + E_w)) - \alpha\delta_H(E_w)| \\
&\quad \le \frac{1}{H}\left(\left||(A-x)\cap E_w| - \sum_{i\in[m']} c_{w,i}|(A-x)\cap V_i|\right|\right. \\
&\qquad + \left|\sum_{i\in[m']} c_{w,i}|A\cap(x+V_i)| - \sum_{i\in[m']} c_{w,i}\alpha|V_i|\right| \\
&\qquad \left. + \left|\alpha\sum_{i\in[m']} c_{w,i}|V_i| - \alpha\sum_{i\in[m']}|E_w|\right|\right) \\
&\quad \le \epsilon + \frac{1}{H}\sum_{i\in I} c_{w,i}\epsilon_1|V_i| + 2\delta_H(U') + \alpha\epsilon \\
&\quad \le \epsilon + \epsilon_1\delta_H(U) + 2\delta_H(U') + \alpha\epsilon \approx 0.
\end{aligned}
$$

Szemerédi 定理 –15

因此对所有 $w \in T$ 可得出

$$\mu_H(A \cap (x + E_w)) = \alpha \mu_H(E_w).$$

Szemerédi 定理 –15

因此对所有 $w \in T$ 可得出

$$\mu_H(A \cap (x + E_w)) = \alpha \mu_H(E_w).$$

这里 $\mu_{|W|}(T) = 1$ 是因为 $\epsilon \approx 0$ 和
$\mu_{|W|}(T_{[H]}) = \mu_{|W|}(T_{[H] \cap (A-x)}) = 1$。 □

Szemerédi 定理 –15

因此对所有 $w \in T$ 可得出

$$\mu_H(A \cap (x + E_w)) = \alpha \mu_H(E_w).$$

这里 $\mu_{|W|}(T) = 1$ 是因为 $\epsilon \approx 0$ 和
$\mu_{|W|}(T_{[H]}) = \mu_{|W|}(T_{[H] \cap (A-x)}) = 1$。 □

引理 (5.18)

设 $N \ggg 1$，$A \subseteq [N]$ 满足 $\mu_N(A) = SD(A) = \alpha > 0$，和 $H = \lfloor N/8 \rfloor$。存在一个整数区间 $x_0 + [H] \subseteq [N]$，集合 $T \subseteq x_0 + [H]$ 满足 $\mu_H(T) = 1$，和

$$\mathcal{P}_t := \{p \subseteq [N] : p \text{ 是 } 4\text{–a.p.}, p(1), p(2) \in A, \text{ 并 } p(4) = t\}$$

使得对每个 $t \in T$ 有 $\mu_H(\mathcal{P}_t) = \alpha^2/3$。

Szemerédi 定理 –16

证明：令 $S := [N - H] \cup \{0\}$。**注意我们有**
$\{0\} \cup (H + [H]) \cup (2H + 2[H]) \cup (3H + 3[H]) \subseteq S$。

Szemerédi 定理 –16

证明：令 $S := [N-H] \cup \{0\}$。注意我们有
$\{0\} \cup (H + [H]) \cup (2H + 2[H]) \cup (3H + 3[H]) \subseteq S$。
　对每个 $w \in [H]$ 令

$$\mathcal{Q}_w := \{q \subseteq [H] : q \text{ 是 4-a.p., } q(1) \in A, \text{ and } q(4) = w\}$$

且 $E_w = \{q(2) : q \in \mathcal{Q}_w\}$.

Szemerédi 定理 –16

证明：令 $S := [N - H] \cup \{0\}$。注意我们有
$\{0\} \cup (H + [H]) \cup (2H + 2[H]) \cup (3H + 3[H]) \subseteq S$。
对每个 $w \in [H]$ 令

$$\mathcal{Q}_w := \{q \subseteq [H] : q \text{ 是 4-a.p., } q(1) \in A, \text{ and } q(4) = w\}$$

$$\text{且 } E_w = \{q(2) : q \in \mathcal{Q}_w\}.$$

显然 $\mu_H(E_w) = \alpha/3$。这是因为 $|q(4) - q(1)|$ 必须是 3 的倍数。
由引理 5.17 第三部分，存在 $l \in [H]$ 和 $W \subseteq [H]$ 满足
$\mu_H(W) = 1$ 使得对每个 $w \in W$ 有

$$\mu_H(A \cap (H + l + E_w)) = \alpha\mu_H(E_w) = \alpha^2/3.$$

Szemerédi 定理 –17

令 $x_0 := 3H + 3I$ **和** $T := 3H + 3I + W \subseteq x_0 + [H]$。

Szemerédi 定理 –17

令 $x_0 := 3H + 3I$ 和 $T := 3H + 3I + W \subseteq x_0 + [H]$。
令 $p_0 := \{0, H + I, 2H + 2I, 3H + 3I\}$。

Szemerédi 定理 –17

令 $x_0 := 3H + 3I$ 和 $T := 3H + 3I + W \subseteq x_0 + [H]$。
令 $p_0 := \{0, H + I, 2H + 2I, 3H + 3I\}$。
对每个 $t = 3H + 3I + w \in T$, 令

$$\mathcal{P}_t := \{p_0 \oplus q : q \in \mathcal{Q}_w \text{ 和 } H + I + q(2) \in (H + I + E_w) \cap A\}.$$

Szemerédi 定理 –17

令 $x_0 := 3H + 3I$ 和 $T := 3H + 3I + W \subseteq x_0 + [H]$。
令 $p_0 := \{0, H + I, 2H + 2I, 3H + 3I\}$。
对每个 $t = 3H + 3I + w \in T$, 令

$$\mathcal{P}_t := \{p_0 \oplus q : q \in \mathcal{Q}_w \text{ 和 } H + I + q(2) \in (H + I + E_w) \cap A\}.$$

则有 $\mu_H(\mathcal{P}_t) = \mu_H((H + I + E_w) \cap A) = \alpha^2/3$ 并由 $\mathcal{Q}_w$ 的定义,
对每个 $p_0 \oplus q \in \mathcal{P}_t$ 我们有

Szemerédi 定理 –17

令 $x_0 := 3H + 3I$ 和 $T := 3H + 3I + W \subseteq x_0 + [H]$。
令 $p_0 := \{0, H + I, 2H + 2I, 3H + 3I\}$。
对每个 $t = 3H + 3I + w \in T$，令

$$\mathcal{P}_t := \{p_0 \oplus q : q \in \mathcal{Q}_w \text{ 和 } H + I + q(2) \in (H + I + E_w) \cap A\}.$$

则有 $\mu_H(\mathcal{P}_t) = \mu_H((H + I + E_w) \cap A) = \alpha^2/3$ 并由 $\mathcal{Q}_w$ 的定义，
对每个 $p_0 \oplus q \in \mathcal{P}_t$ 我们有 $p_0(4) + q(4) = 3H + 3I + w = t$，
$p_0(2) + q(2) = H + I + q(2) \in (H + I + E_w) \cap A \subseteq A$，和
$p_0(1) + q(1) = q(1) \in [H] \cap A$。 □

Szemerédi 定理 –18

引理 (5.19)

设 $N \ggg 1$，$B, S_\gamma \subseteq [N]$ **满足** $B \subseteq S_\gamma$，
$\mu_N(S_\gamma) = SD(S_\gamma) = \gamma > 11/12$，**和** $\mu_N(B) = SD_{S_\gamma,\gamma}(B) = \beta > 0$。

Szemerédi 定理 –18

引理 (5.19)

设 $N \ggg 1$，$B, S_\gamma \subseteq [N]$ 满足 $B \subseteq S_\gamma$，$\mu_N(S_\gamma) = SD(S_\gamma) = \gamma > 11/12$，和 $\mu_N(B) = SD_{S_\gamma,\gamma}(B) = \beta > 0$。存在整数区间 $x_0 + [\lfloor N/24 \rfloor] \subseteq [N]$ 和集合 $T \subseteq x_0 + [\lfloor N/24 \rfloor]$ 满足 $\mu_{N/24}(T) \geq 1 - 12(1-\gamma)$，和一个包含 4-a.p. 的集合 $\{p_t : t \in T\}$ 使得对每个 $t \in T$ 都有 $p_t(1), p_t(2) \in B$，$p_t(3), p_t(4) \in S_\gamma$，和 $p_t(3) = t$。

Szemerédi 定理 –18

引理 (5.19)

设 $N \ggg 1$，$B, S_\gamma \subseteq [N]$ 满足 $B \subseteq S_\gamma$，$\mu_N(S_\gamma) = SD(S_\gamma) = \gamma > 11/12$，和 $\mu_N(B) = SD_{S_\gamma,\gamma}(B) = \beta > 0$。存在整数区间 $x_0 + [\lfloor N/24 \rfloor] \subseteq [N]$ 和集合 $T \subseteq x_0 + [\lfloor N/24 \rfloor]$ 满足 $\mu_{N/24}(T) \geq 1 - 12(1-\gamma)$，和一个包含 4-a.p. 的集合 $\{p_t : t \in T\}$ 使得对每个 $t \in T$ 都有 $p_t(1), p_t(2) \in B$，$p_t(3), p_t(4) \in S_\gamma$，和 $p_t(3) = t$。

证明：令 $H := [N/8]$。注意，对每个 $x \in [N-H] \cup \{0\}$，都有 $\mu_H(S_\gamma \cap (x + [H])) = \gamma$ 和 $\mu_H(B \cap (x + [H])) = \beta$。记 $\mathcal{Q}$ 为 $[H]$ 中所有 4-a.p. 的集合。

Szemerédi 定理 –18

引理 (5.19)

设 $N \ggg 1$，$B, S_\gamma \subseteq [N]$ 满足 $B \subseteq S_\gamma$，$\mu_N(S_\gamma) = SD(S_\gamma) = \gamma > 11/12$，和 $\mu_N(B) = SD_{S_\gamma,\gamma}(B) = \beta > 0$。存在整数区间 $x_0 + [\lfloor N/24 \rfloor] \subseteq [N]$ 和集合 $T \subseteq x_0 + [\lfloor N/24 \rfloor]$ 满足 $\mu_{N/24}(T) \geq 1 - 12(1-\gamma)$，和一个包含 4-a.p. 的集合 $\{p_t : t \in T\}$ 使得对每个 $t \in T$ 都有 $p_t(1), p_t(2) \in B$，$p_t(3), p_t(4) \in S_\gamma$，和 $p_t(3) = t$。

证明：令 $H := [N/8]$。注意，对每个 $x \in [N-H] \cup \{0\}$，都有 $\mu_H(S_\gamma \cap (x + [H])) = \gamma$ 和 $\mu_H(B \cap (x + [H])) = \beta$。记 $\mathcal{Q}$ 为 $[H]$ 中所有 4-a.p. 的集合。对每个 $w \in [\lfloor H/3 \rfloor, \lfloor 2H/3 \rfloor]$ 记

$$\mathcal{Q}_w^3 := \{q \in \mathcal{Q} : q(1) \in B \text{ 和 } q(3) = w\}$$

且

$$E_w^3 := \{q(2) : q \in \mathcal{Q}_w^3\}.$$

Szemerédi 定理 –19

则我们有 $\mu_H(E_w^3) = \beta/2$。

Szemerédi 定理 –19

则我们有 $\mu_H(E^3_w) = \beta/2$。对每个 $w' \in [H]$ 和 $i = 3, 4$，记

$$\mathcal{R}^i_{w'} := \{q \in \mathcal{Q} : q(1) \in B \text{ 和 } q(i) = w'\}$$

$$\text{且 } F^i_{w'} := \{q(2) : q \in \mathcal{R}^i_{w'}\}.$$

显然 $\mu_H(F^i_{w'}) \leq \beta$。

Szemerédi 定理 –19

则我们有 $\mu_H(E_w^3) = \beta/2$。对每个 $w' \in [H]$ 和 $i = 3, 4$，记

$$\mathcal{R}_{w'}^i := \{q \in \mathcal{Q} : q(1) \in B \text{ 和 } q(i) = w'\}$$

$$\text{且 } F_{w'}^i := \{q(2) : q \in \mathcal{R}_{w'}^i\}.$$

显然 $\mu_H(F_{w'}^i) \leq \beta$。

由引理 5.17 第三部分，存在 $l \in [H]$，$W_3 \subseteq [\lfloor H/3 \rfloor, \lfloor 2H/3 \rfloor]$ 满足 $\mu_H(W_3) = 1/3$，和 $W^i \subseteq [H]$ 满足 $\mu_H(W^i) = 1$ 使得对所有 $w \in W_3$ 和 $w' \in W^3$ 或 $w' \in W^4$ 都有

$$\mu_H(B \cap (H + l + E_w^3)) = \frac{\beta^2}{2} \text{ 和 } \mu_H(B \cap (H + l + F_{w'}^i)) \leq \beta^2.$$

Szemerédi 定理 –19

则我们有 $\mu_H(E_w^3) = \beta/2$。对每个 $w' \in [H]$ 和 $i = 3, 4$，记

$$\mathcal{R}_{w'}^i := \{q \in \mathcal{Q} : q(1) \in B \text{ 和 } q(i) = w'\}$$

$$\text{且 } F_{w'}^i := \{q(2) : q \in \mathcal{R}_{w'}^i\}.$$

显然 $\mu_H(F_{w'}^i) \le \beta$。

由引理 5.17 第三部分，存在 $I \in [H]$，$W_3 \subseteq [\lfloor H/3 \rfloor, \lfloor 2H/3 \rfloor]$ 满足 $\mu_H(W_3) = 1/3$，和 $W^i \subseteq [H]$ 满足 $\mu_H(W^i) = 1$ 使得对所有 $w \in W_3$ 和 $w' \in W^3$ 或 $w' \in W^4$ 都有

$$\mu_H(B \cap (H + I + E_w^3)) = \frac{\beta^2}{2} \text{ 和 } \mu_H(B \cap (H + I + F_{w'}^i)) \le \beta^2.$$

显然对 $i = 3$ 或 4 我们有 $\mu_H(((i-1)H + (i-1)I + W^i) \cap S_\gamma) = \gamma$。

Szemerédi 定理 –20

记 $T^3 := 2H + 2I + W_3$。对每个 $t = 2H + 2I + w \in T^3$ 记

$$\mathcal{P}_t := \{p \subseteq [N] : p \text{ 是 } 4 - a.p., \\ p(1) \in B \cap [H], p(2) \in B \cap (H + I + E^3_w), p(3) = t\}$$

$$和 \mathcal{P} := \bigcup_{i \in T^3} \mathcal{P}_t.$$

Szemerédi 定理 –20

记 $T^3 := 2H + 2I + W_3$。对每个 $t = 2H + 2I + w \in T^3$ 记

$$\mathcal{P}_t := \{p \subseteq [N] : p \text{ 是 } 4 - a.p., \\ p(1) \in B \cap [H], p(2) \in B \cap (H + I + E_w^3), p(3) = t\}$$

$$和 \mathcal{P} := \bigcup_{i \in T^3} \mathcal{P}_t.$$

注意，对每个 $t = 2H + 2I + w \in T^3$ 都有
$\mu_H(\mathcal{P}_t) = \mu_H(B \cap (2H + 2I + E_w^3)) = \beta^2/2$。

Szemerédi 定理 –20

记 $T^3 := 2H + 2I + W_3$。对每个 $t = 2H + 2I + w \in T^3$ 记

$$\mathcal{P}_t := \{p \subseteq [N] : p \text{ 是 } 4-a.p.,\ p(1) \in B \cap [H], p(2) \in B \cap (H + I + E^3_w), p(3) = t\}$$

$$\text{和 } \mathcal{P} := \bigcup_{i \in T^3} \mathcal{P}_t.$$

注意，对每个 $t = 2H + 2I + w \in T^3$ 都有
$\mu_H(\mathcal{P}_t) = \mu_H(B \cap (2H + 2I + E^3_w)) = \beta^2/2$。

称一个 4-a.p. $p \in \mathcal{P}$ 为**理想的**如果对 $i = 3, 4$ 有
$p(i) \in S_\gamma \cap ((i-1)H + (i-1)I + [H])$。令 $\mathcal{P}_g$ 为包含 $\mathcal{P}$ 中所有理想 4–a.p. 的集合。称一个 4-a.p. $p \in \mathcal{P}$ 是**不理想的**如果其不是理想的。令 $\mathcal{P}_b := \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_g$。令 $T^3_g := \{p(3) : p \in \mathcal{P}_g\}$。则 $T^3_g \subseteq S_\gamma$。我们现在证 $\mu_H(T^3_g) \geq \frac{1}{3} - 4(1-\gamma)$。

Szemerédi 定理 –21

因为

$$\mathcal{P}_b \subseteq \bigcup_{i=3,4} \{p \in \mathcal{P} : p(1) \in B \cap [H], p(2) \in B \cap (h+I+[H]), p(i) \notin S_\gamma\},$$

Szemerédi 定理 –21

因为

$$\mathcal{P}_b \subseteq \bigcup_{i=3,4} \{p \in \mathcal{P} : p(1) \in B \cap [H], p(2) \in B \cap (h+I+[H]), p(i) \notin S_\gamma\},$$

所以 $|\mathcal{P}_b| \leq \sum_{i=3}^{4} \sum_{w' \in [H] \setminus (S_\gamma - (i-1)H - (i-1)I)} |F^i_{w'}|$

$$\leq \sum_{i=3}^{4} \left(\sum_{w' \in [H] \setminus W^i} |F^i_{w'}| + \sum_{w' \in W^i \setminus (S_\gamma - (i-1)H - (i-1)I)} |F^i_{w'}| \right).$$

Szemerédi 定理 –21

因为

$$\mathcal{P}_b \subseteq \bigcup_{i=3,4} \{p \in \mathcal{P} : p(1) \in B \cap [H], p(2) \in B \cap (h+l+[H]), p(i) \notin S_\gamma\},$$

所以 $|\mathcal{P}_b| \leq \sum_{i=3}^{4} \sum_{w' \in [H] \setminus (S_\gamma - (i-1)H - (i-1)l)} |F^i_{w'}|$

$$\leq \sum_{i=3}^{4} \left(\sum_{w' \in [H] \setminus W^i} |F^i_{w'}| + \sum_{w' \in W^i \setminus (S_\gamma - (i-1)H - (i-1)l)} |F^i_{w'}| \right).$$

因此 $|\mathcal{P}_g| = |\mathcal{P}| - |\mathcal{P}_b| \geq \sum_{t \in T^3} |\mathcal{P}_t|$

$$- \sum_{i=3}^{4} \left(\sum_{w' \in [H] \setminus W^i} |F^i_{w'}| + \sum_{w' \in W^i \setminus (S_\gamma - (i-1)H - (i-1)l)} |F^i_{w'}| \right).$$

Szemerédi 定理 –22

现在可推出

$$\mu_H(T_g^3)\cdot\frac{\beta^2}{2}=st\left(\frac{1}{H}\sum_{t\in T_g^3}\frac{1}{H}|\mathcal{P}_t|\right)$$

$$\geq st\left(\frac{1}{H^2}|\mathcal{P}_g|\right)=st\left(\frac{1}{H^2}(|\mathcal{P}|-|\mathcal{P}_b|)\right)\geq st\left(\frac{1}{H^2}\sum_{t\in T^3}|\mathcal{P}_t|\right)$$

$$-st\left(\frac{1}{H^2}\sum_{i=3}^{4}\left(\sum_{w'\in[H]\setminus W^i}|F^i_{w'}|+\sum_{w'\in W^i\setminus(S_\gamma-(i-1)H-(i-1)l)}|F^i_{w'}|\right)\right)$$

$$\geq\mu_H(T^3)\cdot\frac{\beta^2}{2}-2(1-\gamma)\cdot\beta^2=\left(\frac{1}{3}-4(1-\gamma)\right)\cdot\frac{\beta^2}{2}.$$

从而

$$\mu_H(T_g^3) \geq \frac{1}{3} - 4(1-\gamma).$$

从而

$$\mu_H(T_g^3) \geq \frac{1}{3} - 4(1-\gamma).$$

所以我们有 $\mu_{N/24}(T_g^3) = 1 - 12(1-\gamma)$。这是因为 $H = \lfloor N/8 \rfloor$。如果令 $x_0 := 2H + 2l + \lfloor H/3 \rfloor - 1$，$T := T_g^3$，并对每个 $t \in T$ 取定一个 $p_t \in \mathcal{P}_g$ 使得 $P_t(3) = t$，则引理得证。 □

从而

$$\mu_H(T_g^3) \geq \frac{1}{3} - 4(1-\gamma).$$

所以我们有 $\mu_{N/24}(T_g^3) = 1 - 12(1-\gamma)$。这是因为 $H = \lfloor N/8 \rfloor$。如果令 $x_0 := 2H + 2l + \lfloor H/3 \rfloor - 1$，$T := T_g^3$，并对每个 $t \in T$ 取定一个 $p_t \in \mathcal{P}_g$ 使得 $P_t(3) = t$，则引理得证。 □

备注 (5.20)

以上证明 $\mu_{N/24}(T_g^3) > 1 - 12(1-\gamma)$ 的思想来源于 *Tao* 的文章。

定理 (5.21 Szemerédi)

如果 $U \subseteq \mathbb{N}$ 且 $SD(U) > 0$，则 U 包含了非平凡长度为 4 的等差数列。

Szemerédi 定理 –24

定理 (5.21 Szemerédi)

如果 $U \subseteq \mathbb{N}$ 且 $SD(U) > 0$，则 U 包含了非平凡长度为 4 的等差数列。

证明：设 $N \ggg 1$ 且 $A \subseteq [N]$ 使得 $\mu_N(A) = SD(A) = \alpha > 0$。我们只需在 A 中找到一个 4-a.p.。对每个 $n, j \in \mathbb{N}$ 令

$$S_{j,n} := \{x \in [N-n] : \mu_n((x+[n]) \cap A) \geq \alpha - 1/j\}.$$

Szemerédi 定理 –24

定理 (5.21 Szemerédi)

如果 $U \subseteq \mathbb{N}$ 且 $SD(U) > 0$，则 U 包含了非平凡长度为 4 的等差数列。

证明：设 $N \ggg 1$ 且 $A \subseteq [N]$ 使得 $\mu_N(A) = SD(A) = \alpha > 0$。我们只需在 A 中找到一个 4-a.p.。对每个 $n, j \in \mathbb{N}$ 令

$$S_{j,n} := \{x \in [N-n] : \mu_n((x+[n]) \cap A) \geq \alpha - 1/j\}.$$

则有 $\lim_{n\to\infty} \mu_{N-n}(S_{j,n}) = 1$。所以只要 $n \in \mathbb{N}$ 足够大，我们可假设 $\gamma_{j,n} := SD(S_{j,n}) > 11/12$。设 $R_{j,n}$ 是 $[N]$ 中差为 d 的一个超有限长度的 a.p. 使得 $\mu_{|R_{j,n}|}(R_{j,n} \cap S_{j,n}) = \gamma_{j,n}$。对每个 $\tau \subseteq [n]$ 记

$$B_\tau := \{x \in [R_{j,n}] : A \cap (x+[n]) = x+\tau\}.$$

Szemerédi 定理 –25

则因为 n 有限，存在 $\tau_{j,n}$ 使得 $\mu_{|R_{j,n}|}(B_{\tau_{j,n}}) = \beta_{j,n} > 0$。记 $B_{j,n} := B_{\tau_{j,n}}$。取定一差为 d 长度为超整数 N' 的 a.p. $P_{j,n} \subseteq R_{j,n}$ 使得 $\mu_{N'}(P_{j,n} \cap S_{j,n}) = \gamma_{j,n}$ 和 $\mu_{N'}(P_{j,n} \cap B_{j,n}) = \beta_{j,n}$。设 $\varphi : P_{j,n} \to [N']$ 为仿射映照，即 $\varphi(x) = (x - \min P_{j,n})/d + 1$。

Szemerédi 定理 –25

则因为 n 有限，存在 $\tau_{j,n}$ 使得 $\mu_{|R_{j,n}|}(B_{\tau_{j,n}}) = \beta_{j,n} > 0$。记 $B_{j,n} := B_{\tau_{j,n}}$。取定一差为 d 长度为超整数 N' 的 a.p. $P_{j,n} \subseteq R_{j,n}$ 使得 $\mu_{N'}(P_{j,n} \cap S_{j,n}) = \gamma_{j,n}$ 和 $\mu_{N'}(P_{j,n} \cap B_{j,n}) = \beta_{j,n}$。设 $\varphi : P_{j,n} \to [N']$ 为仿射映照，即 $\varphi(x) = (x - \min P_{j,n})/d + 1$。

应用引理 5.19 并考虑 $[N']$ 和 $S' = \varphi((S_{j,n}) \cap P_{j,n})$ 代替 $[N]$ 和 S，然后再由 φ^{-1} 拉回来，我们获得 $x_0 + d[\lfloor |P_{j,n}|/24 \rfloor] \subseteq P_{j,n}$ 和 $T_{j,n} \subseteq x_0 + d[\lfloor |P_{j,n}|/24 \rfloor]$ 满足 $\mu_{N'/24}(T_{j,n}) \geq 1 - 12(1 - \gamma_{j,n})$，并且找到包含 4-a.p. 的集合 $\mathcal{P}_{j,n} = \{p_t : t \in T_{j,n}\}$ 使得对每个 $t \in T_{j,n}$ 有 $p_t(1), p_t(2) \in B_{j,n} \cap P_{j,n}$，$p_t(3), p_t(4) \in S_{j,n} \cap P_{j,n}$，和 $p_t(3) = t$。

Szemerédi 定理 –25

则因为 n 有限，存在 $\tau_{j,n}$ 使得 $\mu_{|R_{j,n}|}(B_{\tau_{j,n}}) = \beta_{j,n} > 0$。记 $B_{j,n} := B_{\tau_{j,n}}$。取定一差为 d 长度为超整数 N' 的 a.p. $P_{j,n} \subseteq R_{j,n}$ 使得 $\mu_{N'}(P_{j,n} \cap S_{j,n}) = \gamma_{j,n}$ 和 $\mu_{N'}(P_{j,n} \cap B_{j,n}) = \beta_{j,n}$。设 $\varphi : P_{j,n} \to [N']$ 为仿射映照，即 $\varphi(x) = (x - \min P_{j,n})/d + 1$。

应用引理 5.19 并考虑 $[N']$ 和 $S' = \varphi((S_{j,n}) \cap P_{j,n})$ 代替 $[N]$ 和 S，然后再由 φ^{-1} 拉回来，我们获得 $x_0 + d[\lfloor |P_{j,n}|/24 \rfloor] \subseteq P_{j,n}$ 和 $T_{j,n} \subseteq x_0 + d[\lfloor |P_{j,n}|/24 \rfloor]$ 满足 $\mu_{N'/24}(T_{j,n}) \geq 1 - 12(1 - \gamma_{j,n})$，并且找到包含 4-a.p. 的集合 $\mathcal{P}_{j,n} = \{p_t : t \in T_{j,n}\}$ 使得对每个 $t \in T_{j,n}$ 有 $p_t(1), p_t(2) \in B_{j,n} \cap P_{j,n}$，$p_t(3), p_t(4) \in S_{j,n} \cap P_{j,n}$，和 $p_t(3) = t$。

由可数饱和性我们可得到 $H \gg\gg 1$ 和 $J \gg\gg 1$ 使得 $\gamma := \gamma_{J,H} \approx 1$，$P := P_{J,H}$ 满足 $|P| \gg\gg 1$，$S := S_\gamma$，$B := B_{J,H} \subseteq S$，$T := T_{J,H}$，且 $\mathcal{P}_{J,H} = \{p_t : t \in T\}$ 使得对每个 $t \in T$ 都有 $p_t(1), P_t(2) \in B$，$p_t(3), p_t(4) \in S$，和 $p_t(3) = t$。

Szemerédi 定理 –26

注意，我们现在有 $\mu_{N-H}(S) = 1$，$T \subseteq x_0 + d[\lfloor |P|/24 \rfloor]$，$\mu_{|P|/24}(T) = 1$，$\gamma \approx 1$，$x, y \in B$ 推出 $((x + [n]) \cap A) - x = ((y + [H]) \cap A) - y$，并且 $x \in S$ 推出 $\mu_H((x + [H]) \cap A) = \alpha$。虽然现在可能 $\mu_{|P|}(B) = 0$，但是 $\mathcal{P}_{J,H} = \{p_x : x \in T\}$ 的存在性是由可数饱和性保证的。

Szemerédi 定理 –26

注意，我们现在有 $\mu_{N-H}(S) = 1$，$T \subseteq x_0 + d[\lfloor |P|/24 \rfloor]$，$\mu_{|P|/24}(T) = 1$，$\gamma \approx 1$，$x, y \in B$ 推出 $((x + [n]) \cap A) - x = ((y + [H]) \cap A) - y$，并且 $x \in S$ 推出 $\mu_H((x + [H]) \cap A) = \alpha$。虽然现在可能 $\mu_{|P|}(B) = 0$，但是 $\mathcal{P}_{J,H} = \{p_x : x \in T\}$ 的存在性是由可数饱和性保证的。

因为 $\mu_{N/24}(T) = 1$，我们可找到差为 d 有超有限长度的 a.p. $P' \subseteq T$。记 $\mathcal{P}' := \{p_t \in \mathcal{P}_{J,H} : t \in P'\}$。

Szemerédi 定理 –26

注意，我们现在有 $\mu_{N-H}(S) = 1$，$T \subseteq x_0 + d[\lfloor |P|/24 \rfloor]$，$\mu_{|P|/24}(T) = 1$，$\gamma \approx 1$，$x, y \in B$ 推出 $((x + [n]) \cap A) - x = ((y + [H]) \cap A) - y$，并且 $x \in S$ 推出 $\mu_H((x + [H]) \cap A) = \alpha$。虽然现在可能 $\mu_{|P|}(B) = 0$，但是 $\mathcal{P}_{J,H} = \{p_x : x \in T\}$ 的存在性是由可数饱和性保证的。

因为 $\mu_{N/24}(T) = 1$，我们可找到差为 d 有超有限长度的 a.p. $P' \subseteq T$。记 $\mathcal{P}' := \{p_t \in \mathcal{P}_{J,H} : t \in P'\}$。

现在对每个 $p_t \in \mathcal{P}'$ 我们有 $p_t(1), p_t(2) \in B$，$p_t(3) = t \in S$，和 $p_t(4) \in S$。

Szemerédi 定理 –26

注意，我们现在有 $\mu_{N-H}(S)=1$，$T\subseteq x_0+d[\lfloor|P|/24\rfloor]$，$\mu_{|P|/24}(T)=1$，$\gamma\approx 1$，$x,y\in B$ 推出 $((x+[n])\cap A)-x=((y+[H])\cap A)-y$，并且 $x\in S$ 推出 $\mu_H((x+[H])\cap A)=\alpha$。虽然现在可能 $\mu_{|P|}(B)=0$，但是 $\mathcal{P}_{J,H}=\{p_x:x\in T\}$ 的存在性是由可数饱和性保证的。

因为 $\mu_{N/24}(T)=1$，我们可找到差为 d 有超有限长度的 a.p. $P'\subseteq T$。记 $\mathcal{P}':=\{p_t\in\mathcal{P}_{J,H}:t\in P'\}$。

现在对每个 $p_t\in\mathcal{P}'$ 我们有 $p_t(1),p_t(2)\in B$，$p_t(3)=t\in S$，和 $p_t(4)\in S$。

对一个(或所有) $x\in B$ 记 $\tau_0:=((x+[H])\cap A)-x$。则有 $\mu_H(\tau_0)=\alpha$。这是因为 $B\subseteq S$。由引理 5.18 并用 H 代替 N，用 τ_0 代替 A，我们可找到 $x_0+[\lfloor H/8\rfloor]\subseteq[H]$，$T_Q\subseteq x_0+[\lfloor H/8\rfloor]$ 满足 $\mu_H(T_Q)=1/8$，且对每个 $w\in T_Q$，

$$\mathcal{Q}_w:=\{q\subseteq[H]:q(1),q(2)\in\tau_0,\ \text{并}\ p(4)=w\},$$

和 $E_w=\{q(3):q\in\mathcal{Q}_w\}$ 使得 $\mu_H(E_w)=\alpha^2/24$。

Szemerédi 定理 –27

由引理 5.17 第三部分可找到 $x' \in P'$ 和 $T'_Q \subseteq T_Q$ 满足 $\mu_H(T'_Q) = 1/8$ 使得对每个 $w \in T'_Q$，有 $\mu_H((x' + E_w) \cap A) = \alpha\mu_H(E_w) = \alpha^3/24$。

Szemerédi 定理 –27

由引理 5.17 第三部分可找到 $x' \in P'$ 和 $T'_Q \subseteq T_Q$ 满足 $\mu_H(T'_Q) = 1/8$ 使得对每个 $w \in T'_Q$，有 $\mu_H((x' + E_w) \cap A) = \alpha\mu_H(E_w) = \alpha^3/24$。

取定 $p_{x'} \in \mathcal{P}'$。因为 $p_{x'}(4) \in S$，我们有 $\mu_H((p_{x'}(4) + T'_Q) \cap A) = \alpha/8$。所以存在 $w \in T'_Q$ 使得 $p_{x'}(4) + w \in A$。

Szemerédi 定理 –27

由引理 5.17 第三部分可找到 $x' \in P'$ 和 $T'_Q \subseteq T_Q$ 满足 $\mu_H(T'_Q) = 1/8$ 使得对每个 $w \in T'_Q$，有 $\mu_H((x' + E_w) \cap A) = \alpha\mu_H(E_w) = \alpha^3/24$。

取定 $p_{x'} \in \mathcal{P}'$。因为 $p_{x'}(4) \in S$，我们有 $\mu_H((p_{x'}(4) + T'_Q) \cap A) = \alpha/8$。所以存在 $w \in T'_Q$ 使得 $p_{x'}(4) + w \in A$。

取 $q_w \in \mathcal{Q}_w$。则有 $p_{x'}(4) + q_w(4) = p_{x'}(4) + w \in A$。注意，我们有 $p_{x'}(3) + q_w(3) \in (x + E_w) \cap A \subseteq A$。还注意，$p_{x'}(1), p_{x'}(2) \in B$ 推出对 $i = 1, 2$ 有 $A \cap (p_{x'}(i) + [\lfloor H/8 \rfloor]) = p_{x'}(i) + \tau_0$。所以对 $i = 1, 2$ 有 $p_{x'}(i) + q_w(i) \in p_{x'}(i) + \tau_0 \subseteq A$。因此我们得到了 A 中的 4-a.p.

$$\{p_{x'}(i) + q_w(i) : i = 1, 2, 3, 4\}. \qquad \square$$

Szemerédi 定理 –27

由引理 5.17 第三部分可找到 $x' \in P'$ 和 $T'_Q \subseteq T_Q$ 满足 $\mu_H(T'_Q) = 1/8$ 使得对每个 $w \in T'_Q$，有 $\mu_H((x' + E_w) \cap A) = \alpha\mu_H(E_w) = \alpha^3/24$。

取定 $p_{x'} \in \mathcal{P}'$。因为 $p_{x'}(4) \in S$，我们有 $\mu_H((p_{x'}(4) + T'_Q) \cap A) = \alpha/8$。所以存在 $w \in T'_Q$ 使得 $p_{x'}(4) + w \in A$。

取 $q_w \in \mathcal{Q}_w$。则有 $p_{x'}(4) + q_w(4) = p_{x'}(4) + w \in A$。注意，我们有 $p_{x'}(3) + q_w(3) \in (x + E_w) \cap A \subseteq A$。还注意，$p_{x'}(1), p_{x'}(2) \in B$ 推出对 $i = 1, 2$ 有 $A \cap (p_{x'}(i) + [\lfloor H/8 \rfloor]) = p_{x'}(i) + \tau_0$。所以对 $i = 1, 2$ 有 $p_{x'}(i) + q_w(i) \in p_{x'}(i) + \tau_0 \subseteq A$。因此我们得到了 A 中的 4-a.p.

$$\{p_{x'}(i) + q_w(i) : i = 1, 2, 3, 4\}. \qquad \square$$

我们不知道以上的思路是否可用来做一个整个 Szemerédi 定理的直接归纳证明，而不是用 Tao 文中的归纳法。

感谢各位捧场

感谢复旦哲学院暑期学校组织委员会