弗雷格论数学定义

杨睿之

复旦大学哲学学院

2015 年数学哲学学术讨论会

暨第二届现象学与数学哲学研讨会

数学定义是干啥的？

数学定义定义了啥？

主要有这么几种说法

- 规定性定义 (stipulative definition)
- 阐释性定义 (explicative definition)
- 描述性定义 (descriptive definition)

弗雷格怎么说

Frege, G., 1914, Logic in Mathematics, in *Posthumous Writings*, edited by H. Hermes, F. Kambartel, and F. Kaulbach, Chicago: University of Chicago Press (1979), p. 203–250.

弗雷格怎么说

规定性定义

在构造系统时，同一符号组……会一次又一次地出现。这给了我们一个理由来引入一个新的符号，规定这个新的符号总是出现在原来那个符号组的位置，以代替该符号组……现在，一个简单符号就这样被引入以代替那个符号组，这样一个规定就是一个定义

弗雷格怎么说

规定性定义

在构造系统时，同一符号组……会一次又一次地出现。这给了我们一个理由来引入一个新的符号，规定这个新的符号总是出现在原来那个符号组的位置，以代替该符号组……现在，一个简单符号就这样被引入以代替那个符号组，这样一个规定就是一个定义

弗雷格怎么说

分析性定义

我们有一个简单符号，它已经被长期使用。我们相信我们可以对它的涵义进行逻辑分析，得到一个具有同样涵义的复杂表达式。我们只允许那些我们可以识别其涵义的东西作为那条复杂表达式的组成部分……复杂表达式与被长期使用的简单符号具有相同涵义这一事实不是一个任意的规定，而只能通过直接的洞见来认识。无疑，我们在这种情况下也会说定义。它也许可以被称为一个“分析性定义”而与前一种情况相区别。

弗雷格怎么说

分析性定义

我们有一个简单符号，它已经被长期使用。我们相信我们可以对它的涵义进行逻辑分析，得到一个具有同样涵义的复杂表达式。我们只允许那些我们可以识别其涵义的东西作为那条复杂表达式的组成部分……复杂表达式与被长期使用的简单符号具有相同涵义这一事实不是一个任意的规定，而只能通过直接的洞见来认识。无疑，我们在这种情况下也会说定义。它也许可以被称为一个“分析性定义”而与前一种情况相区别。

弗雷格怎么说

分析性定义

我们有一个简单符号，它已经被长期使用。我们相信我们可以对它的涵义进行逻辑分析，得到一个具有同样涵义的复杂表达式。我们只允许那些我们可以识别其涵义的东西作为那条复杂表达式的组成部分……复杂表达式与被长期使用的简单符号具有相同涵义这一事实不是一个任意的规定，而只能通过直接的洞见来认识。无疑，我们在这种情况下也会说定义。它也许可以被称为一个“分析性定义”而与前一种情况相区别。

弗雷格怎么说

分析性定义

我们有一个简单符号，它已经被长期使用。我们相信我们可以对它的涵义进行逻辑分析，得到一个具有同样涵义的复杂表达式。我们只允许那些我们可以识别其涵义的东西作为那条复杂表达式的组成部分……复杂表达式与被长期使用的简单符号具有相同涵义这一事实不是一个任意的规定，而只能通过直接的洞见来认识。无疑，我们在这种情况下也会说定义。它也许可以被称为一个“分析性定义”而与前一种情况相区别。

弗雷格怎么说

只有规定性义才是数学中可承认的定义

弗雷格的论证

定义的标准

定义对于一个系统而言并非绝对本质的。我们完全可以只使用原来的那一组符号。【通过定义】引入的简单符号并没有添加任何内容……事实上，仅仅从一个定义出发是无法证明什么没有它就证明不了的新东西……如果定义项出现在句子中，我们把它换成被定义项，这丝毫不会影响【句子的】思想。

可取消性（eliminability）、保守性（conservativeness）

弗雷格的论证

定义的标准

定义对于一个系统而言并非绝对本质的。我们完全可以只使用原来的那一组符号。【通过定义】引入的简单符号并没有添加任何内容……事实上，仅仅从一个定义出发是无法证明什么没有它就证明不了的新东西……如果定义项出现在句子中，我们把它换成被定义项，这丝毫不会影响【句子的】思想。

可取消性（eliminability）、保守性（conservativeness）

弗雷格的论证

定义的标准

定义对于一个系统而言并非绝对本质的。我们完全可以只使用原来的那一组符号。【通过定义】引入的简单符号并没有添加任何内容……事实上，仅仅从一个定义出发是无法证明什么没有它就证明不了的新东西……如果定义项出现在句子中，我们把它换成被定义项，这丝毫不会影响【句子的】思想。

可取消性（eliminability）、保守性（conservativeness）

弗雷格的论证

规定性定义的标准

定义对于一个系统而言并非绝对本质的。我们完全可以只使用原来的那一组符号。【通过定义】引入的简单符号并没有添加任何内容……事实上，仅仅从一个定义出发是无法证明什么没有它就证明不了的新东西……如果定义项出现在句子中，我们把它换成被定义项，这丝毫不会影响【句子的】思想。

可取消性（eliminability）、保守性（conservativeness）

以隐定义为例

隐定义

例

希尔伯特在《几何学基础中》把下述公理称作“定义”

1. 如果 A, B, C 是直线上的点，且 B在A和C之间，那么 B在C和A之间
2. 如果 A 和 C 是直线上的两点，那么至少有一个点 B在A和C之间，也至少有一个点 D，使得 C在A和D之间
3. 任给直线上的三个点，有且仅有一个点在另两个点之间
4. 直线上的任意四点 A, B, C, D 可以如此排列以使得 B在A和C之间也在A和D之间，C在A和D之间也在B和D之间

隐定义

例

希尔伯特在《几何学基础中》把下述公理称作“定义”

1. 如果 A, B, C 是直线上的点，且 B在A和C之间，那么 B在C和A之间
2. 如果 A 和 C 是直线上的两点，那么至少有一个点 B在A和C之间，也至少有一个点 D，使得 C在A和D之间
3. 任给直线上的三个点，有且仅有一个点在另两个点之间
4. 直线上的任意四点 A, B, C, D 可以如此排列以使得 B在A和C之间也在A和D之间，C在A和D之间也在B和D之间

隐定义

让我们假设三个未知的 x、y、z 出现在三个方程中。那么他们可以被这些方程所决定。然而更准确地说，仅当只有唯一解的时候，他们才被决定。类似地，“点”、“线”、“面”这几个词可能出现在若干句子中。让我们假设这些词目前还没有涵义。这就可能需要为每个词找一个涵义以使得问题中的这些句子都表达了真思想（thought）

隐定义

拒绝隐定义的理由

定义必须唯一地决定被定义项的涵义

隐定义

然而，显定义也是一种隐定义

那么一种隐定义可以被接受的标准是什么？

隐定义

如果可以证明【一则如方程组的定义中，被定义项】只有唯一一个解是可能的，那么这肯定是通过一则构造性定义来为每个需要被定义的词逐个赋予涵义而得到的

唯一解标准是必要且充分的

隐定义

如果可以证明【一则如方程组的定义中，被定义项】只有唯一一个解是可能的，那么这肯定是通过一则构造性定义来为每个需要被定义的词逐个赋予涵义而得到的

唯一解标准是必要且充分的

隐定义

如果可以证明【一则如方程组的定义中，被定义项】只有唯一一个解是可能的，那么这肯定是通过一则构造性定义来为每个需要被定义的词逐个赋予涵义而得到的

唯一解标准是必要且充分的

贝斯可定义性定理

定义

给定语言 L 和新谓词 P，令 T 是语言 $L \cup \{P\}$ 的理论

- T 隐定义 P 当且仅当对任意 T 模型 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$，若 $\mathfrak{M}|L = \mathfrak{N}|L$，则 $P^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{N}}$
- T 可以显定义 P 当且仅当存在 L 公式 φ 使得 $T \vdash \forall x[\varphi(x) \leftrightarrow Px]$

贝斯可定义性定理

定理 (Beth)

给定语言 L 和新谓词 P，令 T 是语言 $L \cup \{P\}$ 的理论。如果 T 隐定义 P，那么 T 可以显定义 P

贝斯可定义性定理

事实

如果 $L = \emptyset$, $L \cup \{P\}$ 理论 T 隐定义 P 当且仅当 T 是完全的

推论 (哥德尔不完全性定理)

数学基础概念无法被（隐/显）定义

贝斯可定义性定理

事实

如果 $L = \emptyset$, $L \cup \{P\}$ 理论 T 隐定义 P 当且仅当 T 是完全的

推论 (哥德尔不完全性定理)

数学基础概念无法被（隐/显）定义

贝斯可定义性定理

事实

如果 $L = \emptyset$，$L \cup \{P\}$ 理论 T 隐定义 P 当且仅当 T 是完全的

推论 (哥德尔不完全性定理)

数学基础概念无法被符合唯一解标准地定义

推论

- 将数学（概念）建立在逻辑（概念）之上
- 这种“建立”即满足唯一解标准的规定性定义

是不兼容的

推论

- 逻辑主义纲领
- 这种“建立”即满足唯一解标准的规定性定义

是不兼容的

推论

- 逻辑主义纲领
- 只有规定性定义是可接受的数学定义

是不兼容的

哥德尔计划

前提

- 公理化集合论作为数学的基础
- 公理化集合论不完全

哥德尔计划

为集合论寻找新公理

哥德尔计划

前提

- 公理化集合论作为数学的基础
- 公理化集合论不完全

哥德尔计划

为集合论寻找新公理

哥德尔计划

前提

- 公理化集合论作为数学的基础
- 公理化集合论不完全

哥德尔计划

为集合概念提供更具体的分析性定义

为分析性定义辩护？

弗雷格

可能那个涵义通过一道迷雾才展示在两个人面前，当他们要抓住它的时候，他们错过了。其中一个人从它右边划过，可能另一位从左边划过。因此，尽管他们俩试图把握同一个东西，他们失败了。要有多浓的雾才会出现这种情况！但通过证明一定能发现他们没有把握同样的涵义。是的，这不可能失败，只要该证明是以逻辑地严格的方式绘制的，并且在推理链条中没有跳跃

为分析性定义辩护？

哥德尔

存在这种情况，我们把两个或更多个明晰概念（sharp concept）混淆为一个直观概念（intuition concept），然后我们似乎得到了相悖的结果。……当我们意识到有两个不同的明晰概念被混淆为一个直观概念时，悖论就消失了。这里可以与感觉知觉类比。我们无法分辨远距离的两颗相邻的星球，但通过望远镜，我们能看到确实有两颗星球

为分析性定义辩护？

图灵

任何可以给出的【关于图灵机正确刻画了“机械过程”的】论证都一定是从根本上诉诸直观的

哥德尔计划的现状

哥德尔的哲学遗产

- 极端的概念实在论？
- 内在论证/ 外在论证？
- 极大化原则？

哥德尔的哲学遗产

- 极端的概念实在论？
- 内在论证/ 外在论证？
- 极大化原则？

哥德尔的哲学遗产

- 极端的概念实在论？
- 内在论证/ 外在论证？
- 极大化原则？

今天，如何做一个数学柏拉图主义者

谢谢！