多宇宙观幻觉

杨睿之
复旦大学哲学学院

摘要

集合论作为数学基础的成功使得关于数学对象的本体论问题被归约为关于集合的本体论问题．传统的（集合）实在论强调集合的存在，从而人们可以谈论关于这些集合的概念是否符合那个客观事实．而作者将在本文中介绍并分析另一种逐渐流行起来的集合论哲学——多宇宙观 (Multiverse View)．这一立场强调存在许多集合论宇宙以及多种并立的集合概念．传统实在论则相应地被看作是一种单宇宙观（Universe View）的立场．作者将试图论证多宇宙观对集合论宇宙二阶存在的假设是不必要的．反过来，如果多宇宙观仅仅是强调集合论宇宙的实在性，那么它与传统的集合实在论，即单宇宙观是相容的．

1 集合论多宇宙观简介

我们知道传统集合实在论认为，作为数学对象的所有集合客观地存在于集合论宇宙中．一个人对于这些集合的理解，要么符合事实，要么不符合．人们当下对集合的理解，也即当下的集合概念体现为集合论的诸公理．集合论公理系统可以看作是对集合这个概念的隐定义．然而，不完全现象（哥德尔不完全性定理以及有自然的数学意义的独立命题的发现）说明人们对集合的理解是不充分的．传统实在论的目的就是逼近那个正确的理解，它表现为集合论新公理的确立．显然，这样的公理是不能随意选择的，它必须被认为是对集合论宇宙中的那些事实的正确的陈述．

Joel David Hamkins 在 [6] 中第一次系统地阐释了集合论多宇宙观的想法．根据他的说法，集合论多宇宙观与传统实在论是对立的．它认为没有一个绝对正确的集合概念．人们对集合的理解多种多样，对每一种理解都*存在*相应的集合论宇宙作为其例证．我们不能说某个理解是正确的，而

其他的是错误的．或者说，我们可以有各种各样的集合论的“真”，即在不同的集合论宇宙中的真．

1.1 构造集合论模型

近几十年，尤其是 Cohen 发明力迫法以后，各种“集合论模型”的“构造”已经成为集合论研究所无法离开的工具．这是多宇宙观产生的学科背景，或者说造成多宇宙观“幻觉”的环境．例如，通过初等嵌入对大基数的定义．基数 κ 满足某个大基数性质，当且仅当存在一个初等嵌入 $j : V \to M$，使得 κ 是 j 的关键点．而被嵌入的集合论模型 M 往往是 V 的超幂或超幂的迭代．

构造集合论模型的作用更多地体现在作为不完全现象的例证．各种独立命题或相对一致性证明的发现，都可以看作是构造了某些集合论模型．在其中，那些命题或真或假．

最直观的是集合模型的构造．例如，假设存在一个不可达基数 κ，那么 V_κ 就是一个 ZFC 的模型．如果我们取的 κ 是最小的不可达基数，那么 V_κ 会认为它里面没有不可达基数．因此

$$\text{ZFC} + \text{存在不可达基数} \vdash \text{Con}(\text{ZFC} + \text{不存在不可达基数}).^1$$

又由向下的 Löwenheim-Skolem 定理，我们甚至可以找到一个可数的 ZFC 模型．它会“错误地”认为自己有不可数多的对象．在对运用力迫法证明一致性的叙述中，我们往往会把原模型看作是一个可数模型，这让我们可以很直观地得出脱殊滤的存在，从而构造出力迫扩张．然而，要证明存在某个集合论理论的集合模型必须要假设一致性强度更强的公理系统．因此，从 ZFC 出发的针对其它命题与 ZFC 的一致性证明总是相对一致性证明．即，我们先假设一个模型的存在，再从这个模型出发，或限制或扩张，构造出一个满足特定命题的模型．

内模型 (inner model) 是通过对原模型作限制而得到新模型的一种构造方式，如哥德尔的可构成集类 L．在其中，每一层结构 L_α (α 无穷) 的基数是 $|\alpha|$，而 L_α 的所有子集都可以在 $L_{(\alpha^+)^L}$ 中被构造出来．因而，广义连续统假设在其中成立．在可构成集组成的宇宙中，我们可以根据每个对象第一次被构造出来的先后顺序，以及被构造所使用的方式 (可数种)、参数 (已

[1] 其实，证明不可达基数的一致性只需要假设 Con(ZFC)．假设 M 是 ZFC 模型，那么 M 中“所有在第一个不可达基数 (如果存在的话) 阶 (rank) 之下的集合”组成的类就是不存在不可达基数的模型．

构造并排序的对象) 来排定该对象的位置．因此，我们在整个宇宙上有一个可定义的良序，所以选择公理在 L 中成立．但 L 中不一定含有全部的实数，我们可以从实数集 (而非空集) 开始构造，得到 $L(\mathbb{R})$．在其中，有可能没有一个实数上的排序，从而选择公理又不成立．我们也可以用利用序数可定义性来定义内模型 HOD．其中所有的集合以及它们的元素都是以序数为参数在 V 中可定义的．由于其定义所用的参数就是序数，而定义方式可数，所以也很容易将整个宇宙良序化．但是，连续统的取值在 HOD 却可以非常任意．

无论集合模型还是内模型的构造都可以看作是在我们这个绝对的集合论宇宙内部的构造．力迫扩张是一种外模型 (outer model) 的构造方式．它的产生才是对传统集合实在论的真正挑战．我们往往会这样叙述一个运用力迫法的一致性证明：我们从一个集合论宇宙 V 出发，构造其中的一个布尔代数 $\mathbb{B}$．我们给每个关于集合的陈述赋予一个 $\mathbb{B}$ 上的值以表示其真假程度．当然，这种赋值需要符合一定规律，例如 ZFC 中句子都被赋予 1，即绝对真；如果 $\mathrm{ZFC} \vdash \varphi \to \psi$，那么对 ψ 赋的值就比 φ 更真．事实上，我们构造了一个多值逻辑的模型，即布尔值模型．其中有一些陈述的真值介于绝对的真和绝对的假之间．从中，我们可以看到更多集合论模型的可能性．我们设想有一个 $\mathbb{B}$ 上的 V 脱殊滤 G．它是一个超滤，将 $\mathbb{B}$ 分为两个等价类，即真和假．从而把可能性现实化，得到力迫扩张 $V[G]$ 并满足特定的命题．一般来说， V 是 $V[G]$ 的子类，但 $V[G]$ 中却含有 V 中没有的对象，如 G．也就是说 $V[G]$ 是比 V 更大的宇宙．这种构造似乎是在说，处于集合论宇宙之内的人 (通过布尔值模型) 也可以想象宇宙之外的情况．按照一些实在论者的想法，这些可以被合理地想象的对象也是实在的．那么，V 对生存于其中的人们来说就不再是绝对的宇宙了．

集合论学家往往喜欢把上述的那些技术手段理解为集合论模型的构造．因此， Hamkins 等人认为，传统的实在论已经不适合集合论研究的现状了，多宇宙观则显得更加自然．他强调，集合论多宇宙观是一种二阶或高阶的实在论．[2] 如果说传统集合实在论是关于集合的柏拉图主义，那么多宇宙观就是关于集合论宇宙的柏拉图主义．人们关于各种集合论模型、各种可能的集合概念，以及它们之间关系的研究应该成为未来集合论研究的主题．

[2]Hamkins 在所有作者所知的学术报告中，都把多宇宙观称作二阶实在论．但在 [6] 中他谨慎地将多宇宙观表述成一种高阶实在论．他似乎不排除将他的多宇宙观往更高阶的推广的可能．

1.2 复宇宙

如果多宇宙观的拥护者强调的是那些集合论模型的实在性，那么类似于传统实在论者认为公理集合论是人们对于集合论宇宙的理解，他们也应该能提供关于那个由所有集合论宇宙组成的“超”宇宙的直观与理解．其中最有代表性的是 Hamkins 对复宇宙 (multiverse) [3] 的描述．类似于传统实在论所假设的绝对的集合论宇宙 (包含着所有的集合)，多宇宙观的复宇宙是由所有的集合论宇宙组成的那个绝对的宇宙． Hamkins 强调：“我们不期望从一个宇宙能够看到整个复宇宙”[6, 23]．这里，多宇宙观的复宇宙，类似于传统实在论的集合论宇宙，是一个绝对的概念．即，凡是能够被想象的集合论宇宙都在其中，超出复宇宙这种想法本身是不一致的．

Hamkins 在 [6, 4] 提到了 von Neumann [11, 412] 考虑到的一种情况：“一个集合论模型可以是另一个集合论模型中的集合，而且一个集合可以在前一个模型中是有穷的，而在后一个模型看来是无穷的；类似地，前一个模型中的良序在后一个模型看来可以有一个无穷下降链．”这为人们对复宇宙内宇宙间的关系的理解提供了一些直观．

1.2.1 复宇宙公理及其一致性

类似于一些集合论公理描述了集合论宇宙的丰富性，即集合论宇宙在集合存在和集合运算下的封闭性， Hamkins 提出了一组复宇宙公理力图展现复宇宙的丰富性，即存在很多的集合论宇宙，并且复宇宙在集合论宇宙之间的一些关系下封闭．

定义 1.1 (复宇宙公理) 假设 $\mathcal{M}$ 是一个由 ZFC 模型组成的非空类．我们说 $\mathcal{M}$ 是一个*复宇宙*，但且仅当它满足：

(1) *可数化公理*：对任意 $\mathcal{M}$ 中的模型 M，存在 $\mathcal{M}$ 中的一个模型 N，使得 M 是 N 中的一个可数集合．

(2) *伪良基公理*：对任意 $\mathcal{M}$ 中的模型 M，存在 $\mathcal{M}$ 中的一个模型 N，使得在 N 看来，结构 M 上的关系 $\in_M$ 是一个莠基的关系．

(3) *可实现公理*：对任意 $\mathcal{M}$ 中的模型 M，如果 N 是 M 中参数可定义的类，并且 M 认为 N 是 ZFC 的模型，那么 N 在 $\mathcal{M}$ 中．

[3]作者将 multiverse view 译作多宇宙观，这是与传统集合实在论，也即被多宇宙观称作唯一宇宙观 (universe view) 相对的概念．而这里的复宇宙是指多宇宙观所理解的包含所有集合论宇宙的那个宇宙．

(4) 力迫扩张公理：对任意 $\mathcal{M}$ 中的模型 M，如果 $\mathbb{P}$ 是 M 中参数可定义的偏序 (类)，那么存在一个 $\mathbb{P}$ 上的 M 脱殊滤 G，使得力迫扩张 $M[G]$ 在 $\mathcal{M}$ 中.

(5) 嵌入回溯公理：对任意 $\mathcal{M}$ 中的模型 M_1，若 j_1, M_2 是 M_1 中参数可定义的类且 M_1 认为 $j_1 : M_1 \to M_2$ 是一个初等嵌入，那么存在 $\mathcal{M}$ 中的一个模型 M_0， M_0 认为以同样方式[4]定义的 $j_0 : M_0 \to M_1$ 是一个初等嵌入，并且 $j_1 = j_0(j_0)$.

注 1.2 我们说，"集合论模型 $(M, \in_M)$ [5] 是 N 中的一个元素 (集合)" 或 "M 在 N 中"，是指存在集合 N 中的一个元素 a^0， N 认为该元素是由 m^0, E^0 组成的有序对且 E^0 是 m^0 上的一个二元关系，即 $N \vDash a_0 = (m^0, E^0) \wedge E^0 \subseteq m^0 \times m^0$，而从外面看集合 $m^1 = \{x \in N \mid N \vDash x \in m^0\}$ 及其上的关系 $E^1 = \{(x, y) \in N \times N \mid N \vDash x E^0 y\}$ 组成的结构 (m^1, E^1) 同构于集合论模型 M.

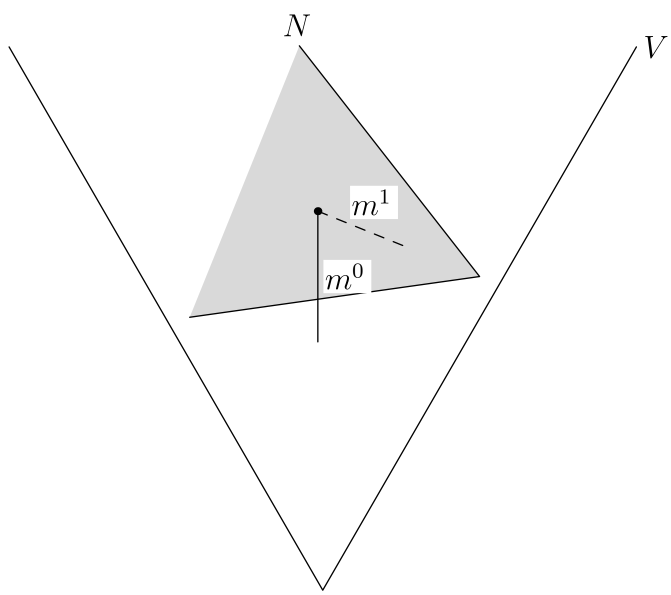

图 1.1: 非传递模型的错觉

[4] "以同样方式" 指的是：假设 $j_1 = \{x \in M_1 \mid M_1 \vDash \varphi[x, p_1]\}$，则 $j_0 = \{x \in M_0 \mid M_0 \vDash \varphi[x, p_0]\}$ 且 $j_0(p_0) = p_1$.

[5] 当我们谈论一个集合论模型 $(M, \in_M)$ 时，往往会简写为 "集合论模型 M". 此时，我们考虑的是一个结构，而不仅仅是一个集合.

由于这里所涉及的集合论模型不一定是传递模型．从外面看，它们的“属于”关系不一定是真正的属于关系的一个子类．所以，同一个对象，从外面看和从一个非传递的集合模型 N 看，可能包含不同的元素．我们一般用上标 0 来强调我们指的是模型 N 中的一个对象，用上标 1 来表示我们指的是 N 把该对象理解成的那个集合．例如， $N = \mathrm{Ult}(V, U)$ 是一个超幂 (U 是序数 α 上超滤)． N 中的元素都是形如 $[f]_U$ 的集合．其中 f 是从 α 到 V 中的函数， $[f]_U$ 是 $\bmod U$ 的等价类．从外面看 $[f]_U$ 是由所有与 f 等价的函数组成的集合，我们用 a^0 表示这个对象，即 $a^0 = \{g \mid g \sim_U f\} = [f]_U$．而在 N 看来， $[f]_U$ 所包含的元素是那些 $[g]_U$．从外面看，那些 g 满足对大部分 x 有 $g(x) \in f(x)$ (记为 $g \in_U f$)．此时，我们用 a^1 来表示， N 所理解的 a^0，即 $a^1 = \{[g]_U \mid g \in_U f\}$．

结构 (m^1, E^1) 是从外面看对 N 所理解的 (m^0, E^0) 的理解．对任意 $x, y \in m^1$， $(m^1, E^1) \vDash x \in y$ (即 xE^1y) 当且仅当 $N \vDash \ulcorner (m^0, E^0) \vDash x \in y \urcorner$．而 $x \in m^1$ 当且仅当 $x \in N$ 且 $N \vDash x \in m^0$．因此，对公式复杂度简单地归纳就可以得出：任给集合论公式 φ 和 $x_1, \ldots, x_n \in m$，

$$(m^1, E^1) \vDash \varphi[x_1, \ldots, x_n] \Leftrightarrow N \vDash \ulcorner (m^0, E^0) \vDash \varphi[x_1, \ldots, x_n] \urcorner \tag{1.1}$$

注 1.3 我们说，“集合模型 M_1 认为 $j_1 : M_1 \to M_2$ 是一个初等嵌入”(j_1 和 M_2 是 M_1 中参数可定义的类)，严格地是在说， M_1 认为 j_1 是从自身到 M_2 的 Σ_0 初等嵌入 (对任意 Σ_0 公式 $\varphi(x)$ 有， $M_1 \vDash \varphi[a]$ 当且仅当 $M_2 \vDash \varphi[j(a)]$)．这样定义是因为， M_1 中无法定义自己的真谓词，因而无法真正说 j_1 是初等嵌入．但 M_1 中可以说 j_1 是 Σ_0 初等嵌入．并且从外面看，如果 $j_1 : M_1 \to M_2$ 是 Σ_0 初等嵌入，那么从外面可以归纳地证明它确实是初等嵌入．核心归纳步骤如下．

假设 $M_2 \vDash \exists x \varphi(x)$，那么存在序数 $\alpha \in Ord^{M_2}$ 使得， $V_\alpha^{M_2} \vDash \exists x \varphi(x)$．由于 j_1 是一个共尾嵌入，即总存在 $\beta \in M_1$ 使得 $j(\beta) > \alpha$，我们选取足够大的 β 使得 $V_{j(\beta)}^{M_2} \vDash \exists x \varphi(x)$，即 $M_2 \vDash \exists x \in V_{j(\beta)} \varphi(x)$．而 $\exists x \in V_{j(\beta)} \varphi(x)$ 的复杂度不比 φ 更高，所以我们可以运用归纳假设，得到 $M_1 \vDash \exists x \varphi(x)$．

总的来说，复宇宙公理所要表达的是，复宇宙是没有中心的．没有一个集合论宇宙可以被看作是标准的．我们看到的或想象我们生存于其中的那个集合论宇宙，在别的宇宙看来可能只是一个可数的世界；或者它不是一个良基的世界；它可能是另一个世界中的超幂或者是布尔值模型下的一种可能性．并且，即使我们能跳出当前的宇宙，从更高明的角度审视并意

识到这些问题，我们仍然只不过是处于一个更高级的幻觉中而已.

Gitman 和 Hamkins 在 [4] 中证明了，假设 ZFC 是一致的，那么看似荒谬的复宇宙公理并不蕴含着矛盾.

定义 1.4 (可数的可计算饱和模型类) 令 T 是一个集合论理论，

$$\mathrm{CCSM}(T) = \left\{(m, E) \,\middle|\, m \text{ 可数，且 } (m, E) \text{ 是 } T \text{ 的可计算饱和模型} \right\}$$

是由所有满足 T 的可数可计算饱和的集合论模型组成的类.

一个集合论模型 M 是可计算饱和的，当且仅当对于任意可计算的公式集 $\Phi(x, a)$ (其中至多包含一个自由变元 x，一个参数 $a \in M$)，如果 $\Phi(x, a)$ 的每个有穷子集在 M 中可实现 (即*有穷可实现*)，那么整个 $\Phi(x, a)$ 在 M 中可实现，即存在 $b \in M$ 使得 $M \vDash \Phi[b, a]$.

容易验证，任何可计算饱和的集合论模型都有一个非标准的 ω. 因为，公式集 $\left\{x < \omega, x > 0, x > S0, \ldots, x > S^n 0, \ldots\right\}$ 是可计算的，也是 M 中有穷可实现的.

定理 1.5 (Gitman-Hamkins) 假设 ZFC 一致，那么 CCSM(ZFC) 满足所有复宇宙公理. 即所有可数的可计算饱和的 ZFC 模型组成了一个复宇宙.

证明概述 首先，引理 1.6 是整个证明的核心引理.

引理 1.6 任给两个可数的可计算饱和的 ZFC 模型，如果它们有相同的标准系统，那么这两个模型同构.

我们知道，一个 ω 非标准的模型 N 中不存在标准的 ω，也不存在在标准 ω 的无穷子集. 但我们可以说 N 中的一个自然数子集 (非标准的) a^0 是一个标准的自然数子集 A 的代码 (code)，当且仅当 $A = a^1 \cap \omega$. 我们说一个模型 M 的*标准系统* (standard system) ，是指所有能用 M 中元素编码的标准的自然数子集，即 $SSy(M) = \left\{\omega \cap a^1 \,\middle|\, a^0 \in M\right\}$

在证明可数化和伪良基公理成立的时候，我们实际上证明的是任何一个可数的可计算饱和模型 N 都含有一个自己的副本，即含有一个元素 a，并认为它是一个可数的非良基集合论模型 (m, E)，而通过引理 1.6 可以证明，从外面看，该模型与 N 同构. 反过来说，每个可数的可计算模型都在自己的一个副本之中，且被自己认为是可数的并且是非良基的.

类似地，假设 M_1 是个可数的可计算饱和模型，并且 $j : M_1 \to M_2$. 我们可以利用引理 1.6 证明，事实上存在一个同构 $M_1 \simeq M_2$，并且在 M_2 中以同样方式定义的 $j_2 = j_1(j_1)$. 因此，就像站在 M_2 的角度看，存在模型 M_0 (其实是 M_1 自己) 及其中同样地定义的初等嵌入 $j_0 : M_0 \to M_1$ 使得 $j_1 = j_0(j_0)$.

引理 1.7 假设 N 是拥有一个非标准的 ω 的 ZFC 模型，那么 N 中的模型都是可计算饱和的.

运用引理 1.7，我们可以证明，任给一个可数的可计算饱和的模型 M，它的内模型和力迫扩张同样在某个可计算饱和 (因而也是 ω 非标准的) 模型中，所以也是可计算饱和的，即在 CCSM(ZFC) 中. □

值得说明的是，在可数化公理和伪良基公理中，我们并不要求那个“更好的”模型 N 把 M 识别为 ZFC 的模型. 事实上，N 中的句子集 ZFC 被编码为 N 中的那个非标准的 ω 的子集，是一个非标准的 ZFC. 所以，尽管实际上 M 是 ZFC 的模型，N 仍可能认为 M 只满足它所认识的 ZFC 的一个前段.

然而，在一定的假设之下，还是可以找到一个模型 N 把 M 识别为 ZFC 的模型.

引理 1.8 (Gitman-Hamkins) 如果 M 是可数的可计算饱和的 ZFC 模型，那么下面两个命题等价：

(1) 理论 $T_M = \mathrm{ZFC} + \left\{ \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \Gamma) \,\middle|\, \Gamma \text{ 是 } \mathrm{Th}(M) \text{ 的有穷子集} \right\}$ 是一致的.

(2) 存在可数的可计算饱和的 ZFC 模型 N，M 是 N 中的元素，并且 N 认为 M 是一个可数的可计算饱和的 ZFC 模型.

我们会在后面看到，T_M 一致这个假设其实并不很强.

需要注意的是，在传统实在论者看来，一个 ZFC 甚至 ZF 的模型可以被称为一个集合论宇宙，但这些模型绝不是他们心目中的那个绝对的囊括所有集合的宇宙. 类似地，我们在这里把 CCSM(ZFC) 称作一个复宇宙，只是表名它满足定义 1.1 的复宇宙公理. 它绝不可能是二阶实在论所理解的那个绝对的复宇宙，因为它事实上是某个集合论宇宙中一个可定义的类. 此外，就像 ZFC 不是对集合论宇宙的完备的描述，我们没有理由以为定义 1.1 中所列复宇宙公理是完备的. 事实上，人们期待着一种根本上不同

于力迫扩张的新的集合论模型构造方式，也即一种新的一致性证明方式的发现．

总之， Hamkins 通过这一结论试图说明的仅仅是，多宇宙观对复宇宙的理解至少是一种一致的无法被逻辑证否的哲学假说．

1.2.2 脱殊复宇宙与复宇宙

在 Hamkins 关于复宇宙的描述出现之前，Woodin 等人就提出过脱殊复宇宙 (generic multiverse) 的概念 (参见 [12]、[14] 等)． Hamkins 的复宇宙概念与脱殊复宇宙概念有较密切的联系但不尽相同．

脱殊复宇宙是由一些宇宙生成的在力迫扩张关系的对称闭包关系下封闭的集合论宇宙的聚合．例如，假设 M 是一个可数传递的 ZFC 模型．任给可数传递 ZFC 模型 M_1, M_2 ，我们定义 $M_1 \sim M_2$ 当且仅当 M_2 是 M_1 的力迫扩张或 M_1 是 M_2 的力迫扩张．则 $\mathbb{V}_M = [M]_\sim$ 是由 M 生成的脱殊复宇宙．

定理 1.9 (Laver[9]-Woodin-Reitz[10]) 如果 V 是 W 的力迫扩张 (即 W 是 V 的基模型)，那么 W 是 V 的内模型．并且存在 V 的所有基模型的统一的定义．即，存在集合论公式 $\varphi(x, y)$ 使得，如果 $V = W[G]$ 是由 W 中的偏序 $\mathbb{P}$ 上的脱殊滤 $G \subseteq \mathbb{P}$ 生成的脱殊扩张，那么存在 $r \in W$ 使得

$$W = \{x \mid \varphi(r, x)\}.$$

根据上述定理，容易看出 Hamkins 的复宇宙概念由于满足可实现公理和力迫扩张公理因而也是脱殊复宇宙．显然，脱殊复宇宙的强调的封闭性弱于复宇宙．这是因为， Hamkins 通过复宇宙概念希望表达的是他关于集合论宇宙二阶存在的多宇宙观，而我认为脱殊复宇宙在 Woodin 等人著作中被提出是实在论者在执行哥德尔计划过程中向形式主义的妥协．

我们知道，哥德尔计划是试图为集合论寻找新的公理．而力迫法是现有的证明独立性，也即给定公理贫乏性的最强有力的工具．大量独立性命题的发现促使许多集合论学家退守到形式主义的立场，从而回避选择．而如果一个命题在由 V (实在论者心目中的那个客观的集合论宇宙) 生成的脱殊复宇宙中的每个集合论宇宙中都成立，那么即使从形式主义者的立场来看也可以承认它为真．因为，这样做并不需要以选择的痛苦为代价．这种观点被称作脱殊复宇宙的真理观．在这种真理观的指引下，Woodin 提出

了 Ω 逻辑和 Ω 猜想，并基于相关的工作一度认为连续统假设为假．但后续的工作揭示了，在一定的大基数假设下，如果 Ω 猜想成立，那么脱殊复宇宙观下相当一部分有意思的集合论真理可图灵规约为集合论宇宙的一个前段中的真命题的集合．这违反了实在论者的一个直观，即集合论宇宙总比它的一个片断更复杂．由此，Woodin 放弃了基于脱殊复宇宙的真理观的寻找新公理的途径 (参见 [13]、[14])．

值得指出的是，脱殊复宇宙的真理观并不必然蕴含着承认脱殊复宇宙中的集合论宇宙都是实存的．事实上，可以证明 (见 [13]) 对任意集合论句子 σ ，我们可以统一地计算出句子 σ' 使得对任意 ZFC 的可数传递模型 M ， $M \vDash \sigma'$，当且仅当，对任意 $N \in \mathbb{V}_M$ 有 $N \vDash \sigma$．因此，如果我们希望说 σ 是脱殊复宇宙真理观下为真的句子，我们不需要提及那些比 V 更“大”的宇宙，而是只需要说 σ' (在 V 中) 成立就行了．也就是说脱殊复宇宙的真理观可以在 V 内部得到表达．

多宇宙观则强调复宇宙中的集合论宇宙的存在．在 Hamkins 的复宇宙中，很可能一个宇宙无法由力迫扩张关系通达到另一个宇宙．除了力迫扩张关系，复宇宙还被要求在其他一些集合论模型的构造关系下封闭．但必须承认，内模型和力迫扩张的构造是其中最重要的构造关系，因为这是仅有的两种能得到“不同的” (即满足不同句子的) 集合论模型的构造方式．事实上，Hamkins 等人关于复宇宙的很多研究 (例如下面将介绍的力迫法的模态逻辑和集合论地质学) 是针对脱殊复宇宙的研究．因为我们可以将整个复宇宙看作是被脱殊复宇宙划分为许多等价类，对这些等价类的所有可能的内部结构的研究显然有助于我们理解整个复宇宙的结构．

同时，如果有新的集合论模型的构造方法，特别是新的独立性的证明方式的出现会受到多宇宙观拥护者的热情欢迎，并将其补充进复宇宙公理．因此，多宇宙观拥护者的复宇宙概念类似于实在论者对集合论宇宙的认识，是开放的．

可以说，脱殊复宇宙的真理观是一些实在论者在实践哥德尔计划的过程中所采取的一种论证策略．相比之下，复宇宙概念背后的多宇宙观则更像是一种与实在论并列的哲学立场．

1.3 多宇宙观启发下的研究成果

我们知道，基于集合实在论思想的哥德尔计划很大程度上推动了现代集合论的发展．这在一定程度上为实在论本身提供了合法性辩护．

Hamkins 试图证明，多宇宙观的哲学立场同样会实质性地推动集合论研究本身．他和一些集合论学家也确实从多宇宙观的视角出发，提出了一些新的有趣的集合论的研究方向．

1.3.1 力迫法的模态逻辑

我们知道，模态逻辑的语言相比经典逻辑语言增加了一些菱形或方形符号 (如 $\Diamond$ 和 $\Box$) 用以表示各种模态词，如表示可能性的“可能”、“必然”，表示认知的“知道”、表示时态的“未来某一刻”等．一个典型的模态逻辑的模型形如 (W, R)，其中 W 是“可能世界”的集合，而 R 表示可能世界之间的“可及关系”．一般，我把“ φ 是可能的”，即 $\Diamond\varphi$ 解释为：从当前的世界出发可以“看到”一个可能世界 (有 R 关系)，在这个世界中 φ 成立．在集合论多宇宙观之下，可以很自然地把集合论复宇宙 (或脱殊复宇宙) 看作是可能世界，而把力迫扩张关系或其他模型生成关系当作集合论宇宙之间的可及关系．

严格地说，我们可以定义力迫法模态逻辑的语言为一阶集合论语言加上一个方形模态符号 $\Box$ 和一个菱形模态符号 $\Diamond$，并且其中的合式公式如通常的递归定义，只是我们不允许模态符号出现在集合论语言量词符号的辖域中．

力迫法模态逻辑语言的语义定义如下．

定义 1.10 任给集合论公式 φ．从集合论宇宙 M 来看， $\Box\varphi$ 为真，当且仅当对任意 M 中的 (集合) 偏序 $\mathbb{P}$ ，任意 $\mathbb{P}$ 上的 M 脱殊滤 G 有 $M[G] \vDash \varphi$ (即 $M^{\mathbb{P}} \Vdash \varphi$)．定义 $\Diamond\varphi$ 为真，当且仅当存在偏序 $\mathbb{P}$ 使得 $M^{\mathbb{P}} \Vdash \varphi$.

Hamkins 和 Löwe [7] 证明了模态逻辑系统 S4.2 在 ZFC 模型组成的复宇宙中有效．

定理 1.11 (Hamkins-Löwe) 对每个集合论公式 φ，以下公式在复

宇宙的一个 ZFC 模型上成立.

$$\begin{array}{rl} \mathrm{K} & \Box(\varphi\to\psi)\to(\Box\varphi\to\Box\psi) \\ \mathrm{Dual} & \Diamond\varphi\leftrightarrow\neg\Box\neg\varphi \\ \mathrm{T} & \Box\varphi\to\varphi \\ 4 & \Box\varphi\to\Box\Box\varphi \\ .2 & \Diamond\Box\varphi\to\Box\Diamond\varphi \end{array}$$

证明概述 公式 K 成立，因为力迫保持蕴含.

注意，公式 Dual 成立并不平凡. 因为，我们将 $\Diamond\varphi$ 翻译为"存在偏序 $\mathbb{P}$，且对任意脱殊滤 G 有 $M[G]\vDash\varphi$"，而不是"存在……，存在……". 但是，可以证明两者是等价的.

公式 T 成立，是因为存在一些偏序，其中极小元的集合稠密，而基于这种偏序的所有力迫扩张都等于原模型.

公式 4 根据力迫迭代定理，即通过做任何两步力迫扩张得到的模型都可以一步得到.

证明 .2 公式成立需要用到乘积力迫定理：

定理 1.12 (乘积力迫公理) 令 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是 M 中偏序. 如果 $G_1\subseteq\mathbb{P}$ 是 M 脱殊滤且 $G_2\subseteq\mathbb{Q}$ 是 $M[G_1]$ 脱殊滤，那么 G_1 也是 $M[G_2]$ 脱殊滤，且 $M[G_1][G_2]=M[G_2][G_1]$.

令 $\mathbb{P}$ 是 M 中偏序使得对任意 $\mathbb{P}$ 上的 M 脱殊滤 G_1，我们有对任意 $M[G_1]$ 中的偏序 $\mathbb{Q}$ 任意 $\mathbb{Q}$ 上的 $M[G_1]$ 脱殊滤 G_2，有 $M[G_1][G_2]\vDash\varphi$. 那么对任意 M 中的偏序 $\mathbb{Q}$ (因而 $\mathbb{Q}$ 也是某个 $M[G_1]$ 中偏序) 任意 $\mathbb{Q}$ 上的 M 脱殊滤 G_2，显然 $\mathbb{P}$ 同样是 $M[G_2]$ 中偏序，并且对所有 $\mathbb{P}$ 上的 $M[G_2]$ 脱殊滤 G_1，有 G_2 是 $M[G_1]$ 脱殊滤且 $M[G_2][G_1]=M[G_1][G_2]$ 因而满足 φ. □

Hamkins 和 Löwe 还进一步论证了 S4.2 可能是我们可以得到的最好的结果. 例如，公式

$$5:\qquad \Diamond\Box\varphi\to\varphi$$

可能不成立. 因为存在一些集合论命题它们在基模型中为假，而一旦被力迫成立就无非再被力迫为假了. 例如"ω_1^L 是可数的". 由于在 V 的所有力迫扩张中，ω_1^L 是绝对的，即无法通过力迫向其中"添加"元素，一旦我

们将它“坍塌”为可数，它在所有更大的力迫扩张中就保持为可数了．而在 L 中， ω_1^L 显然不可数．

还有如公式

$$M: \qquad \Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$$

不是有效的．因为像连续统假设这样的集合论命题可以在任何模型上通过坍塌被力迫为真，也可以通过“添加”新的实数而力迫为假．也就是说，$\Box\Diamond$CH 总是成立，而 $\Diamond\Box$CH 一般不成立．

类似“ ω_1^L 是可数的”的集合论命题被称作*按钮*，一旦按下去就不会再弹回来；而把连续统假设这样的命题成为“开关”，可以任意开或关．进一步的研究包括寻找其中所有按钮都已经被“按下”的宇宙，以及加入与力迫扩张关系的逆关系对应的模态词的模态逻辑有关的问题．

1.3.2 集合论地质学

如果说力迫法的模态逻辑研究的是从一个集合论宇宙出发顺着力迫扩张关系“向上”看得到的集合论复宇宙的结构的话，集合论地质学则是沿着力迫扩张的逆关系 (即基模型关系) “向下”挖掘．

正如定理 1.9 提到的，如果 $V = W[G]$ 是 W 的集合力迫扩张，那么我们称 W 是 V 的*基模型* (ground model) 或*基* (ground)．由迭代力迫定理，如果 W 是 V 的基，而 U 是 W 的基，那么 U 也是 V 的基．集合论地质学的一个动机是不断挖掘当前模型的“基”，希望找到一个最初的起点，剔除一切通过力迫法添加的东西．集合论学家们期望这个起点是一个典范的集合论模型，并且从它出发能更好地理解力迫法以及由力迫法生成的脱殊复宇宙．下述定理很好地支持了这个想法．

定理 1.13 假设 W 是 V 的基，即存在 W 脱殊滤 G 使得 $V = W[G]$，而 U 是 V 的内模型 (满足 ZFC)，且有 $W \subseteq U \subseteq V$．那么 U 是 W 的力迫扩张，并且是 V 的基．

也就是说，只要我们挖掘到足够“古老”的基模型，那么更“晚近”的夹在那个基模型和当前模型之间的任何一个内模型的“由来”都可以得到解释．

定义 1.14 (Hamkins-Reitz) 我们称 W 是 V 的“床” (bedrock) 当且仅当， W 是 V 的基，且是极小的基模型，即 W 唯一的基是它自身．

对一个集合论模型，如果它有唯一的床，那么这个床模型就是我们通过挖掘所希望找到的终点了．遗憾的是，我们现在仍然不知道，如果一个集合论模型有床，那么它是否只有唯一一个床．并且 Jonas Reitz [10] 发现有的集合论模型是没有床的．即它的每个基又有不同于自己的基．这种模型被称作是无底的 (bottomless)．于是人们又提出新的概念．

定义 1.15 (Fuchs-Hamkins-Reitz) 集合论模型 M 的罩 (mantle) 是它所有基的交．

显然，每个集合论模型有且只有一个罩．但现在的问题是罩是不是集合论模型，以及是不是基模型．

我们说 V 的基是*向下可交的* (downward directed)，当且仅当对 V 的任意两个基 W_1, W_2，存在基 $U \subseteq W_1 \cap W_2$．我们说 V 的基是*向下集合可交的* (downward set-directed)，当且仅当对 V 中任意索引集合 I 以及基 W_i $(i \in I)$ 存在基 $U \subseteq \bigcap_{i<I} W_i$．显然，如果 V 是向下可交的，那么 V 的每个基模型的罩也就是 V 的罩．并且，可以证明这个罩满足 ZF．而如果 V 是向下集合可交的，那么 V 的罩满足 ZFC．推广罩的定义，我们可以定义 V 的*脱殊罩* (generic mantle) 为 V 的所有脱殊扩张的罩的交．脱殊罩又可以等价地定义为从 V 生成的脱殊复宇宙的交．显然脱殊罩是罩的子类．但人们现在还不知道脱殊罩是不是就是罩，或者有没有集合论模型，它的脱殊罩不同于罩．不过，脱殊罩似乎是一个比罩更有力的概念．我们不需要假设向下可交性就可以证明脱殊罩满足 ZF．

到此为止都还是好的消息．但是 Gunter Fuchs 与 Hamkins 等人证明了下述定理，使得罩成为最初起点的可能成为泡影．

定理 1.16 (Fuchs-Hamkins-Reitz[3]) 每个 ZFC 模型 M 都有一个类力迫扩张 N，使得 M 是 N 的罩、脱殊罩．

因此，集合论宇宙的罩或者脱殊罩可能是任意的集合论模型．因此，我们可以进一步向下挖掘，因为一个罩的罩可能是不同的模型．如果向下挖掘罩的罩的过程可以终止，即某个集合论模型的罩是它自身，我们就称这个模型是外核 (outer core)．Fuchs 等人猜测，一个集合论模型可能永远找不到自己的外核．无论最后的结果如何，在多宇宙观看来，这些研究都有助于我们理解集合论复宇宙的结构．

2 多宇宙观的一阶解释

我们知道，多宇宙观强调存在许多的集合论宇宙，表面上看，有关复宇宙的命题，无论是复宇宙公理还是力迫法的模态逻辑或是集合论地质学涉及的问题往往含有以诸多集合论宇宙组成的类为论域的量词，因而是二阶集合论命题．但我们发现，其实目前为止我们所涉及到的命题都可以有一阶的表达，甚至不需要用到 NGB 这样的系统．这也意味着，我们完全可以在假设存在一个绝对的集合论宇宙的前提下来讨论集合论多宇宙观所提出的问题．

2.1 一致性证明与力迫法的一阶解释

力迫法往往被看作是构造“外”模型的方法．尤其当它被看作是构造由所有集合组成的集合论宇宙 V 的“外”模型的时候往往会让人感到困惑．这也是当代集合实在论受到质疑的一个主要诱因．但通过更仔细的技术处理，集合论学家能够严格地解释力迫法构造的本质．

哥德尔完全性定理说的是，一个理论是一致的，当且仅当存在一个模型满足其中的每一条公式．这个命题可以被看作是集合论的内定理，无论是语法部分的符号、公式、证明还是语义部分的模型都可以被定义为某种集合．在这种解释下，一个理论是一致的，当且仅当我们可以在集合论宇宙中找到见证它的一致性的集合模型．又由于集合论语言是可数的，如果一组集合论命题是一致的，那么我们实际上可以找到它的一个可数模型．利用力迫法证明 (相对) 一致性的一种解释就是可数集合模型的解释．

例如，假设我们希望证明

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \sigma). \tag{2.1}$$

假设 ZFC 一致，我们可以取到 ZFC 的一个足够大的有穷片断 Λ，并找到 Λ 的一个可数传递模型 M．[6]假设 $\mathrm{ZFC} + \sigma \vdash$ 不一致．则存在有穷的 $\Sigma \subseteq \mathrm{ZFC} \cup \{\sigma\}$ 有 $\Sigma \vdash 0 = 1$．运用力迫法，我们可以设法寻找 M 中的一个偏序 $\mathbb{P}$，由于 M 可数，我们可以找到 $\mathbb{P}$ 上的 M 脱殊滤 G (与 M 中

[6]假设 ZFC 一致，我们可以用完全性定理证明的原始方法构造 ZFC 的可数模型，但它可能不能被坍塌成传递的．而其实我们只需要 ZFC 的一个足够大的有穷片断的模型就可以了．运用反映原理 (reflection principle) 我们可以找到这个有穷片断的一个传递模型，然后构造它的可数 Skolem Hull，这样得到的模型可以被坍塌为传递的．以可数传递模型为基来解释力迫法，有助于我们证明关于力迫法的一些元定理．更具体的介绍可以参见 [8]．

的可数个 $\mathbb{P}$ 的稠密子集相交)，使得脱殊扩张 $M[G]$ 是 Σ 的模型，从而得到矛盾.

虽然如果知道一个理论一致总能找到它的一个集合模型，但寻找集合模型并不是唯一的证明一致性的方法. 一致性的证明是一种不可证性的证明，要证明 $\Sigma \nvdash \sigma$ 本质上是要找到一种性质，所有 Σ 中的公式满足这种性质，并且证明规则保持这种性质，而 σ 不满足这个性质. 例如利用内模型的方法证明 (2.1). 事实上，所谓内模型并不是宇宙中的一个模型. 我们实际是找一条公式 φ_W 定义内模型 W，它是一个真类. 我们定义集合论公式的一种翻译，将所有集合论公式 φ 翻译为 φ^W. φ^W 依然是集合论公式，非正式地说，这条公式的意思是 φ 在 W 中成立. 然后我们可以证明，对任意一条 ZFC 中的命题 φ，有性质：$\mathrm{ZFC} \vdash \varphi^W$，公式 σ 也满足 $\mathrm{ZFC} \vdash \sigma^W$，并且这一性质在证明规则下保持. 而因为一般有 $(0=1)^W = (0=1)$，所以如果 ZFC 一致，那么 $\mathrm{ZFC} \nvdash (0=1)^W$，即 $(0=1)$ 不具备这种性质，因而不可证.

类似地，对于实在论者来说，他们甚至可以在他们生活的 V 中讨论 V 自身的力迫扩张，而不需要涉及集合模型. 力迫法可以通过布尔代数的方式来表达. 对任意偏序 $\mathbb{P}$，我们可以将其扩张为一个完全的布尔代数 $\mathbb{B} = B(\mathbb{P})$. 由此，我们可以构造由 V 的 $\mathbb{B}$- 名组成的布尔值模型 $V^{\mathbb{B}}$. 由于 $\mathbb{B}$-名都是集合，所以 $V^{\mathbb{B}} \subseteq V$ 是集合论宇宙中的一个真类. 但又由于每个集合 x 都有自己的典范名 $\check{x}$，在某种意义上 $V^{\mathbb{B}}$ 又是 V 的扩张. 布尔值模型的语义可以看作是二值逻辑模型语义的推广. 对每个集合论句子 φ，其在 $V^{\mathbb{B}}$ 中的赋值 $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}}$ 是 $\mathbb{B}$ 中的一个元素. 而 $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}}$ 是可定义的. 要证明 (2.1)，首先，对任意布尔代数，每个 ZFC 中句子 φ 在布尔值模型中的真值都是绝对的真，即都有 $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$，布尔代数的最大元. 而证明规则满足，若 $\Sigma \vdash \varphi$，那么 $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}} \geq *_{\psi\in\Sigma}[\![\psi]\!]_{\mathbb{B}}$ (Σ 中公式真值的下确界). 我们只需要证明在 $V^{\mathbb{B}}$ 中，$[\![\sigma]\!]_{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$，也即 $V^{\mathbb{B}} \Vdash \sigma$，则 $\mathrm{ZFC} + \sigma$ 的所有定理在 $V^{\mathbb{B}}$ 中的真值都应该是 $\mathbf{1}$. 而容易证明 $[\![(0=1)]\!]_{\mathbb{B}} = \mathbf{0}$. 所以，$\mathrm{ZFC} + \sigma$ 矛盾的唯一可能是 $\mathbf{0} = \mathbf{1}$ 是 ZFC 的定理.

涉及可数传递模型（或称“玩具”模型）的解释与运用布尔值模型的解释在直观上各有优点. 但两者都是通过集合论一阶语言对力迫法的表达.

2.2 V 中的力迫法模态逻辑与集合论地质学

力迫法的模态逻辑 根据之前的解释，任给 V 中的偏序 $\mathbb{P}$ (或等价地以完全布尔代数 $\mathbb{B}$ 来做力迫)，“$V^{\mathbb{P}} \Vdash \varphi$” 是以 $\mathbb{P}$ 为参数的集合论公式．也就是说，类似内模型的证明，力迫法的关键步骤也可以被看作是构造了一个集合论公式间的统一的映射．

由此，我们可以把所有之前介绍的力迫法的模态逻辑中的模态公式翻译成一阶公式．例如，$\Box\varphi$ 在 V 中真，当且仅当 $\forall\mathbb{P}\big(\mathbb{P}$ 是偏序 $\to V^{\mathbb{P}} \Vdash \varphi\big)$．而力迫法模态逻辑研究的主要问题也都有一阶的表达．我们说 φ 是一个“按钮”，其实是指

$$\exists\mathbb{P}\big((V^{\mathbb{P}} \Vdash \varphi) \wedge \forall\dot{\mathbb{Q}} \in V^{\mathbb{P}}(V^{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}} \Vdash \varphi)\big).$$

其中 $\exists\mathbb{P}$ 是“存在一个偏序的缩写”；$\dot{\mathbb{Q}} \in V^{\mathbb{P}}$ 表示 $V^{\mathbb{P}} \Vdash$“$\dot{\mathbb{Q}}$ 是偏序”．注意被力迫的公式中的“参数”必须是 $\mathbb{P}$-名；而 $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}} = \big\{(p,\dot{q}) \bigm| p \in \mathbb{P} \wedge V^{\mathbb{P}} \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\big\}$，其上的偏序定义为，$(p_1,\dot{q}_1) \leq (p_2,\dot{q}_2)$ 当且仅当 $p_1 \leq p_2$ 且 $p \Vdash \dot{q}_1 \leq \dot{q}_2$．注意 $p \Vdash \dot{q}_1 \leq \dot{q}_2$ 也是一阶可表达的．例如用我们之前介绍的利用布尔代数的表达方式，令 $\mathbb{B} = B(\mathbb{P})$，则上述命题等价于 $p \leq [\![\dot{q}_1 \leq \dot{q}_2]\!]_{\mathbb{B}}$．要寻找其中所有“按钮”都已经被“按下”的集合论模型，即希望从该模型满足的一组公理可以对每个集合论公式 φ 都能证明，

$$(\varphi \text{ 是按钮 }) \to \varphi.$$

集合论地质学 接下来，让我们来看看如何在 V 中工作研究 V 本身乃至从 V 生成的脱殊复宇宙中的每个宇宙的集合论地质学．

通过对定理 1.9 证明的微调，我们可以找到公式 $\varphi(x,y)$ 定义了一系列真类 $\big\{W_r \bigm| r \in V\big\}$．其中每个 $W_r = \big\{x \bigm| \varphi(x,r)\big\}$．并且可以证明，每个 W_r 都是 V 的基，即存在 $\mathbb{P} \in W_r$ 和 $\mathbb{P}$ 上的 W_r 脱殊滤 $G \in V$ 使得 $V = W_r[G]$．而每个 V 的 (参数可定义的) 基都是某个 W_r．因此，我们“一个类 W 是 V 的基”可一阶地表达为 $\exists r(W = W_r)$．而 V 的基 W_r 是床，当且仅当

$$\forall s(W_s \subseteq W_r \to W_s = W_r).$$

问 V 是否有唯一的床，就是看命题 $\forall r,s\big(W_r, W_s$ 是床 $\to W_r = W_s\big)$ 是否成立．

类似地，V 的罩可定义为 $\bigcap_{r\in V} W_r$．而 V 的脱殊罩可定义为

$$\big\{x \bigm| \forall\mathbb{P}\big(V^{\mathbb{P}} \Vdash (\forall r\check{x} \in W_r)\big)\big\}.$$

我们可以进一步定义罩的罩，以至于对每个 $n < \omega$，可以定义 M_n 为第 n 次迭代的罩．但是需要注意的是，目前并不知道对 M_n 的统一的定义，即还没找到公式 $\varphi(x,y)$ 使得 $M_n = \{x \mid \varphi(x,n)\}$．因此，我们无法定义 V 中的 $M_\omega = \bigcap_{n<\omega} M_n$．尽管如此，我们仍然可以利用玩具模型来进行近似的研究．假设 $N = M_0$ 是可数传递模型； $M_{\alpha+1}$ 是 M_α 的罩；对极限序数 α， $M_\alpha = \bigcap_{\xi<\alpha} M_\xi$．则 Fuchs 等人的猜想可以表述为，

$$\forall\alpha \in Ord^N (M_{\alpha+1} \subsetneq M_\alpha).$$

类似的，复宇宙公理的内容由于涉及到初等嵌入、类力迫等构造，也无法解释为直接以 V 为“当事人”的一阶陈述．并且，复宇宙公理试图描绘的图景是，复宇宙中没有一个中心或典范的宇宙，也没有宇宙能够“通达”到整个复宇宙．[7]所以， V 也并不被期望成为一个当事者．因此，把玩具宇宙的类作为复宇宙公理的模型就成了自然的选择．

反过来，多宇宙观认为任何集合论宇宙，包括我们认为我们“生活”于其中的这个集合论宇宙 V 都可能是某个更完整的宇宙中的一个玩具模型．这种想法为基于玩具模型的研究提供了很好的支持．即，我们所研究的玩具模型确实被“生活”在其中的人们，甚至是某一时刻的我们自己当作是整个宇宙．随着未来我们对宇宙的理解更加完备，我们当前所理解的全部宇宙可以被看成一个玩具宇宙，通过对这个玩具宇宙的操作，许多我们当前所看不到的东西会被揭示出来．这种怀疑我们现在“生活”于其中的宇宙是玩具宇宙的想法与实在论并不冲突．我将在下节中更详细地说明这一观点．

2.3 复复宇宙公理

我们将看到，不仅是被标榜为描述二阶实在的复宇宙公理，甚至它的更高阶的推广同样能得到基于玩具宇宙的一阶解释．

正如我在第 3 页的注释中提到的．虽然在 Hamkins 的文章中，他实际上主张的是二阶集合实在论，描绘的是他心目中那个绝对的复宇宙的图景，但他也意识到多宇宙观的拥护者没有特别的理由把自己限制在二阶实在论．显然，复宇宙公理，或者说我们对集合论宇宙概念的理解不是完备的．推广多宇宙观的对集合论宇宙的看法，我们也可以宣称并没有一个绝对的复宇宙，而是存在很多种不同的复宇宙，满足不同的关于集合论宇宙之间关

[7]注意，在由单个宇宙生成的脱殊复宇宙中，任何宇宙都可以“通达”到整个复宇宙．

系的命题．这些复宇宙之间又具有一定的关系．当然，就像我们还没有完备地理解集合之间的关系、集合论宇宙之间的关系，我们对复宇宙之间关系的了解肯定更加模糊．但我们仍然能模仿集合论公理和集合论复宇宙公理，来试着描述一下二阶复宇宙，即复复宇宙中存在着哪些对象．

定义 2.1 (复复宇宙公理) 存在一个复宇宙．并且对任意复宇宙 $\mathcal{M}$，存在一个复宇宙 $\mathcal{N}$ 以及 $\mathcal{N}$ 中的一个 ZFC 模型 N，使得在 N 看来，$\mathcal{M}$ 是一个由可数的非良基的 ZFC 模型组成的复宇宙．

就像复宇宙公理对复宇宙的描绘，其中的集合论宇宙没有哪个是特别的，对任何集合论宇宙都存在着“更好的”宇宙能看到前者的局限性，复复宇宙公理表达的是每个复宇宙也都不是特别的，并且总存在着“更发达的”复宇宙，在它们看来前者只是一个“玩具”复宇宙．

类似定理 1.5，在一个不太强的假设之下，我们同样可以证明复复宇宙公理也是一致的．

引理 2.2 令 N 是 ZFC+Con(ZFC) 的模型．则 N 中的复宇宙 $\mathcal{M}^0$ 从外面看仍然是一个复宇宙．即 $\mathcal{M}^1 = \left\{(m^1, E^1) \;\middle|\; N \vDash (m^0, E^0) \in \mathcal{M}^0\right\}$ 是一个复宇宙．

参见 [4] 和 [1] 中证明．

定理 2.3 (复复宇宙一致性) 假设存在一个不可达基数 κ．令 $\mathscr{M} = \mathrm{CCSM}^{V_\kappa}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}))$ 是 V_κ 中所有可数的可计算饱和的 $\mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ 模型组成的集合．则

$$\mathscr{M}\mathscr{M} = \left\{ \mathrm{CCSM}^N(\mathrm{ZFC}) \;\middle|\; N \in \mathscr{M} \right\}.$$

是由复宇宙组成的集合，且满足复复宇宙公理．

证明 首先，由于 κ 是不可达基数，那么 V_κ 是 ZFC 的模型．由向下的 Löwenheim-Skolem 定理，存在一个 ZFC 的可数模型 (ω, R)．显然，该模型也在 V_κ 中．因此，V_κ 也是 $\mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ 的模型．类似地，我们可以迭代任意有穷次，如 $V_\kappa \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}\left(\mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\right)$．

又由可计算饱和模型存在定理 (参见 [2, 112])，$\mathscr{M}$ 非空．

对任意 $N \in \mathscr{M}$，N 是 $\mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ 的模型．由定理 1.5，$\mathrm{CCSM}^N(\mathrm{ZFC})$ 是 N 中的复宇宙．由于可计算饱和模型都是非良基的，

在 N 看来 $\mathrm{CCSM}^N(\mathrm{ZFC})$ 中的模型都是非良基的．由引理 2.2，从外面看，$\mathrm{CCSM}^N(\mathrm{ZFC})$ 也确实是复宇宙．

现在我们只需要证明存在一个 $\mathscr{M}\mathscr{M}$ 中的一个复宇宙，而 N 是其中的一个元素．

对任意 $N \in \mathscr{M}$，$V_\kappa \vDash \ulcorner N \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Th}(N) \urcorner$．因而，$T_N = \mathrm{ZFC} + \left\{ \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \Gamma) \;\middle|\; \Gamma \text{ 是 } \mathrm{Th}(N) \text{ 的有穷子集} \right\}$ 是一致的．由之前的分析，$V_\kappa \vDash \mathrm{Con}(T_N)$．在 V_κ 中应用引理 1.8，存在 $M \in \mathscr{M}$，在 M 看来 N 是一个可数的可计算饱和的 ZFC 模型，即 N 是复宇宙 $\mathrm{CCSM}^M(\mathrm{ZFC})$ 中的元素． □

显然，$\mathscr{M}\mathscr{M}$ 是一阶集合论公式定义的类，也是我们在 V 中找到的满足复复宇宙公理的“模型”．人们可能会质疑，它并不是真正的所谓复复宇宙，正如 CCSM(ZFC) 也不是真正的复宇宙．但正如我们利用玩具模型来模拟“真正的”集合论宇宙一样，我们也可以把这些“模型”看作是对“真正的”复宇宙或复复宇宙的模拟．一旦直观告诉我们这些模拟不到位的时候，即我们需要它们满足新的命题的时候，我们可以修正这些“模型”以达到令人满意的模拟．由于我们一般只会一次要求有穷条命题，所以这种修正总可以达成．

此外，复复宇宙公理及其一致性证明还给我们带来更多提示．从复宇宙公理以及复复宇宙公理的一致性证明中，我们看到， ZFC、复宇宙公理、复复宇宙公理在一致性强度上形成一个递增关系．虽然它们在一致性强度上的增加幅度很有限，事实上复复宇宙公理的一致性强度要低于存在一个不可达基数．但我们有理由期望，随着我们对集合论模型间关系的进一步理解，随着我们开发出新的构造集合论模型以及集合论复宇宙的方法，我们可以补强复宇宙公理和复复宇宙公理．更进一步，我们可以期望有任意 n 阶甚至 α 阶的复宇宙公理．它们也许能提供类似大基数公理那样的一致性强度的层级结构．

事实上，无论是复宇宙公理还是复复宇宙公理所描绘的集合论宇宙或复宇宙之间的关系，与哥德尔的“之集合” (set of) 运算的直观都非常接近．复宇宙是集合论宇宙的集合，而复复宇宙是复宇宙的集合．而且它们所要表达的，即所有的集合论宇宙都被“更好的”集合论宇宙看作是一个“玩具”模型，所有的复宇宙都被“更发达的”复宇宙看作是一个“玩具”复宇宙，无非是在说这个宇宙，无论把它称作集合的宇宙还是包含集合和集合的宇宙的宇宙或是别的名称，是极大丰富的．这与 ZFC 中的存在性公

理乃至大基数公理背后的直观是一致的．如果，我们仅把 ZFC 所保证存在的对象称作集合，那么不可达基数可能就不是一个集合．不可达基数公理的意义在于断定宇宙中存在不可达基数这样一种对象．至于是否把它称作集合，并不重要．从大基数的这个特质可以看出大基数公理的“高阶”本质．某个大基数公理说“性质 P^0 不足以描述宇宙之大”，这本身是描述宇宙之大的性质，我们称作 P^1．而更大的大基数又说“P^1 不足以描述宇宙之大”．如此不断扩展．

同理，复宇宙公理断定宇宙中存在很多集合论宇宙这样的对象．即认为现有的集合论公理对这个抽象世界的看法，只看到了其中的一个很小的部分，即某个集合论宇宙．把这些集合论宇宙当作不同于普通集合的二阶对象还是就把它们看作普通集合，并不重要．重要的是，我们可以很自然地想象由一个集合论宇宙和一个普通集合组成的对集；一些满足特定性质的集合论宇宙和普通集合．换句话说，我们可以将取子集、并集、幂集、投射等集合运算运用于集合论宇宙和普通集合之上，并且不产生矛盾；如同我们可以将这些运算运用于有穷集合和 ω 之上，从而构造出各种各样的无穷集合，抑或运用于“可达的”集合和不可达基数之上从而构造出各种“不可达的”对象一样．因此，各种集合论宇宙的存在并不妨碍我们假设我们在探索一个客观的宇宙．正如传统实在论对大基数公理的理解，对复宇宙的丰富性的描述也可以理解为是在陈述这个客观宇宙的丰富性．

哥德尔在 [5] 的脚注 18 中谈到一种可能的获取新公理的途径非常类似复宇宙公理或复复宇宙公理这种源于关于集合的“高阶”概念的直观的公理表达．

> *类似地，“集合的性质”（集合论的第二个主要术语）的概念给出关于它的公理的扩展．更进一步，“集合的性质的性质”的概念等等，也可以被引入．由此而来的这些新公理，他们后承中那些关于集合的有界域的命题（如连续统假设）*［也应］*包含在关于集合的公理中（至少就我们现在所知）．*

即使一些多宇宙观的拥护者坚持认为存在一个绝对客观的复宇宙，即关于集合论复宇宙有一个客观的概念，或是认为存在一个绝对的复复宇宙甚至更高阶的复宇宙．我们仍然可以期望，这个绝对的复宇宙并上其中的集合论宇宙中的集合组成的宇宙与传统集合实在论所设想的那个绝对的集合论宇宙最终是一样的．这种期望似乎是无矛盾的．事实上，如果 $\mathcal{M} = \mathrm{CCSM}^V(\mathrm{ZFC})$ 并且 $V \vDash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$，那么 $\mathcal{M} \cup \bigcup \mathcal{M} = V$．因此，

主张绝对客观的复宇宙和主张绝对客观的集合论宇宙并没有本质的冲突.

3 结论

以上，作者试图论证了，多宇宙观基于对集合论宇宙二阶存在的强调所提出的问题实际上都可以找到集合论语言中的一阶表达. 因此，对二阶存在的强调是不必要的. 事实上，可能是集合论本身的特质使得假设不同种类的存在变得没有必要. 我们还记得类型论以及相应的高阶逻辑曾经被当作数学的基础，其中把数学对象划分为不同类型或不同阶的存在，较低的类型与较高的类型的对象之间可以有“$\in$”关系. 这与集合论的“$\in$”关系有着类似的直观. 但集合论中把具有“$\in$”关系的两个对象处理成同一种存在，或者说都是第一类型的. 这种处理方式不仅可以把 (一阶) 算术、分析 (二阶算术) 以及更高阶的泛函等研究对象解释为同一类对象，即集合，甚至也可以把给定公理集合论[8]的二阶甚至高阶对象 (通过玩具模型等方式) 解释为集合. 所以，无论是集合论宇宙的所谓二阶存在，甚至像复宇宙这样更高阶的存在，都可以被看作是一种幻觉. 事实上他们所研究的仍然是这个宇宙中的对象. 并且在集合论的框架下，可以把它们统一解释为集合，没必要把这些对象划分为本质上不同的存在. 因此，我认为如果多宇宙观所强调的就是集合论宇宙不同于集合的二阶存在，那么他们的观点和传统集合实在论的立场是相容的，即存在着一个客观的由数学对象组成的宇宙.

参考文献

[1] 杨睿之. *集合实在论与哥德尔计划：一个价值辩护*. 博士学位论文, 北京大学, 2012.

[2] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model Theory*. Elsevier Science Publishers B.V, Amsterdan, 3rd edition, 1990.

[3] G. Fuchs, J. D. Hamkins, and J. Reitz. Set-theoretic geology. 2011.

[4] V. Gitman and J. D. Hamkins. A natural model of the multiverse axioms. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 51(4):475–484, 2010.

[8]其实，一阶算术、二阶算术也都可以被看作是关于 V_ω 和 $V_{\omega+1}$ 的集合论.

[5] K. Gödel. What is Cantor's continuum problem? In *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II Publications 1938-1974*, pages 254–270. Oxford University Press, 1964.

[6] J. D. Hamkins. The Set-Theoretic Multiverse. *The Review of Symbolic Logic*, 5(3):416–449, 2012.

[7] J. D. Hamkins and B. Löwe. The modal logic of forcing. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 1793–1817, 2008.

[8] K. Kunen. *Set Theory.* College Publications, 2011.

[9] R. Laver. Certain very large cardinals are not created in small forcing extensions. *Annals of Pure and Applied Logic*, 149(1-3):1–6, 2007.

[10] J. Reitz. The ground axiom. *Journal of Symbolic Logic*, 72(4):1299–1317, 2007.

[11] J. von Neumann. An axiomatization of set theory. In *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, pages 393–413. Harvard University Press, New York, 1925.

[12] W. H. Woodin. The Continuum Hypothesis, Part I. *Notices of the American Mathematical Society*, (June/July):567–576, 2001.

[13] W. H. Woodin. The Continuum Hypothesis , the generic-multiverse of sets , and the Ω Conjecture. In *EFI Workshop*, pages 1–29, 2009.

[14] W. H. Woodin. The realm of the infinite. In *Infinite: New Research Frontiers*, pages 89–118. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.