哥德尔纲领的若干版本[①]

杨睿之[②]

复旦大学哲学学院

上海市，邮编：200433

摘要：哥德尔及后来学者发现的独立性现象是当代数学哲学讨论无法回避的。哥德尔纲领是作为实在论者的哥德尔对独立性现象的回应，体现了对理性的乐观态度。在本文中，作者试图按照乐观的程度，把哥德尔纲领细分为不同的版本。武丁计划被认为是当代集合论研究中对哥德尔纲领最忠实的实践。本文将在上述区分的基础上更清晰地定位武丁计划，并探讨其可能的哲学后承。

关键词：乐观的理性主义，哥德尔纲领，武丁计划

中图分类号：B813

乐观的理性主义

对理性主义者来说，十九世纪末至二十世纪初无疑是一段令人怀念的美妙时光。人们相信，无论是以经典力学、电磁学和热力学为代表的物理学[1]或是以《德国民法典》（B\"urgerliches Gesetzbuch）为代表的大陆法系都已接近完备。而在数学上，康托尔集合论让人类第一次可以有意义地谈论各种不同的无穷；弗雷格

① 本文得到国家社会科学基金青年项目——“内模型计划与当代集合论哲学研究”（17CZX052）资助。

② 杨睿之，1983 年生，男，汉族。籍贯上海，副教授，博士研究生学历，哲学博士学位，研究方向为数理逻辑与数学哲学。

的概念文字使数学得以摆脱来自自然语言的模糊性；希尔伯特号召建立完备的形式系统一劳永逸地解决经典数学（包括康托尔集合论）的基础问题：一切明确的数学问题都必然有一个确切的解答。[2]我们甚至可以说，某种**乐观的理性主义**（optimistic rationalism）是那个时代的主流。

理性主义者认为，存在某类知识，它们不是通过一个个经验案例得到的，而**只能**依赖于某种来自于理性的能力的直接把握。数学常常被用来作为例证，说明存在这种不依赖经验的知识。莱布尼茨[③]在《人类理解新论》中说道："正如我们在纯数学，尤其是算术和几何中看到的，必然的真似乎必须来自一些原则，这些原则的证明不依赖于个例，也不是感觉证据的后承。"[3]

乐观的理性主义者则进一步宣称，人类的理性**足够**把握这些知识。但并不是所有的理性主义者都是乐观的。乐观的理性主义者也可以对不同范围的知识持乐观看法。例如，物理学家可以主张某种意义上的万物理论（theory of everything）是可期的；法学家可以认为，人类的法律和道德有其自然基础，而后者是可以被把握的，基于其上的一套完备的法律是可能的。而数学往往位于这些领域的公共部分。莱布尼兹同样是这种乐观的理性主义的代表人物。他关于诸如充足理由律（principle of sufficient reason）[④]、心物先定和谐（pre-established harmony）以及现实世界是（诸可能世界中）完美的世界的诸多断言都显示了其哲学的乐观气质。但其乐观的理性主义最集中的体现，同时也是对后来的数学基础研究产生重要影响的是他毕生关于通用文字（*characteristica universalis*）的设想："我认为有可能发展出一种一般的文字，可以像代数在数学中那样确凿无疑地记录所有领域的研究。"[4]

---

③ 莱布尼兹可能是哥德尔本人最欣赏哲学家。

④ 显然，充足理由律并不能推出这些理由都是可以被认识的。

莱布尼兹的设想被认为是现代逻辑的先声。事实上，弗雷格在发明现代逻辑的形式语言时就自觉到这是对莱布尼兹设想的继承："莱布尼茨……他关于通用文字或者哲学演算（calculus philosophicus）或推理（ratiocinator）的想法太过庞大……即使这是一个有价值的目标，它也无法一步就达到。我们无需为一个缓慢而步步为营的迫近而感到失望。"[5, p. 6] 希尔伯特提出的（一阶逻辑有效式的）判定性问题（*Entscheidungsproblem*）[5]也被认为来源于莱布尼兹关于证明演算机器完全性的设想。[6]

莱布尼兹关于通用文字的设想意味着我们不仅能把握那些一般的真，还可以交流并互相理解："当人们之间产生争议的时候，我们只要说：让我们算一算，不需要更多的忙乱就可以看到谁是对的。"[7] 在下文中，我们将分析，在理解了弗雷格与希尔伯特的失败后，哥德尔所能够主张的是怎样一种乐观的理性主义（第 2 节）；作为哥德尔纲领在当代最有代表性的执行者，武丁的终极 L 理论遇到了哪些挑战；以及集合论多元主义是否有可能与某种乐观的理性主义相兼容。

哥德尔纲领

无论弗雷格的逻辑主义纲领还是希尔伯特的形式主义纲领都谋求一劳永逸地解决数学基础问题。在今天看来，这些研究纲领至少在表面上都失败了。

弗雷格的逻辑主义纲领谋求将全部数学建立在逻辑的基础之上。诚然，罗素发现的悖论是对弗雷格计划的重大打击，但它并不构成对逻辑主义纲领本身的否

[5] 一个容易被误解的事实是，判定性问题并没有出现在希尔伯特 1900 年数学家大会演讲中给出的问题列表上（尽管与第 10 问题，丢番图方程可解性相关），而是在[20]中与一阶逻辑完全性问题一起被明确提出的。

定。至少罗素与后来的新弗雷格主义者仍然试图在剔除了罗素悖论直接前提（如公理 V）的新的“逻辑”基础上（如分支类型论）建立经典数学。然而，罗素悖论的发现仍然让人们对这些所谓逻辑基础心有余悸。在今天看来，弗雷格的“逻辑”基础实际上是一种二阶逻辑。蒯因曾调侃弗雷格的二阶逻辑、罗素的类型论是“披着羊皮的集合论”。而他否认集合论是逻辑的一部分。[8] 至今，集合论是否属于逻辑仍然是有争议的话题。[9] 但可以明确的是，罗素的发现让人们意识到这样的基础（无论它是否被称作逻辑）仍然可能会出问题，它们安全性仍然是有待检验的。

逻辑主义者声称作为数学基础的逻辑是一类特殊的真，它们是关于某种实存的东西的。弗雷格的逻辑真，也即分析的真是关于包含了诸多逻辑实体的所谓第三域的真。罗素相信“宇宙中存在简单的事物，而这些事物间存在【外在的】关系并构成复杂的事物。”[10] 而逻辑真是关于某些外在关系的真。因此，逻辑主义者往往是“言之凿凿实在论者”[11]。弗雷格或罗素的逻辑基础只有真假问题。如果是真的，自然也是无矛盾的。

希尔伯特自始至终是经典数学（包括康托尔集合论）的捍卫者。可能是受到几何学公理化传统的影响以及直觉主义者的步步紧逼，希尔伯特在数学基础上选择了形式主义的立场。希尔伯特试图回避任何哲学上的纠缠，仅仅用数学结果为数学做辩护。希尔伯特要求：(1) 找到包含经典数学的形式化的公理系统；(2) 证明该公理系统的一致性；(3) 证明该公理系统的完全性。以上工作只能使用有穷主义方法（finitary method）。此即所谓的希尔伯特纲领。假设希尔伯特纲领实现，虽然我们仍然无法断言数学定理是真的（这无法避免涉及哲学论证），我们至少可以确信经典数学是安全的（如果我们不进一步怀疑那些有穷主义方法的话），

更进一步，所有数学命题都可以在一个有穷的公理系统中被判定。这看似是一个可以被接受的，一劳永逸的解决方案。

然而，哥德尔不完全性定理表明，希尔伯特计划在很强的意义上是无法实现的。任何递归可枚举的（所含信息有穷的）包含基本算术公理的系统，如果是一致的，那么就不是完全的，特别地，它无法证明自己的一致性。首先，包含了基本算术公理的一致且完全的公理系统必定包含无穷的信息。其次，我们有理由认为希尔伯特提到的有穷主义方法比全部经典数学更少，至少严格地包含于可以直接谈论无穷的集合论或完整的二阶算术。[6]那么，至少集合论的一致性无法得到一个有穷主义的辩护。

在哥德尔不完全性定理之后，仍然有一些希尔伯特纲领引导下的新工作。根岑（Gerhard Gentzen）在 1936 年证明了皮亚诺算术公理是一致。他通过对皮亚诺算术自然推演系统证明树的归纳证明了不需要使用一种被称作切割（cut）的规则，从而所有可证命题都可以直接回溯至由其子公式组成的序列式（sequent）公理，因而是无矛盾的。这里的问题是，根岑的证明实际上使用了超穷序数ε_0上的归纳原理（每个ε_0的有界子集都有最小元）。而这远远超出皮亚诺算术中ω上的归纳原理，令人很难相信这是有穷主义方法。值得一题的是，哥德尔本人在此后仍然工作于算术的一致性证明。他于 1958 年在《辩证法》（*Dialectica*）发表了《论一种迄今未用过的有穷主义观点的扩张》[12]。其中，哥德尔基于“自然数上的有限类型的可计算函数”（computable function of finite type over the natural numbers）这个概念给出了一个无量词的公理系统 **T**，并证明了海丁算术（因而

[6] 被多数有穷主义者认可的原始递归算术（PRA）是比上述公理系统，甚至一阶算术皮亚诺公理系统还弱得多的系统。

皮亚诺算术）的相对一致性。[⑦]哥德尔关于“自然数上的有限类型的可计算函数”的递归定义基于“具有良定义的数学程序”这个概念。哥德尔声称这个概念是“被接受为意义清晰，无需进一步解释的”。[13]

希尔伯特式形式主义的根本问题在于，它不是一个一以贯之的数学哲学立场。它宣称数学是没有内容的，仅仅是符号游戏，却要求给这些游戏规则一个一致性证明。而这个证明虽然被要求是只使用有穷主义方法的，但仍然是一个数学证明。形式主义者必须承认，这个证明是有意义的，亦即这些基于有穷主义方法的证明确实告诉我们：“按照那些游戏规则，任何玩法都不会导致矛盾。”由此，形式主义者将数学分成了两部分：有意义的真的因而不需要一致性证明的那部分（如有穷主义数学）以及更多的纯形式的需要一致性证明的那部分。他们要求用较少的有意义的那部分数学证明更多数学的一致性。因此，当人们发现一个给定系统的一致性证明总需要比那个系统更多的东西时，就会认为一切一致性证明就实现希尔伯特纲领而言是无意义的。

但对哥德尔（以及弗雷格）这样的实在论者来说，数学真是关于那个由抽象实体组成的数学世界的真。已有公理系统的一致性也是一则有关于数学世界的判断。它的真假是有待我们通过细致的概念分析去发现的事实。诚然，数学证明是帮助我们更清晰地把握相关概念的重要手段，但数学命题的真假并不依赖于人们的证明，至于一个一致性证明是否用到了某些形式上更强的公理并不是至关重要的。哥德尔用“机械地可计算”来比拟“具有良定义的数学程序”这个概念的清晰性。哥德尔认为“机械地可计算”概念首先有了“清楚的虽然是未经分析的意义”[13]，再经过图灵的刻画，“我们才清晰地感知到它”[14, 7.3.1]。注意，虽然图灵机可计算

---

⑦ 更详细的介绍参见[21]。

与哥德尔的递归函数、丘奇的λ-可演算等定义是可证等价的，但哥德尔认为只有图灵的工作让我们“清晰地感知（perceive）到”“机械地可计算”这个概念。对哥德尔来说，可证等价的刻画就是否能帮助我们更清晰地感知有关数学概念而言是能够分出高下的，因为后者才是重要的。也因此，哥德尔在发现不完全性定理之后仍然追求的一致性证明就帮助我们更清晰地把握有关数学事实这个目的而言是有意义的。

相比一致性问题，对于作为理性主义者的哥德尔来说，更迫切的是面对不完全性现象。哥德尔不完全性定理带来的冲击如此之大，以至于即使集合论公理化已经取得了明显的进展[8]，人们不再像弗雷格或希尔伯特那样谋求一个完全的数学基础。乐观的理性主义逐渐退出时代精神的主流。数学家们逐渐安于，甚至愉快地接受了基础缺失的现状。正如波斯特（Emil Leon Post）所说，哥德尔的定理表明“数学思想将永远保持本质上创新的。”[15] 然而，哥德尔本人却是一个相比弗雷格或希尔伯特更乐观的理性主义者。这从他对莱布尼茨设想的评论（对比上文弗雷格的评论）可以看出。

> 似乎有理由认为，正是对基础的不完备的理解造成了如下事实，至今为止的数理逻辑仍未达到皮亚诺等人的高期望，他们（按照莱布尼兹的要求）希望数理逻辑能为理论数学提供方便……但没有必要放弃希望。莱布尼兹在他的关于通用文字的作品中所说的并不是一个乌托邦工程；如果我们相信他的说法，他已经在很大程度上开发出了这种推理演算，只是等待着直到种子落在肥沃的土地上时再行发表。他甚至走得如此之远，以至于估算了他的演算如果由若干精选的科学家来开发达到下述程度所需要的时间，“人类会拥有一种新的工具，其对推理能力的增进远比任何光学工具曾对视力所做的帮助更多。”他指定的时间是五年……[11，pp. 152--153]

---

[8] 现在，集合论公理系统（ZF）被广泛接受为数学的（不完全的）基础。它的最初版本（缺少了替换公理模式）由策梅洛（Ernst Zermelo）于 1908 年提出，随后由司寇伦（Thoralf Skolem）和弗兰克（Abraham Fraenkel）于 1922 年尔独立地补充了替换公理。

这种乐观在他那个时代甚至显得不合时宜。

哥德尔在 1938 年证明了连续统假设相对于 ZFC 公理系统的一致性，也即从 ZFC 无法证明连续统假设是不成立的（假设 ZFC 本身是一致的）。哥德尔猜想连续统假设可能是独立于 ZFC 的：“康托尔的假设先天的有三种可能：或者它可以被证明，或者被否证，或者是独立的 。第三种情形最有可能，……寻找其独立性的证明。”[16] 哥德尔的猜想在 1963 年被科恩（Paul Cohen）证明。连续统假设的独立性相比不完全性定理对数学基础问题的影响可能更大。连续统假设是一个自然且明确的数学问题，它是希尔伯特第 1 问题。数学家可以宣称见证哥德尔不完全性定理的那些命题都是人造的，缺乏自然的数学意义。然而，连续统假设独立性的发现意味着数学家必须直面不完全性问题。除非他们退回构造主义数学划下的牢笼中，宣称关于实无穷的理论是虚构的。抑或退回形式主义的避难所（如科恩本人以及许多意识到这个问题的数学家）。而根据之前的分析，并不存在彻底的形式主义，所谓的形式主义总是某种意义上的构造主义。

而作为实在论者的哥德尔甚至在科恩发现连续统假设独立性之前就宣称，那不是连续统假设问题最终的解决。

> 但要注意，即便将来有人成功地证明了康托尔假设也是不可证的，那也毫不意味着该问题的最终解决……只有否认古典集合论的公理和概念有意义的（或有任何涵义明确的意义的）人（好比直觉主义者）才会满足于这样的独立性结果；而相信集合论概念和公理是在描述某种非常确定的实在的人则不会。原因是：在这种实在当中康托尔的假设只能是或者真或者假，该问题在现今知道的公理下的不可判定只意味着这些公理不能完全描述这种实在。这种信念绝非幻想，因为即使该问题是现有公理不能判定的，仍可能指出其它判定它的方法。[16]

正是在这里，哥德尔宣称要为集合论（也即数学）寻找新的公理以判定诸如连续统假设这样的独立命题：“不仅今天人们所知的集合论公理系统是不完全的，

而且能够以**确定的方式**补充新的公理，这些新公理不过是我们一直在用的公理的自然延续。”。这就是所谓的“哥德尔纲领”。关于哥德尔纲领历史及有关研究现状的更详细的介绍可以参见郝兆宽的《哥德尔纲领》[17]。

郝兆宽在《哥德尔纲领》中引用了斯蒂尔（John R. Steel）对哥德尔纲领的表述。

> 通过对 ZFC 的合理扩张来决定那些原本独立于 ZFC 的有趣的数学问题，特别是连续统假设。[17，p. 79]

这是一个相对克制的表述。它只是寻求 ZFC 的“合理”扩张，以逐一决定已发现的独立问题。种种迹象表明，哥德尔本人的期望可能更加乐观。在上段的引文中，哥德尔寻求以“确定的”（或“非任意的”）方式增加新公理。在上文对莱布尼兹的评论中，他为莱布尼兹关于存在一个有穷时间内的解决方案的宣言所鼓舞。这显然比弗雷格所期望的“缓慢而步步为营的迫近”激进得多。在与王浩的非正式的谈话中，他提到了“绝对证明”这个概念，并期望通过对这个概念的分析得到诸如数学的一致性等基础问题的解答。[14, p.238] 我们有理由相信，在哥德尔实际所期待的是某种终极的解决方案。由此，我们至少可以区分两种版本的哥德尔纲领。

版本(1)：逐步扩张现有的公理系统（这些扩张应该是呈线序关系的）以逐一解决每一个被发现的独立的数学问题。这应该是被数学界的实在论者（如斯蒂尔）广泛接受的的版本。注意，由于这些扩张必须是彼此兼容的，线性的扩张，一旦一个数学问题被解决，它就被永久地判定为真或者假了。

版本(2)：找到现有公理系统的一个某种意义上**完全**的扩张（或确定的扩张路径），取得某种终极的胜利。与版本一不同，它谋求某种完全性。当然，考虑到哥德尔不完全性定理，这不可能是指严格意义上的公理系统的完全性。它首先**需要划出一类数学问题**，例如，所有自然而有趣的问题或所有数学家实际会遇到

的问题或哥德尔所谓的“主观数学”（见后文），并声称可以得到一个公理系统（或确定的扩张路径）判定所有这些问题。注意，这个版本的哥德尔纲领又可以被分为两个子版本。**较强的子版本(2.1)**要求找到一个确定的完全的扩张（一个有穷信息的公理系统）；**较弱的子版本(2.2)**只要求找到一条明确的（可能趋向于无穷信息）扩张路径。

从表面上看，版本(2)是更乐观的。它在精神上承袭了莱布尼兹、弗雷格以及希尔伯特的乐观的理性主义，期待一劳永逸的解决方案。哥德尔在著名的“吉布斯演讲”[18]中是这样解释不完全性定理的哲学后承的。

> 或者数学在如下意义上是不可完全的：它的那些显明的公理绝不能包含于一个有穷的规则中，也就是说人类心灵（甚至在纯数学领域内）无限地超越了任何有穷机器的能力，或者存在上述类型的绝对不可解的丢番图问题（而两个析取支都真的情况并没有被排除，所以严格说还存在第三种情况）。

我们不妨令R表示所有客观的数学真的集合，用M表示人类心灵的能力有可能把握的数学真的集合，而用F表示某台有穷机器所把握的数学真的集合。上述第一个析取支说的是$(M \setminus F) \neq \emptyset$，第二个析取支说的是$(R \setminus M) \neq \emptyset$。

如果上述析取式的第二个析取支成立，即存在绝对不可解的数学问题，那么就可以区分出哥德尔所说的“客观意义上的”数学与“主观意义上的”数学。这就满足了版本(2)纲领的前置条件：划出一类数学问题。哥德尔称：“对于主观数学，并不排除存在一条有穷规则能够产生它的所有显明的公理。”[18] 然而，他又声称：“果真如此的话，这将意味着，人类心灵（在纯数学领域）的确等价于一台有穷机器，然而却是一台不能完全理解它自身功能的机器。” [18] 也就是说，版本(2.1)的可行性意味着上述第一个析取支不成立，即人类心灵就是一台有穷的机器。

哥德尔曾明确指出图灵关于人类心灵状态有穷的论证是一个“哲学错误”（philosophical error），他认为：“心灵在发挥作用时不是静止的，而是不断发展的……收敛于无穷”[13]。显然，哥德尔本人倾向于认为上述第一个析取支是成立的。因而，哥德尔本人应该不会主张版本(2.1)。

而如果上述第二个析取支不成立（即$(\mathrm{R} \setminus \mathrm{M}) = \emptyset$，因而第一个析取支必须成立），**并且**我们没有更好的方式自然地划分出足够大的一块数学领域，那么版本(1)的哥德尔纲领似乎是乐观的理性主义者可以主张的最好的情况了。值得注意的是，第二个析取支不成立是一个非常乐观的假设，即没有绝对无法被人类心灵把握的数学问题。

如果第一个析取支和第二个析取支同时成立（此时人类心灵可能把握的数学就是一块自然的非平凡的数学领域），又或者能够以其他方式划出一块非平凡的数学领域，那么版本(1)和版本(2.2)都将是可以主张的纲领。两者的共同点在于，都不要求达到一个有穷信息的公理系统。而两者的区别在于，后者要求找到一个明确的路径，使得沿着这条路径可以通向对一类问题的完全的解答。显然，在这种情况下主张版本(2.2)是更乐观的。笔者认为，哥德尔本人可能是在认为第二个析取支不成立的意义上主张版本(1)或在认为两个析取支同时成立的基础上主张版本(2.2)的。无论哪种情况都是乐观的。

虽然哥德尔作为实在论者面对不完全性现象提出了哥德尔纲领，但上述版本的哥德尔纲领并不是数学实在论的必然推论。同时主张数学实在论和某种程度的不可知论至少是自洽的。事实上，哥德尔的析取式已经蕴含了一定范围的不可知，而这正是人类通过证明不完全性定理而获悉的。如果我们愿意接受一些数学结果的哲学后承，就难以彻底摆脱一种与实在论和不完全性现象相容的态度，我们称

之为版本(0)的哥德尔纲领：试图以寻找新公理的形式增进对数学世界的理解，以开放的心态接受新出现的证据，并接受这样一种可能性，即这一过程并不必然导致对某个独立问题认识的收敛。

在下一节中，我们将分析武丁计划对哥德尔纲领的实践及其遇到的困难。

武丁计划

郝兆宽教授在《哥德尔纲领》一书中写道：

> 本书的一个主要论题就是：集合论已经发展到了这样的阶段，我们有可能面临着哥德尔纲领的彻底实现。

注意，由于版本(1)的哥德尔纲领不存在所谓的彻底实现，郝兆宽教授所主张的必须是某种版本(2)的哥德尔纲领。而这里的彻底实现指的是武丁（W. Hugh Woodin）关于终极 L 的研究计划。

哥德尔在预言了连续统假设的独立性后就提议通过比不可达基数或玛洛基数更强的大基数公理来判定连续统假设问题。然而，科恩的方法适用于包含任何已知大基数的公理系统。单凭大基数公理是无法判定连续统假设的。

以武丁和斯蒂尔为代表的加州学派的一项长期的研究计划是通过内模型理论为大基数公理的一致性提供佐证。这些大基数的内模型（例如包含一个可测基数的模型 L[U]）具有凝聚性（Condensation）等良好的性质，使其在力迫扩张中保持绝对。因而力迫法无法证明某个命题独立于诸如“ZF+V=L[U]+LCA“的公理系统，其中”V=L[U]”表示集合论宇宙就是这个内模型，LCA 表示相应的大基数公理。问题是，对应更强大基数的内模型极难构造，往往对应某个大基数的内模型可证

地不含有更强的大基数。更强的大基数意味着更强的解释力，实在论者希望公理系统包含更强的大基数从而不会在解释力上有所损失。而武丁证明了一旦我们找到超紧致基数的内模型，那么它将自动成为所有通过类似方式定义的大基数的内模型——终极 L。[19] 由此，“ZF+V=终极-L+LCA“就成为一系列免疫于力迫法独立性证明的“经验完全的”公理系统了。注意，我们无法定义什么是大基数公理，否则我们总可以找到比“所有大基数存在”更强的大基数性质。武丁计划就是找到终极-L 的刻画。由此，我们只需要通过加强大基数公理这一相对明确的路径，就可以判定几乎所有数学命题，除非有本质上不同于力迫法和哥德尔不完全性定理的新的独立性证明方法出现。

武丁的计划的确令人激动。它几乎完美地对应了版本(2.2)的哥德尔纲领的要求。然而，即使作为哥德尔纲领实践者的武丁的亲密盟友如斯蒂尔、冯琦等学者对武丁的终极-L 计划的可能结果往往持保留意见：它或将遭受挫折，或即使成功也不会是一个“终结”。⑨他们的理由很简单，正如波斯特所说的，数学是不会终结的。显然，这些学者主张的是版本(1)的哥德尔纲领。由于人们可能在关于哥德尔析取式采取不同立场的情况下支持版本(1)的纲领，我们很难确定他们是否持有与哥德尔同样乐观的立场。而我们几乎可以确定武丁与郝兆宽持有与哥德尔相当甚至更强的乐观立场。

结论

武丁本人关于未来的预测仍然谨慎地给出了两种可能。一种是找到终极-L的定义，从而将人类对数学世界吗的理解提升到前所未有的高度；另一种是则是重

⑨ 上述学者的观点来自于私下交流。

新陷入混沌，我们甚至无法为超紧致基数的一致性提供证据。武丁显然将他的计划推进到一个足够清晰以至于可能被证明为注定失败的境地，正如弗雷格与希尔伯特所做的那样。事实上，真正乐观的理性主义者总是试图给出强而清晰的论断，它们足够清晰以至于是可以被证明为错的，它们也几乎全部被证明是错的。弗雷格、希尔伯特、甚至哥德尔（寄希望于更强的大基数公理解决连续统假设问题而被科恩的方法证明为不可能的）概莫能外。然而，正是这些清晰明确的立场以及围绕它们的工作，甚至对它们的否定，增加了人类对数学世界的认识。

而另一方面，对理性的乐观不应盲目以至于无视一些已知的结果。正如哥德尔面对不完全性定理得出的析取式，它告诉我们不存在有穷信息的公理系统能把握全部客观数学。如果科恩以后的集合论研究一再提示我们关于连续统假设的认识可能是不收敛的，更符合理性主义的选择或许是跟随王浩的建议："正视我们所知的（doing justice to what we know）"。

1. Trefil, J. *The Routledge Guidebook to Einstein's Relativity*. (Routledge, 2015).
2. Hilbert, D. Mathematical problems. *Bull. Am. Math. Soc.* **8,** 437--479 (1902).
3. Leibniz, G. W. *New Essays on Human Understanding*. (1704).
4. Antognazza, M. R. *Leibniz: An Intellectual Biography*. (Cambridge University Press, 2009).
5. Frege, G. Begriffsschrift. in *From Frege to Gödel: A Source Book in*

Mathematical Logic, 1879-1931 1–82 (Harvard University Press, 1879).

6. Davis, M. *Engines of Logic: Mathematicians and the Origin of the Computer*. (Norton, 2000).

7. Leibniz, G. W. The art of discovery. in *Leibniz: Selections* (ed. Wiener, P. P.) 51 (Charles Scribner’s Sons, 1685).

8. Quine, W. V. O. *Philosophy of Logic*. (Harvard University Press, 1986).

9. 郝兆宽. 论分析性——来自哥德尔的启示. 哲学研究 **12,** 101--106 (2014).

10. Russell, B. Analytic realism. in *Russell on Metaphysics (2003)* (ed. Mumford, S.) 91--96 (Routledge, 1911).

11. Gödel, K. Russell’s mathematical logic. in *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II Publications 1938-1974* 119–143 (1944).

12. Gödel, K. On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint. in *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II Publications 1938-1974* 241–251 (1958).

13. Gödel, K. On an extension of finitary mathematics which has not yet been used. in *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II Publications 1938-1974* 271–280 (1972).

14. 王浩（著） & 邢滔滔、郝兆宽、汪蔚（译）. 逻辑之旅：从哥德尔到哲学. (浙江大学出版社, 2009).

15. Post, E. L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. *Bull. Am. Math. Soc.* **50,** 284–316 (1944).

16. Gödel, K. What is Cantor’s continuum problem? in *Kurt Gödel: Collected*

Works: Volume II Publications 1938-1974 (1947).

17. 郝兆宽. 哥德尔纲领. (复旦大学出版社, 2018).

18. Gödel, K. Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications. in *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III Unpublished essays and lectures* 301--323 (1951).

19. Woodin, W. H. In search of ultimate-L: the 19th Midrasha Mathematical Lectures. *Bull. Symb. Logic2* **23,** 1--109 (2017).

20. Hilbert, D. & Ackermann, W. *Grundzüge der theoretischen Logik*. (Springer-Verlag, 1928).

21. 杨睿之. 哥德尔在构造主义数学方面的工作. 逻辑学研究 **7,** 12--29 (2014).

Versions of Gödel's Program

The discovery of the phenomenon of independence by Gödel and latter logicians is something cannot be bypassed in contemporary discussion of philosophy of mathematics. Gödel's respond to the phenomenon as a realist, namely, Gödel's program exhibited an optimistic view on rationality. In this article, the author would distinguish different versions of Gödel's program according to, mostly, the extent of one's optimism. Woodin's Program has been views as one of the most faithful adherence of Gödel's program in the modern research of set theory. The author would then locate Woodin's Program in the landscape given by the above classification of versions of Gödel's program, and discuss its possible philosophical consequences accordingly.

Key words: optimistic view on rationality, Gödel's program, Woodin's Program