作为一种分析哲学的数理逻辑

以相对可计算性与随机性概念研究为例

杨睿之*

复旦大学

摘要

对于现代逻辑的运用是分析哲学的一大特征。分析哲学与现代逻辑甚至具有共同的起源：不仅分析哲学与现代逻辑的奠基者是同一批人，他们曾面对的还是同样的问题，并为此开发出我们所熟知的研究形态。然而，分析哲学和现代逻辑（尤其是数理逻辑）后来的发展似乎走上了不同的道路。笔者则希望论证当代数理逻辑研究仍然保留了分析哲学解决问题的形态——语言分析——的主要特征。论证主要基于两则案例分析，一个是对埃米尔・波斯特（Emil Post）关于可计算性理论的开创性工作，另一个是佩尔・马丁 - 洛夫（Per Martin-Löf）等人在随机性概念方面的工作。笔者还将进一步提议，仍然存在着一些值得当代分析哲学家和数理逻辑共同关心的问题。

关键词：分析哲学　数理逻辑　概念分析

1　引言

分析哲学大致始于二十世纪初，之后快速发展为当代哲学的“显学”。分析哲学是一种全新的哲学形态，“做分析哲学”与传统的“做哲学”看起来非常不同。它的出现与兴盛是哲学史的一个重要转折，甚至被称作“语言学转向”。显然，这一“转向”并非偶然，它的产生依赖于人类思想史的另一件大事——现代逻辑的发明。

但是当代分析哲学的面目已大不相同。面对一些新问题，分析哲学家们逐渐发现经典逻辑不够用了，一些人开始寻找新的工具，例如更多地诉

*本文得到教育部人文社会科学研究青年项目——“当代集合论哲学及其对数学基础研究的影响”（13YJCZH226）、复旦大学新进青年教师科研起步项目以及复旦大学青年教师科研能力提升项目资助。

诸科学。分析哲学内部没有停止过自我反思与批判。这些情况导致当代分析哲学的内涵十分复杂，外延的边界很模糊。与特立独行的早期分析哲学不同，要界定当前哪些工作是属于分析哲学的哪些不属于变得十分困难。

一般认为，现代逻辑的产生为语言分析提供了必要的工具，以使得分析哲学成为可能。我们会看到，不仅如此，早期分析哲学家们关注的与逻辑学家们所关注的是同样的问题。或者说，他们就是同一批人。然而，当代分析哲学与数理逻辑的研究似乎渐行渐远。逻辑学的工作被认为越来越多地陷入技术的细枝末节。二十世纪中后期的逻辑学研究成果，由于各种原因，在哲学界的影响也与二十世纪初不可同日而语。本文则试图改变这种印象，并将数理逻辑重新介绍给分析哲学。

笔者认为，当代数理逻辑研究的研究方式很好地继承了早期分析哲学的传统。我们将通过解读一些当代数理逻辑的研究案例，并比对早期经典分析哲学研究来说明这点。限于篇幅，我们将集中讨论两则较有代表性的案例。它们均来自数理逻辑中看似与哲学最远的研究方向——递归论，却仍然能很好地体现笔者的主张。

笔者也将尝试回答造成数理逻辑与分析哲学渐行渐远的原因，并鼓励哲学家与逻辑学家展开新的合作。

2 早期分析哲学的形态

为说明当代数理逻辑仍然可以被视为一种分析哲学，我们首先要总结分析哲学研究共有的特征，再展示当代数理逻辑研究具备这些特征。然而，由于当代分析哲学纷繁复杂的现状，我们很难找到一组公认的具有代表性的分析哲学工作，因而难以得出有效的结论。好在，早期分析哲学的特征还是比较鲜明的。如果我们能说明当代数理逻辑研究很好地承袭了这些传统，似乎也足以支撑笔者的主张了。因此，我们不妨先简单回顾一些早期分析哲学的研究，试图提炼出它们的共同特征。

罗素的《论指称》[8] 被认为是“哲学的典范”，是他试图运用弗雷格发明的谓词逻辑来解决传统哲学难题的一次较为成功的尝试。论文中要处理的是对于指称短语（denoting phrase）的通常理解下所产生的一系列困境。具体有，同一替换失效、排中律失效和否定存在式带来的关于主词是否存在的困扰。这些困扰来自人们对指称短语语义的通常理解，即指称短语指称所指（denotation）。关于这些困境，罗素首先讨论了弗雷格可能给

出的解决方案：指称短语不仅有所指也有意义（meaning）。这一方案似乎可以解决一些问题。例如，在造成同一替换失效的命题中，起作用的不仅有指称短语所指，也有其意义，所以所指相同而意义不同的指称短语不能相互替换。但接下来，罗素设计了一个非常人为的例子：

格拉伊《挽歌》中的第一行的意义

罗素经过一番令人眼花缭乱的演绎宣称证明了，“我们无法同时做到，既保留意义与所指的（逻辑）关联，又阻止两者被混淆”。因而，“这无法摆脱的纠缠不清似乎证明了意义与所指的区分完全想错”。罗素在这里的论证引入了许多预设和文中第一次出现的概念（complex、constituent of complex、subject、get at 等等）而未加说明，不够审慎地使用符号 C 和引号。这使得“哲学的典范”还是留下了让后人批判的空间。然而，罗素还是大致达到了他的目的，让多数人相信这种弗雷格可能主张的处理方式是有问题的。说到这里，对我们提炼分析哲学形态特征的目的来说也就足够了。罗素为他自己的理论辩护的策略非常清晰：对于指称短语通常的语义解释和弗雷格式解释无法解决的上述困难，他的理论提供了一个统一的解决方案。罗素的解决方案是，宣称“指称短语本质上是句子的一部分，其本身没有任何意思”，并“给出了将所有出现指称短语的命题归约为不含这种短语的命题的方法”。而所谓“不含这种短语的命题”，就是弗雷格发明的谓词逻辑中带量词的公式。

罗素是公认的分析哲学先驱。显然，罗素的这些工作受弗雷格的影响深刻。他在《论指称》中的工作是其逻辑原子主义构想的一次实践，他关于世界的逻辑原子主义则是其关于数学基础的逻辑主义的推广，而他在数学哲学上为自己设定的道路其实是完成弗雷格未尽的工作。罗素在《论指称》中所使用的工具也未超出弗雷格发明的谓词逻辑。然而，弗雷格在哲学界的影响直到达米特的工作（Michael Dummett）之后才再次被发现。达米特强推弗雷格为分析哲学的奠基人，其主要理由倒不是弗雷格发明的现代谓词逻辑，而是所谓的“语境原则”[2]：

永远不要单独问一个词的意义，而必须在一个命题的语境中【考察】。[3]

我们简单回顾弗雷格是如何在《算术基础》[3] 中自觉地使用语境原则的。

《算术基础》是弗雷格为实现逻辑主义纲领——将数学建立在逻辑的基础之上——的尝试。它讨论的主题是“（自然）数”这个概念，目的是把

“数”概念建立在更清晰的逻辑概念之上。从这本小册子目录的一部分我们就能清晰地看出作为“典范”之“典范”的论证思路：

II 一些著作家关于数概念的观点

- 数是外部事物的属性吗？
- 数是某种主观的东西吗？
- 数的集合论[1]

III 关于单位和一的看法

- 数量词“一”是不是表达了对象的一个属性？
- 单位是不是彼此相同？
- 克服这些困难的尝试
- 困难的解决

IV 数这个概念

- 每个单独的数都是一个自存的对象
- 为了得到数这个概念，我们必须明确等数的意义
- 我们的定义是完整的且被证明是有意义的

显然，弗雷格论证的总体思路也是先给出一系列对于“数”概念的可能的解释（外部事物的属性、主观的东西、事物的聚集），接着指出这些解释面临的困难，然后给出可能的改良（数是单位的集合），并再次指出改良后仍然存在的问题，如此往复，最后提出自己的解决方案并说明它能解决所有已知问题。

为了指出其他对“数”概念的解释所面临的问题，弗雷格贯彻了他的“语境原则”。例如，在论证数不是外部事物的属性时，弗雷格给出了几则具体的涉及“数”概念的命题。我们可以说一棵树“有 1000 树叶”，也可以说“绿色的树叶”。但当我们取出一片树叶，它依然有“绿”这个属性，但却不太能说它有“1000”这个属性。因而，显然“1000”与“绿”这样的属性有本质的不同。[2] 再如，面对桌上的一堆牌，我们理应可以问它们的属性，但问“这些牌的数”是什么却让人感到所指不明。它可以指牌的张数，也可以指它们的分数之和，等等。限于篇幅，笔者不再举更多的例子。读者应该能看出，所谓“语境原则”就是指在考察一个概念或表达方式时

[1]这里讨论的是把数看作是事物的聚集（collection）的观点。

[2]注意，这个例子有赖于西方语言的一些特性，譬如英语中是“1000 leaves”，而汉语实际应该是“一千片树叶”，有表示单位的量词，不容易造成误解。不过，弗雷格在后文中对单位有专门的处理。

列举它们可能的使用场景（它们在其中出现的命题）并将备选的解释代入其中，看看所得到的命题是否仍然保持原意或会否产生明显的怪论。理想的解释应该能顺利地运用于各种场景。

弗雷格最后给出的答案是将数解释为由概念组成的在概念的“等数”这个等价关系下的诸等价类。今天看来，弗雷格实际上将算术建立在了一种关于概念的二阶逻辑（其中一阶变元遍历个体，二阶变元遍历概念）之上，而这个基础是不一致的。公正地说，弗雷格的失败是偶然的，从某种意义上也是可修正的。重要的是，他所使用的研究方式，经过罗素的发展与宣传，逐渐成为早期分析哲学的“典范”。

另一项不得不提的工作是刘易斯（Clarence Irving Lewis）在《符号逻辑调查》[4] 中对“蕴含”概念的处理。众所周知，这本书是当代哲学逻辑奠基作之一。而事实上，刘易斯在书中为自己设定的任务也是有关数学基础的。刘易斯批评却无奈接受了他那个时代的“纯数学不再关心公设和定理的真，且定义总是随意的”。但他坚持，一个符号逻辑系统“只有当其中的‘蕴含’的意义是‘恰当的’（proper）时，*它才能作为有效推理的标准*”。[4, 324] 因此，他的主要目的就是寻找“蕴含”的“恰当的”含义。

罗素在《数学原理》中是这样解释“蕴含”的：“$p \to q$ 等价于 $\neg(p \wedge \neg q)$，它是真的当且仅当并非 p 真且 q 假”。我们知道，这种解释会导致“真命题被一切命题蕴含”以及“假命题蕴含一切命题”。刘易斯将蕴含的这种解释称作*实质蕴含*，并指出实质蕴含“显然是关于命题真值之间的关系，而不是命题的内容或含义之间的关系”。[4, 326]。与此相对，他提出了一种称作“*严格蕴含*”的概念。

我们知道，“蕴含”是一种基础逻辑概念，通过归约的方法来解释往往或进入循环或毫无用处。对这类基础逻辑概念的解释方式有两种，一种是提供语义模型，另一种就是公理化的方法[3]。刘易斯主要采取了公理化的方法。他给出了一个严格蕴含逻辑的公理系统，其中既有表示实质蕴含的符号 $\subset$，也有表示严格蕴含的符号 $\prec\!\!3$。接着，他证明了实质蕴含的公理系统是它的一个子系统。而严格蕴含逻辑去掉实质蕴含符号的部分构成了另一个子系统——日常推理演算（the calculus of ordinary inference）。后者接

[3]简单地说，用语义模型解释基础概念就是定义一个涉及有关概念的命题在哪些“场景”下为真。前一段中对实质蕴含的解释实际上是提供了一个语义模型——真值表。而公理化方法表现为枚举一些含有有关概念的命题，以及推演规则，由此可以推出更多命题。这些命题是被预期为真的。公理化方法本质上就是直接提供一个能行方法来选出一些涉及该概念的被预期为真的命题。两种方法可以结合使用，既给出公理系统，也提供语义模型，再证明公理系统的推论在该语义模型下的解释都成立，即可靠性证明。

近刘易斯心目中对“蕴含”概念“恰当的”的解释。

刘易斯是这样为严格蕴含概念辩护的。首先，他利用他对实质蕴含和严格蕴含概念的公理化得到有关概念的很多推论。再在一系列案例中检视这些推论是否能够反映案例中的蕴含概念。例如，$q \subset (p \subset q)$ 是实质蕴含逻辑系统的一个推论，但是我们不会仅仅因为“$2+2=4$”而认为，“月亮是由绿色奶酪做成的”蕴含“2+2=4”。对严格蕴含的辩护中，比较棘手的问题是日常推理演算系统中与实质蕴含系统中类似的定理：$\sim p \strictif (p \strictif q)$ 和 $\sim -p \strictif (q \strictif p)$。即“如果 p 是不可能的，那么 p 蕴含任何命题 q”以及“如果 p 是必然的，那么 p 被任何命题蕴含”。为此，刘易斯必须论证，例如，“在‘蕴含’的通常意义上，不可能的命题的确蕴含任何东西”[4, 336]。为此，他还是给出了几个自然语言中的具体例子说明关于严格蕴含的这两个推论并没有什么不对。接着，他试图给出更一般的证据，以“p 蕴含非 p”这个不可能的命题为例：

> 【要证明】如果 p 蕴含非 p，那么 p 蕴含任何命题 q。我们已经证明了，如果 q 蕴含 r，那么“q 是真的且 r 是假的”蕴含任何命题。因此，如果 p 蕴含非 p，“p 是真的但非 p 是假的”，即“p 是真的且 p 是真的”蕴含任何命题 q。但是 p 等价于“p 是真的且 p 是真的”。因此，如果 p 蕴含非 p，p 蕴含任何命题 q。[4, 338]

刘易斯宣称他的证明“不依赖任何符号系统，只使用了日常逻辑中无可非议的原理”[4, 336]。因此，这个看似自欺欺人的论证最终还是诉诸我们对逻辑概念的常识理解。[4]

容易看出，刘易斯为严格蕴含所做的辩护与弗雷格和罗素的工作有着类似的形式。《论指称》中处理的对象是指称短语，《算术基础》的问题是“数”这个概念，而《符号逻辑调查》的主题是“蕴含”。它们都是语言的

[4] 关于语义模型和公理化方法，值得再书几笔。公理化显然不是完美的解决方案，毋宁说是不得已为之。当用公理化方法来处理一些较模糊的概念时，相应的公理系统往往是缺乏自明性的。要论证这些公理系统的合理性，最好的办法还是建立语义模型，并证明可靠性。这是当代哲学逻辑研究中常规的辩护策略。因为语义模型往往就是对相关命题具体使用场景的一个抽象，例如时态逻辑中的时间轴（或偏序）或博弈论逻辑中的游戏的诸局面。但是在考虑一些基础概念的时候，相应的语义模型往往很难找到，甚至没有找到的希望。针对经典谓词逻辑和模态逻辑比较令人满意的语义解释直到上世纪三十年和五六十年代才分别由塔斯基（Alfred Tarski）和克里普克（Saul Kripke）给出，比相应的公理系统晚了好几十年。而几乎没有人相信能找到一个正确反映“集合”概念的语义模型。公理化方法还有一个严重的问题是它的完全性，即利用它是否能判断每个相关命题的真假。完全性的证明往往比可靠性难得多，并且对于一些基础概念，我们无法指望能找到关于它们的完全的公理化方法的解释。即使如此，公理化方法往往是我们最后的手段。

构件，并出现在一些哲学问题的陈述中，造成困扰。另一方面，它们解决问题的方式，也即所谓“语言分析”的结果都是给出一个更清晰明确的解释（或得到这种解释的一个能行方法）。例如，罗素给出了把含有指称短语的命题转化为不含这种短语的谓词公式的能行方法，弗雷格把“数”显定义为一种由概念组成的类，刘易斯则用一组公理来刻画“严格蕴含”概念。所谓“语境原则”，不仅体现在最终给出的语义解释往往是语境敏感的，[5]更多地是指他们的辩护策略。这类辩护实际上是一组思想实验，通过更换语境（变量）来检验各种备选的解释（理论假设），如果有且仅有一种解释能通过所有的检测，那么它自然是最似真的了。

以上便是笔者为早期分析哲学研究总结的共有的形式上的特征。因此，为说明下面几则数理逻辑研究秉承了早期分析哲学的传统，我们也将主要考察这几点：(1) 它们的研究对象、(2) 它们的解决方案或预期成果的形式以及 (3) 它们的论证方式。接下来的介绍中，我们不可避免会遇到一些琐碎的技术细节。笔者将尽力减少使用符号化语言。也建议读者在阅读时可以拉开一点距离，不必纠结于细节而试图把握那些研究的全貌。

3 波斯特与相对可计算

熟悉递归论的人都知道，图灵（Alan Turing）、哥德尔（Kurt Gödel）、丘奇（Alonzo Church）以及克莱尼（Stephen Cole Kleene）分别从各自直观出发给出“能行可计算”概念的刻画并最终被证明为两两等价的故事。由此，丘奇论题（Church’s thesis）宣称：他们的定义正确地刻画了“能行可计算”概念。在此之前，人们可以通过给出具体的算法来证明某个问题是能行可计算的。但由于没有“能行可计算”概念的严格定义，人们无法证明一个问题是不可计算的，即使它真的是不可计算的。综合考虑难度、问题解决的程度以及带来的收益，这也许是人类对抽象概念分析最成功的一次。然而，我们知道，能行过程（总有有穷的刻画）只有可数多，而问题（通过编码可以看作是自然数的子集）有连续统那么多，因而绝大多数的问题不是能行可计算的。因此，人们试图推广“可计算”概念来刻画那些问题的复杂程度。

“可计算”概念自然的推广就是“相对可计算”。例如，运用简单的对

[5]譬如刘易斯对蕴含的解释：只考虑真值的时候可以解释为实质蕴涵，而在考虑到内容和含义的日常理解中，往往应该解释为严格蕴含。又例如罗素对指称短语的解释实际就是一个函数，以含有该短语的命题为输入（语境），以改造后的命题为输出（解释）。

角线法，我们可以证明任给一个计算机程序的停机问题（在某些输入下会不会停机）是不可计算的。但如果我们通过某种方式（神谕？）知道了每个程序是不是在任何输入下都会停机这个秘密，那么任给一个程序 P，要知道它在输入 x 下会不会停机，只需要把它能行地改造成一个程序 $P|x$（这个程序在任何输入下都调用程序 P 并自行输入 x）。显然，$P|x$ 要么在任何输入下都停机，也即 P 输入 x 会停机，要么在任何输入下都不会停机，也即 P 输入 x 会进入死循环。而我们知道 $P|x$ 是不是在任何输入下都会停机，因而就能判定 P 输入 x 会不会停机。由此，我们可以说计算机程序的停机问题不比判断程序是不是在任何输入下都会停机这个问题更复杂。

图灵在他的博士论文中就给出了相对可计算性的一个定义。我们知道，图灵对可计算性的定义基于图灵机这个数学模型：一个问题是可计算的当且仅当有一台图灵机来计算它。而针对相对可计算性，图灵将图灵机概念推广为带神谕（oracle）的图灵机：我们说问题 A 相对于问题 B 是可计算的，当且仅当存在一个带神谕的图灵机以 B（的答案）为神谕正好能计算 A。图灵的定义就如他关于可计算性的定义一样，清晰明确。但故事尚未结束。按照可计算性概念的定义，我们可以比较容易地把握这个概念的外延，即哪些问题是可计算的，哪些是不可计算的。但是相对可计算性这个概念的外延并没因为这个定义而马上变得清晰。澄清相对可计算性概念的外延正是经典递归论的核心问题。而波斯特 1944 年的文章《正整数的递归可枚举集和它们的判定问题》[7] 第一次提出并试图回答这个问题，因而可以被认为是递归论真正的起点。

在文中，波斯特首先把考虑范围限制在递归可枚举集。“可枚举”是比“可计算”更宽泛的概念。*可枚举集*可以被定义为一个程序通过不断枚举其中的元素而生成的集合。对于每个可计算的集合，我们都有一个程序来判定每个自然数是不是在其中，而若得到答案“是”就可以把该数字“放到”集合中，因此可计算的集合都是可枚举的。反过来，我们之前提到的停机问题不是可计算的，但它却是可枚举的：每当有一个程序在某个输入下停机的时候，我们便把它们的编码放到集合中。因此，存在不可计算的可枚举集。此外，也容易证明所有递归可枚举集都相对于停机问题可计算。换句话说，停机问题是所有递归可枚举集中最复杂的。这样，波斯特就先把问题限制在考虑这可数多个比较好处理的（复杂程度不超过停机问题的）集合上。

不同于“可计算”概念，“相对可计算”是一个二元谓词。因此，它的

外延是一个关系。波斯特将基于带神谕的图灵机定义的“相对可计算”关系称作“图灵归约”，我们说集合 A *图灵可归约*到集合 B，记 $A \leq_T B$，当且仅当存在以 B 为神谕的图灵机正好计算 A。很自然地，我们定义两个集合 A 和 B 是*图灵等价*的，记 $A \equiv_T B$，当且仅当 $A \leq_T B$ 且 $B \leq_T A$。容易证明，图灵等价是一个等价关系。由此我们可以进一步简化任务。定义*图灵度*为由图灵等价这个等价关系生成的等价类。例如，以集合 A 为代表的图灵度就是是所有与 A 图灵等价的集合组成的类 $[A]_T = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid B \equiv_T A\}$。如果把注意力限制在递归可枚举集，那么我们任务就是搞清楚下面这个序结构：

$$([A]_T, \leq_T)_{A \subseteq \mathbb{N} \text{ 且 } A \text{ 是递归可枚举的}}.$$

在当时，人们只知道，所有可计算集合组成的图灵度是这个序结构的最小元，而以停机问题为代表的图灵度是这个结构的最大元。人们甚至不知道还有没有其他位于中间的图灵度。波斯特在这里提出了著名的“波斯特问题”，即寻找位于可计算与停机问题之间的递归可枚举集的图灵度。波斯特问题的意义在于，如果它得到一个否定的答案，那意味着基于带神谕的图灵机对“相对可计算性”概念的刻画过于粗糙了，以至于几乎无法看出诸问题之间复杂程度的差别。波斯特问题直到大约十年之后才得到正面的答案。

在这篇文章中，波斯特尝试提出了一些更严格的相对可计算概念，更严格的相对可计算概念往往对应更精细的度结构，也许会为我们找到非平凡的图灵度提供线索。

波斯特首先定义的是多 -一可归约（many-one reducible）。我们说一个集合 A *多 -一可归约*到 B，当且仅当存在一个可计算的全函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得对任意自然数 n，$n \in A$ 当且仅当 $f(n) \in B$。也就是说，当我们想知道一个自然数 n 是不是在 A 里面的时候，我们只需要问 B 一个问题，即 $f(n)$ 在不在 B 里面。容易证明，在多 -一可归约关系下，停机问题也是递归可枚举集中最“复杂”的。为寻找在多 -一可归约概念下位于可计算与停机问题之间的度，波斯特注意到停机问题的一个性质：假设 K 是编码了停机问题的一个集合，那么我们可以找到一个能行的方法 f，对每个递归可枚举的集合 $W_e \subseteq \mathbb{N} \setminus K$ 都能找到一个既不属于 K 也不属于 W_e 的自然数 $f(e)$。波斯特认为这个性质是对哥德尔不完全性定理的推广，显示了数学不断创造的本质，因此将具备这种性质的集合命名为*创造集*。接着波斯特根据“创造集”的特征“量身定做”了一种集合：我们称一个集合 S 是简

单集，当且仅当它是递归可枚举的，它的补集是无穷的且与所有无穷递归可枚举相交。显然，一个简单集的补集不是递归可枚举的，因而它不是可计算的。另一方面，容易证明创造集都不能多 -一归约到一个简单集。[6]接着，波斯特证明确实存在一个简单集。那么，这样一个集合的复杂度在多 -一可归约的意义上就严格位于可计算集和停机问题之间了。遗憾的是，波斯特马上发现存在在简单集，它们在图灵可归约意义上是递归可枚举集中最复杂的，也即可以用来计算停机问题。这意味着，第一，简单集的存在无法作为波斯特问题正面解的一个见证；第二，多 - 一可归约作为对相对可计算概念的刻画可能太苛刻了，一些直观意义上相对可计算的在多 -一可归约意义上是不可计算的。

接下来，一个自然的想法就是稍微放宽相对可计算概念的要求。波斯特定义了一种介于图灵可归约与多 -一可归约之间的概念——真值表可归约（truth-table reducible）。我们称集合 A *真值表可归约*为集合 B，当且仅当存在一个能行的程序 t，当我们希望知道 n 是不是在 A 里面时，我们用 t 计算出一个真值表 $t(n)$，再比对 B，取 $t(n)$ 中与 B 的前段相符的那行作为答案。与多 -一可归约定义中只能问 B 的一个位置的值相比，真值表可归约允许一次性问 B 中任意有穷个位置的值。但这个概念相对图灵可归约还是有更多的限制。与图灵可归约不同，真值表归约只有问一次问题的机会，不允许根据 B 的反馈调整下一个要向 B 咨询的问题，而这种“互动”在相对可计算概念的直观中似乎是应该被允许的。可以类似地证明，存在一个简单集在真值表可归约意义上是所有递归可枚举集中最难的。这说明，真值表可归约的确是比多 -一可归约更宽松的相对可计算性概念，也进一步佐证了多 -一可归约作为对相对可计算性概念的刻画过于严格了。

显然，寻找在真值表可归约意义上介于可计算性问题和停机问题之间的度会更困难。波斯特设法给出了比简单集更严格的定义：我们说集合 A 是*超简单*的，当且仅当它是递归可枚举的、它的补集是无穷的，并且与所有由自然数的有穷集合组成的无穷的递归可枚举集合族相交。可以证明，存在一个超简单集且创造集都不能真值表归约到一个超简单集。因而，超简单集的存在似乎有成为波斯特问题正面解的一个有力的候选。然而，再一次，波斯特证明了超简单集可以与停机问题图灵等价。因而，这个方向

[6]假设 S 是简单集、函数 f 见证 C 是创造集，且存在一个可计算函数 $g : C \to S$ 见证 C 可多 -一归约到 S。那么，对任意 S 补集的一个有穷子集 A_0，$f^{-1}[A_0]$ 是 C 的补集的一个递归可枚举的子集，因此我们可以能行地找到一个在 C 的补集中而不在 $f^{-1}[A_0]$ 中的元素 n_{A_0}，而 $g(n_{A_0})$ 就是一个在 S 的补集却不在 A_0 中的元素。由此，我们可以生成一个与 S 不相交的无穷递归可枚举集，矛盾。

的努力再一次失败，并且暗示了真值表可归约仍然是过于严格的刻画。那么接下来自然的想法是定义更精密的概念，如超超简单集。我们现在知道，波斯特在这篇文章中并没有解决自己提出来的问题，十年后问题的解决也并不是按照他开创的这条路线。但是，波斯特 1944 这篇文章提出的诸概念以及基于其上的研究规划实际上开创了递归论这门学科。至今为止，递归论研究的核心问题还是基于图灵可归约、真值表可归约或多 -一可归约等相对可计算概念的度结构。

我们简要回顾波斯特 1944 年这篇文章的形式。文章试图分析的是“相对可计算性”这个概念。图灵运用带神谕的图灵机给出了对这个概念的一个精确的数学定义，这是一个归约式的解释，波斯特显然非常认同。但是仍有遗留的问题。一个是，如何为这个刻画提供辩护。另一个是，这一解释虽然是一个毫无歧义的精确定义，但不自然意味着我们就能清楚地掌握这个概念的外延。反倒是，我们对它的外延几乎一无所知。波斯特的规划就是要搞清楚这个外延，并且相信随着我们对其外延的认识越来越清晰，也就会有越来越强的信心认为图灵的这个刻画是正确的解释。反过来，波斯特还提出了对“相对可计算”概念的其他可能的定义。但是通过证明这些刻画的一些性质显示出这些它们未能正确反映我们对“相对可计算性”概念的直观（例如，过于严格了）。而这些又进一步佐证图灵可归约刻画的正确性。这与在经验科学研究过程中发生的故事具有几乎相同的形式，也符合我们之前总结的分析哲学传统。

4 随机性理论

对随机性概念的研究是近年来递归论的新热点，有人甚至认为随机性的研究使递归论重现活力。与可计算性理论不同，人们至今对随机性概念提出了多种定义，但还没有一种是特别令人满意的。

人们对随机性的刻画主要基于下述直观。一、不可压缩性。人们一般认为随机的字符串信息量很大，无法被压缩为更短的字符串。二、不可预测性。对一个随机的 $\{0,1\}$—序列，我们应该无法预测在某一位上是 0 还是 1，即使我们已经知道之前的位置上是什么了。三、独特性。考虑由无穷 $\{0,1\}$—序列组成的康托尔空间[7]，我们应该很难把握一个随机的无穷 $\{0,1\}$

[7]康托尔空间是集合 $\mathcal{C} = \{X \mid X$ 是无穷 $\{0,1\}$—序列$\}$ 上以 $\{x^{\prec} \mid x$ 是有穷 $\{0,1\}$—序列$\}$ 为基的拓扑空间，其中 $x^{\prec} = \{X \in \mathcal{C} \mid X\upharpoonright|x| = x\}$ 是由 x 的所有无穷扩张组成的集合。

—序列的特征。具体点说，我们应该很难得到一个很小的康托尔空间的子集（例如 0 测度的集合）包含（抓住）这个 $\{0,1\}$—序列。

安德雷・柯尔莫哥洛夫（Andrey Kolmogorov）较早从不可压缩性这个直观来定义随机性。柯尔莫哥洛夫处理的是有穷字符串。给定一个程序 M，我们说字符串 x 可以被程序 M 压缩为 y，当且仅当 $M(y)=x$。而 x 相对于 M 的复杂度就是它能被程序 M 压缩成的最短的字符串长度：$K_M(x)=\min\left\{|y| \;\middle|\; M(y)=x\right\}$。运用构造通用图灵机的方法，我们可以找到一个通用压缩程序 U，使得对任意程序 M，存在一个常数 c_M 有

$$K_U(x) \leq K_M(x)+c_M$$

假设，ID 是一个执行等同运算的程序（输入什么输出什么）。那么，对任意长度为 n 的字符串 x，我们总可以找到一个常数 c，使得

$$K(x)=K_U(x) \leq K_{ID}(x)+c=n+c.$$

取 c 为最小的满足上式的常数。容易看出，对任意 n，满足

$$K(x) \geq n-c$$

的长度为 n 的字符串不超过 x^n-2^{n-c}。柯尔莫哥洛夫把这些难以压缩的字符串称作是随机的。注意，由于 c 是常数，随着 n 的增加，绝大多数长度为 n 的字符串都是随机的。

马丁—洛夫在《随机序列的定义》[5] 中将柯尔莫哥洛夫的定义推广到无穷 $\{0,1\}$—序列，开创了现代的随机性理论。他基于独特性的直观定义了马丁—洛夫随机性概念。这是目前最受关注的随机性概念。

独特性的关键在于如何刻画“很难得到”那样一个很小的集合。如果，我们说任何一个被零测度集合“抓住”的无穷 $\{0,1\}$—序列都不是随机的话，在这个“最强”的随机概念下就没有随机序列了，因为每个无穷 $\{0,1\}$—序列的单点集都是零测的。对此，马丁—洛夫定义了一个“测试”概念来刻画哪些零测集是可以能行地得到的。这样，随机序列就是无法被一个可以能行地得到的零测集“抓住”的序列。定义一个马丁—洛夫测试是一个递归可枚举的开集序列 $\langle U_m\rangle_{m\in\mathbb{N}}$，且 U_m 的测度 $\mu(U_m)\leq 2^m$。因此，一个马丁—洛夫测试就像一系列可以能行地得到的套娃，并且其大小也能行地趋向于零。我们说一个无穷 $\{0,1\}$—序列是马丁—洛夫随机的，当且仅当它不被任何一个马丁—洛夫测试“抓住”，即不属于那些 $\bigcap_m U_m$。

在文章中，马丁—洛夫把柯尔莫哥洛夫的定义推广到无穷 $\{0,1\}$—序列，即一个 $\{0,1\}$—序列是随机的，当且仅当它有无穷多个不可压缩的真前段。并且证明了这两种定义是等价的。此外，他还证明了马丁—洛夫随机序列满足统计学上对随机的要求，如大数定律和重对数定律等。然而，马丁—洛夫并没有急于宣称这个定义就是正确的定义。

后来，马丁—洛夫随机也确实遭受了不同方向的挑战。例如施诺尔（Claus P. Schnorr）[1] 认为马丁—洛夫测试并不是一个能行地得到一个小集合的过程。为此，他提议了另两种随机性概念。一个是*施诺尔随机*。与马丁—洛夫随机类似，一个施诺尔随机序列必须能通过所有施诺尔测试。但是施诺尔测试的定义更严格，要求马丁—洛夫测试定义中的每个 U_m 的测度是一个可计算的实数，或者干脆要求 $\mu(U_m) = 2^{-m}$。另一个是称作*可计算随机*（computable randomness）的概念。可计算随机概念来源于不可预测性这个直观。想象我们和庄家就某一个给定的无穷 $\{0,1\}$—序列 Z 对赌，已知 Z 的有穷前段，猜下一个数字是 0 还是 1。一个赌博策略（martingale）可以被刻画成一个以有穷 $\{0,1\}$—序列为变元，以实数对（分别表示下一个数是 0 和 1 的概率）为值的函数。一个无穷序列 Z（赌局）和一个策略就决定一个结果，即策略函数在 Z 的所有真前段下的值的极限。如果这个极限趋向无穷，我们就说这个策略在 Z 上赢了。我们说一个无穷 $\{0,1\}$—序列 Z 是*可计算随机的*，当且仅当任何可计算的策略都无法在 Z 上获胜。可以证明，一个无穷 $\{0,1\}$-序列是马丁—洛夫随机的，当且仅当任何递归可枚举的策略都无法在其上获胜。一个递归可枚举的策略似乎不符合我们的直观。显然，施诺尔随机性与可计算随机性都比马丁—洛夫随机性弱。事实上，可以证明

$$\text{马丁—洛夫随机} \Rightarrow \text{可计算随机} \Rightarrow \text{施诺尔随机。}$$

并且，前面的都比后面的严格地强。此外，这两个更弱的随机性概念几乎保持了所有马丁—洛夫随机性的好性质。譬如，两者都满足统计学的要求，大数定律和重对数定律等。施诺尔随机性也有等价的运用不可压缩直观的定义。但也有负面的事实，存在施诺尔随机的无穷 $\{0,1\}$—序列，其偶数位置和奇数位置组成的两个子序列互相可计算，也就是说，知道了偶数位置的值就可以推出全部的值。而这在马丁—洛夫随机序列上是不可能发生的。

另一方面，也有声音认为马丁—洛夫随机太弱了。我们说一个无穷 $\{0,1\}$—序列 Z 是*左递归可枚举的*，当且仅当我们可以枚举所有在它“左

侧”的有穷序列

$$\{x \mid \text{存在 } n < |x| \text{ 使得 } x{\upharpoonright}n = Z{\upharpoonright}n\text{，}x(n) = 0 \text{ 且 } Z(n) = 1\}.$$

这种可以被能行地“从左到右逼近”的无穷序列似乎不符合随机性的直观。但确实有许多马丁—洛夫随机序列是左递归可枚举的。因此，我们似乎又需要更强的随机概念。为得到更强的随机概念，一种方法就是增加更多的测试。例如，我们弱化马丁—洛夫测试的条件，不再要求那些 U_m 的测度以能行地方式减少，而仅仅要求最终 $\mu(\bigcap_m U_m) = 0$。这样就得到了*弱 2-随机性*（weakly 2-random）概念。如果，我们把马丁—洛夫测试中的递归可枚举条件放宽为以停机问题为神谕的递归可枚举（枚举程序可以咨询停机问题），那么我们就得到了 *2-随机性*。相应地，马丁—洛夫随机也被称作 1-随机。当然，我们还可以进一步放宽条件允许更强的测试，譬如 Δ^1_1 的零测集、Π^1_1 的零测集……这样，我们就有

$$\Pi^1_1\text{-随机} \Rightarrow \Delta^1_1\text{-随机} \Rightarrow 2\text{-随机} \Rightarrow \text{弱 } 2\text{-随机} \Rightarrow \text{马丁—洛夫随机}$$

至今为止，大部分的随机性概念都按强弱排列成线序。这似乎暗示着，真正的随机性概念就是其中的一个。但如果出现越来越多不可比的随机性概念（事实上已经有一些被发现），那么情况会变得更加扑朔迷离。

当代递归论学家们也在更多地研究随机性与可计算性的互动，通过引入可计算性理论的概念似乎能帮助我们加深对随机性概念的理解。例如，我们可以证明一个很不随机的序列包含的信息很少（作为神谕并不能增加多少计算能力）。我们定义一个无穷 $\{0,1\}$—序列 X 是*K- 平凡的*（K-trivial），当且仅当存在一个自然数 c，使得对每个 X 的真前段 $X{\upharpoonright}n$ 都有 $K(X{\upharpoonright}n) \leq K(n) + c$。也就是说 K-平凡的序列的每个真前段都不会含有比它的长度多很多的信息。显然，K-平凡刻画了我们对“不随机”的一个直观，K-平凡序列在几乎所有随机性概念下都不是随机的。而我们可以证明，如果一个序列 X 是 K-平凡的，那么相对与 X 的马丁—洛夫随机（在定义测试时我们允许枚举程序咨询 X）与马丁—洛夫随机是等价的。这个结论似乎非常符合我们的直观：不随机的序列不能提供很多信息。然而，递归论学家们还发现了一些出人意料的结果。这些结果大致可以被理解为，如果一个序列 X 已经在某种程度上是随机的了（如施诺尔随机或马丁—洛夫随机），那么它越随机（如弱 2- 随机）当且仅当它越接近可计算（如利用停机问题能算的不可计算的问题用它都不能算，或被一个可计算的函数支配）。这似乎与人们预期的越随机就包含越多信息的直观相反，而似乎是

随机到一定程度，再随机的话包含的信息反而越少。这些定理不仅仅是关于某一个对随机性概念的刻画的，而是组成了一幅图画帮助我们更新了对随机性概念的直观。

虽然，我们对随机性理论发展的梳理非常粗略，但由此得出以下结论大概也不会与事实偏差太多。首先，随机性理论研究的主题显然是分析“随机性”这个概念。其次，早期相关学者预期的分析成果是对“随机性”概念的一个严格的数学定义，并且这个定义完美地反映了我们的直观。最好类似“可计算”的例子，人们从不同的角度接近这个概念却给出了相同的答案。然而现实是，有许多被证明为不等价的随机性概念被提出，它们大多很好地反映了我们的直观，有一些也有来自不同角度的等价定义，而它们也都多少有一些可以被质疑的地方。这使得一些学者相信，由不同随机性概念组成的详细的层谱已经是一个理想的结果了，也许并没有一个典范的随机性概念，而是应该总谈论一个序列随机的程度。最后，无论要为某一个对随机性的刻画辩护还是为随机性概念的层谱论辩护，人们所依据的都只能是不断被发现的关于这些定义的推论。例如，如果更多的随机性概念被发现且都很好地按照强弱排列为一个线序，那么层谱论会得到更多的支持；而如果能发现一个比马丁—洛夫随机性更符合能行性直观而又等价的刻画（Kolmogorov-Loveland 随机性是个有前途的候选 [6]），那么施诺尔对马丁—洛夫随机性的指责就会显得不再有效。这里，所谓的“语境”就是由关于随机性概念的各个定义所证明的诸多命题。有的命题是关于不可压缩性的，有的命题关注统计学的要求，有的命题则是有关与可计算性概念的互动的。我们把随机性概念放到这些命题中。一些命题可以放大不同定义之间的细微差别，让我们能够更一目了然地判断这些刻画与我们的直观是否相符亦或相冲突。有趣的是，人们也会得出一些出人意料的命题，这些结果往往会更新人们对一些概念的直观。这些都多少可以被看作是对“语境原则”的实践。总之，我们认为当前非常活跃的随机性概念研究仍然符合早期分析哲学中体现出来的研究形态。

5 结语

笔者希望读者能够认可以上两则案例确实支持了笔者的观点：当代数理逻辑研究继承了早期分析哲学的特征，仍然可以被看作是一种分析哲学的研究。尽管要令人信服地论证这一观点，笔者还需要提供更多的例证。

事实上，数理逻辑在集合论、证明论等方向上也确实还有许多很好的案例，只是限于篇幅我们就此打住。另外值得注意的是，上述这些研究都不是在一篇文章中或由一个人完成的。而是围绕着对一个概念的分析吸引了一批学者工作其上，甚至开创了一个学科，而这些人的工作成果（那些被证明的定理）可以累积起来，不断深化我们对有关概念的理解。康德问哲学作为科学如何可能，实际是在问哲学何以进步。如果把数理逻辑看作是哲学的一种形态，也许就已经给出了答案。

5.1 分析哲学与数理逻辑何以渐行渐远？

笔者试图向读者解释当代数理逻辑仍然是一种分析哲学这一努力的前提是分析哲学与数理逻辑渐行渐远的现状。无论为了鼓励改变这个现状，还是仅仅为了论证上述观点，通过一个史学的研究来探寻造成这一现状或时代偏见的原因似乎是不可避免的。接下来，我们就试图回答这个问题。只是，笔者才疏学浅，恐怕难免偏颇。

正如我们在引言中谈到的，分析哲学之产生得益于现代逻辑的出现，这是逻辑史上五百年，甚至两千年未有的重大突破。从十九世纪末到二十世纪中叶，形成了逻辑学发展的黄金时期。在这期间，逻辑学吸引了最优秀的数学家和哲学家工作其上，产生了大量经典的定理，改变了数学和哲学的版图。然而自哥德尔之后，除了科恩（Paul Cohen）在 1963 年运用力迫法对连续统假设独立性的证明之外，再没有数理逻辑领域的重大发现能吸引哲学界的关注了。数理逻辑本身的衰落也许得为哲学家们的离开负相当一部分责任。当然，数学中重大定理的发现总是不期而至，学科的兴衰总是带有很多偶然性，停留在这样的原因上似乎无法带给我们什么启示。

在分析哲学方面，针对自然语言的态度有两个传统。一种是批评的态度，认为自然语言不精确，导致了许多问题，应该被改造。典型的如卡尔纳普（Rudolf Carnap）认为，哲学问题就应该用人工语言来讨论。罗素也表达过类似的意思，虽然是针对物理学说的："日常语言完全不适于表达真正的物理断言，因为日常生活中的词语不足够抽象。只有数学和数理逻辑可以说出一点物理学家们真正想说的东西。"[9] 另一方面，刘易斯这样的学者则比较同情自然语言，试图解释自然语言中容易令人混淆的概念，并不试图改造或禁止那些说法和表达方式。对于数理逻辑的成果，也只是借用符号化的工具和部分概念，比较有限。当代哲学逻辑多遵循这条道路，与分析哲学有密切的互动。反观前者，过于粗暴，应者了了。由于数学语

言的人工化已经基本完成，数理逻辑的研究者往往不会关注自然语言中的问题，更不会在用自然语言谓述数学产生荒谬时选择同情自然语言。

关于自然语言的态度似乎只是表面现象，背后似有更深的问题。我们不妨看看罗素、卡尔纳普等人倾心于语言分析的“元哲学”。罗素认为语言分析能有效解决问题背后的预设是他的逻辑原子主义。即认为世界是由事实构成，而事实最终是由原子事实复合而成。而组成世界的事实之间的关系对应于语言的逻辑结构。因此，语言分析能帮助我们理解世界。罗素的这个想法，也许受到他在数学基础领域工作的启发。在一个给定的语境和所使用的人工语言（如一阶算术的语言）下，对于原子事实有明确的定义，即原子命题的语义解释。但在经验世界中，逻辑原子主义这个预设是存疑的。卡尔纳普的逻辑经验主义则更直接。他认为，只有逻辑的真和经验的真。许多哲学问题似乎期待一个先天综合判断作为回答，这源于对语言的误用。而用逻辑对语言进行分析，就可以把问题归约为逻辑和经验事实，从而得以解决。卡尔纳普似乎描绘了一个光明的前景，但进入具体的工作就不难发现他似乎过于乐观了。

以卡尔纳普对认识论的处理为例。认识论处理经验知识何以可能等问题。按照逻辑经验主义，对认识论问题的回答，要么必须诉诸经验（容易陷入循环论证），要么只需要纯逻辑的论证。卡尔纳普选择了后者。简单来说，他认为经验知识可以通过定义归约为直接的感觉。而经验知识之所以可能，在于承载它们的命题有正确的逻辑形式。奎因（Willard Van Orman Quine）指出他的论证有一个漏洞，即如何从关于主体的心理状态的判断得出关于外部世界的判断。此外，另一个问题是卡尔纳普心目中的逻辑。显然，卡尔纳普对逻辑寄予很大的期望，甚至要单独背负为整个认识论的辩护。卡尔纳普也的确认识到了这点。他心目中的逻辑被称作ω-逻辑（ω-logic），其中允许一种被称作 ω-规则的推演规则。大致可以表示为，如果对每个自然数 n 都可证 $\varphi(n)$，那么 $\forall x \in \mathbb{N}\varphi(n)$（我们假设语言中有一个一元谓词符号 $\mathbb{N}$ 表示自然数）也可证。这是一个无穷的推演规则，加入 ω-规则的形式系统允许无穷长的证明或无穷长的命题，并且它的一个证明不是能行可检验的。更夸张的是，基本的几条算术公理加上 ω-规则就可以推出所有算术真命题。哥德尔不完全性定理对这样的系统不适用，而康德心目中的数学的先天综合判断也全部被纳入卡尔纳普的“逻辑”中了！这些都与我们通常对一个逻辑证明的直观和要求不符。但即使用这种“作弊”的方法，卡尔纳普的路似乎也走不通。取而代之，奎因给出了称作“主体

间性”的解决方案，并且诉诸心理学、甚至进化论来解释主体间性的形成。当代分析哲学的热门话题和研究方向，如心灵哲学、实验哲学多少受此影响，而渐渐远离专攻纯粹概念的数理逻辑。

笔者对当代分析哲学的诸研究方向没有任何意见。只是提醒哲学家们，当代数理逻辑的研究中仍然有许多有趣的问题。而这些问题往往更纯粹，较少牵涉经验杂多。因此，奎因等人对早期分析哲学的批判似乎无法影响到这里。只是，哲学家往往会高估逻辑学或数学的严格性，甚至倾向于认为逻辑学或数学是已经完成了的学科，其中再没有什么哲学问题了。康德在论证数学何以可能的时候，并不是为了改造数学，而只是解释一个业已完备的科学何以可能以便作为未来形而上学的榜样。当代许多哲学家恐怕也是这么看待数学与逻辑学的。但事实并非如此。非欧几何、罗素悖论、哥德尔不完全性定理、连续统假设独立性等发现越来越清晰地揭示了数学或逻辑是是一门永远无法穷尽的学科。借用波斯特评论哥德尔不完全性定理的一段话：

> ……每个符号逻辑都是不完全且可拓展的……数学思考是且必须是保持本质地创新的。在笔者心中，这个结果【指哥德尔不完全性定理】无可避免地导致十九世纪晚期和二十世纪早期整个公理化浪潮的至少是部分的逆转，回归到意义与真，而这才是数学的本质。

波斯特所提到的“本质地创新的”是指那些独立于既有公理系统的命题。按照波斯特所批评的形式主义的理解，数学无非是在公理系统下做推理，数学命题的意义只在于可证与否，无所谓真假，那么独立于公理系统的命题就是无意义的。但如果不接受这种观点，而希望继续追问那些独立命题的“意义与真”，就必须超出既有的数学。此时的数学家们是无助的，哲学有传统也有可能在此提供帮助。

5.2 遗留的问题

或限于笔者的能力或限于篇幅，本文的论证较之结论是不充分的，文中的倡议也需要更多的说服力。综合与郝兆宽教授的讨论以及在西南大学哲学系承办的“第九届全国分析哲学会议”期间得到的诸位专家的意见，笔者认为还有下述遗留问题亟待解决或补充：[8]

[8]这些问题基于笔者对上述专家所提意见的理解，未必反应他们本来的意思。若有不妥，皆由笔者负责。

(1) 当代分析哲学家是否认同文中对早期分析哲学研究形态的总结？

(2) 文中为消融数理逻辑与分析哲学之间的界线所总结的两者共有的特征是否过于宽泛，以至于几乎所有的哲学思辨，数学其他方向的研究，甚至自然科学研究也都满足这些特征？

(3) 数理逻辑即使与分析哲学有着类似的研究形态，但其关注的问题是否终究是技术的而非哲学的？

(4) 为促使分析哲学与数理逻辑重新合作，有必要描绘一幅可预期的前景。数理逻辑可以为分析哲学提供什么，而分析哲学又能为数理逻辑提供什么？

其中，问题 (1) 需要通过与当代分析哲学家们更多地切磋而得以改进。对于 (2)，笔者认为，对于语言的关注是分析哲学与数理逻辑共有的且具有排他性的特征。相信在后续研究中能找到较多的证据支持这一观点。孤立地看本文所讨论的两个案例可能会使读者无法接受把对“相对可计算性”和“随机性”概念的分析当作哲学应该关心问题，从而产生了 (3) 的疑问。笔者相信，如果我们补充更多的数理逻辑研究案例，使得读者能够看到更完整的图景，尤其是这些概念与“证明”、“概念”、“心灵”等抽象概念的联系，那么有关疑虑便迎刃而解了。而问题 (4) 可能会引出一个比较庞大的工程。笔者可以透露目前的一些头绪：数理逻辑在集合论、可计算性与随机性方面的研究成果可以分别为关于概念的理论和心灵与机器问题提供有趣佐证或话题；力迫法可能是数理逻辑为分析哲学所贡献的又一个重要的工具，尚未充分利用；而分析哲学或许可以为数理逻辑研究提供新的提问方式，甚至开辟新的研究方向。

Mathematical logic as a style of analytic philosophy
case studies on computability and randomness theory

Ruizhi Yang
Fudan University

Analytic philosophy has been characterized by its utilization of modern logic. Analytic philosophy and modern logic even share the same origin: not only the same group of people were entitled as the founders, but also the same question they faced yielded the style of research we are acquainted with. It seems however that the later development of analytic philosophy and modern logic, especially mathematical logic, went into disjointed paths. Despite the apparent phenomenon, I would like to argue, through the case studies on the works of Emil Post, Per Martin-Löf and other recursion theorists, that the contemporary research on mathematical logic still share the style of problem-solving with analytic philosophy, i.e. analysis. I would also like to suggest that contemporary analytic philosophers and logicians can still work on the same problems.

Key words: analytic philosophy, mathematical Logic, concept analysis

参考文献

[1] Claus P. Schnorr. A unified approach to the definition of random sequences. *Mathematical systems theory*, 5(3):246–258, 1971.

[2] M. Dummett. *Origins of Analytical Philosophy*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.

[3] G. Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Basil Blackwell, Oxford, j. l. aust edition, 1884.

[4] C. I. Lewis. *A Survey of Symbolic Logic*. University of California Press, Berkeley, 1918.

[5] P. Martin-Löf. The definition of random sequences. *Information and Control*, 9(6):602–619, 1966.

[6] W. Merkle, J. S. Miller, A. Nies, J. Reimann, and F. Stephan. Kolmogorov-Loveland randomness and stochasticity. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2005.

[7] E. L. Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50(5):284–316, 1944.

[8] B. Russell. On Denoting. *Mind*, 14(56):479–493, 1905.

[9] B. Russell. *The Scientific Outlook*. George Allen and Unwin, New York, 1931.