# 哥德尔在构造主义数学方面的工作

杨睿之*
复旦大学

**摘要**

摘要：众所周知，哥德尔是一位实在论者。然而，他在构造主义数学方面也有着精深的研究和重要的工作。例如，哥德尔的否定性翻译和《辩证法》翻译。这些方法在现今的数理逻辑研究，尤其是证明论中有广泛的应用。而本文关心的是这些工作在数学基础和数学哲学方面的价值。我们将介绍、整理哥德尔的这些成果，并试图将它们绘制成一幅围剿直觉主义的布阵图。以此为基础，我们还将讨论其中的薄弱之处，并由此碰触哥德尔哲学中一些挣扎而神秘的地方。

**关键词：**数学哲学　构造主义　实在论

## 1　引言

根据王浩的报道 [1, 11]，哥德尔是这样总结自己的主要成就的：

> 给出了谓词逻辑完全性的证明；对任何给定形式化数学公理系统找出一在该系统中不可判定的刁番图分析问题的方法；选择公理、康托尔连续统假设与集合论常设公理一致性的证明；基于爱因斯坦引力论的旋转宇宙构造法。[1, 11]

这些数学成果往往以无可置疑的方式直击哲学问题的核心，迫使后来有关哲学讨论必须以它们为前提。但是，“1929-1930 年间来得又早又快的辉煌成功无疑使他形成一种嗜好，总想找能靠数学考虑来澄清的概念性问题。”[1, 31] 根据许多文献的报道，哲学问题始终是哥德尔的主要兴趣。然而，他在大约 1943 年放弃对连续统假设的独立性证明并一心一意转向哲学后所

*本文得到教育部人文社会科学研究青年项目——“当代集合论哲学及其对数学基础研究的影响”（13YJCZH226）、复旦大学新进青年教师科研起步项目以及复旦大学青年教师科研能力提升项目资助。

做的大量工作并没有给出像他早年得出的那样掷地有声的结论，自然也未能让他自己满意。但后来的研究表明，哥德尔的哲学思想是具有相当独创性的，尤其在数学哲学的后哥德尔定理时代具有重要地位。

作为一名实在论[1]者，哥德尔对直觉主义[2]也颇有研究。他在 1932-1941 年间做了一系列关于直觉主义数学的工作。或许他希望以同样的方式，即以纯数学的考虑完成对直觉主义的否证。哥德尔本人没有把他在直觉主义数学方面的任何工作列为他的主要贡献，正如他也只字未提他在哲学方面的工作一样。可以想见，这些结果未能如哥德尔所期望那样带来强健的哲学后承。并且，这些成果虽然对现代证明论等一些方向的研究有开创性的影响，其证明所用到的技术本身却并不复杂。因此，这些工作也并没有引起学界很大的关注。对这些工作的梳理整合亦暂付阙如。哥德尔的这些工作发生于他从逻辑逐渐转向哲学的过渡阶段。显然这些工作的指向性反映了哥德尔一贯的哲学立场。同时，哥德尔对这些工作哲学意义的不满意也与哥德尔哲学中的那些根本困境有着深刻的联系。因此，对这些工作的整理与分析对完整把握哥德尔思想以及其中的困难可能是非常有价值的。

本文所要讨论的是哥德尔分别在 1932 年 [7]、1933 年 [9][8] 以及 1958 年 [11] [3] 发表的几篇文章中的工作。[4] 这些文章都被收录在哥德尔文集第一卷 [14] 和第二卷 [15] 中。这些工作的时间有一定跨度。哥德尔本人的哲学思想也会随时间有所微调（虽然他的实在论立场是一以贯之的）。我们也并不力求还原哥德尔本人的所有想法，而是更注重这些结论与有关哲学观点及其推论的互动本身。

## 2 直觉主义的逻辑

众所周知，对排中律的拒斥是直觉主义数学哲学的标志。直觉主义者认为数学是人的心灵的构造，而不是如实在论者所宣称的独立的存在。同样，数学真也无法独立于人的认识。布劳威尔宣称："不存在没被经验到的真"[5, 90]。换句话说，只有被数学家们经验到为真的才被承认为数学真。

[1]实在论，一般又称柏拉图主义。简单地说，是指承认抽象对象实存的哲学立场。在数学哲学中，尤指强调数学对象，特别是无穷的数学对象（没有物理对应）存在的立场。

[2]直觉主义作为一种典型的构造主义，是与柏拉图主义或实在论根本相对的数学哲学立场。在一些著作中构造主义也被等同于直觉主义。

[3]哥德尔的这篇文章又被翻译为英文并发表为 [13]，稍作修改并加入若干重要的注释。

[4]下文中引文若未特别标出，则默认引自相关内容所对应的这几篇文章中。

当然，布劳威尔不是一个经验主义者，他还是相信数学的真是先天的。他追随康德，将这种先天性归于人们的直觉，尤其是时间直觉。但承认数学真的先天性并不等同于认为每个数学命题都有一个客观的真值。[5]若是这样的话，直觉主义在数学实践上与实在论等其他数学哲学立场就没什么差别了，直觉主义哲学立场的坚持似乎是无关紧要的了。因此，要求改造经典逻辑，也即对排中律的拒斥成为直觉主义的一面旗帜，使其区别于其他立场，成为数学哲学主要流派之一。

按照布劳威尔的要求，要使"$A$ 或非 $A$"（用符号表示为 $A \vee \neg A$）为真，除非经验到 $A$ 为真或者经验到 $\neg A$ 为真。或者按照海丁等直觉主义者的解释，要证明 $A \vee \neg A$，即要么（构造性地）证明了 $A$，要么证明了 $\neg A$。因此，$A \vee \neg A$ 并不总是成立（或能被证明），因为即没有经验到（证明）$A$ 又没有经验到（证明）$\neg A$ 的情况总是有可能的。直觉主义的这种诉求被海丁 [16] 形式化为直觉主义命题逻辑、谓词逻辑系统。简单地说，直觉主义命题逻辑（**IPC**）与经典命题逻辑（**CPC**）正好相差一个排中律。

## 2.1 直觉主义逻辑的语义

反对排中律又可以被解读为对命题逻辑二值性语义解释的否认，即认为一个命题除了被接受为真、为假（其否定为真）还有其他的状态。例如，它和它的否定都无法被认定为真的状态。哥德尔在《论直觉主义命题演算》[7] 中的结果却证明了，**IPC**"不存在只含有有穷元素（真值）的语义实现"。

为此，哥德尔首先证明了在 **CPC** 和 **IPC** 之间存在无穷个逻辑系统排列成严格递降的线序。

$$\mathbf{CPC} \supset L_3 \supset L_4 \supset \ldots \supset L_n \supset \ldots \supset \mathbf{IPC}. \tag{2.1}$$

其中 $L_n$ 为 **IPC** 中加入公式

$$F_n = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (a_i \leftrightarrow a_j).$$

$F_n$ 好像在说，至多有 $n$ 个"真值"。显然排中律蕴含"至多有两个真值"，所以 $\mathbf{CPC} = L_2$。又容易构造正好含有 $n+1$ 个元素（真值）的线性海丁

[5]康德显然没有意识这点，他将数学作为新形而上学的模范。也许他会认为任何一个数学问题终究会从人们的时空直观中找到答案。显然，布劳威尔的立场是相对于康德哲学的进步。这源于人们对数学本身理解的加深。例如，非欧几何的出现及其应用使得布劳威尔不再信任空间直观，而是只述诸时间直观。

代数[6] $H_n$，这样 $H_n$ 正好满足所有 $L_m$ （$m > n$），而不满足 $L_n$ 和更强的系统。所以 (2.1) 中的关系都是真包含于。而如果 **IPC** 被一个含有穷元素的海丁代数刻画，那么它的每个真扩张就必然被一个更小的海丁代数所刻画（事实上是之前的海丁代数的一个“商”代数）。而有穷海丁代数与二值海丁代数，即刻画 **CPC** 的二值布尔代数之间显然至多有有穷个代数，不可能对应 (2.1) 中的无穷个中间逻辑系统。因此，哥德尔得出直觉主义逻辑不能被看作是一个（有穷）多值逻辑系统的结论。

布劳威尔 [3] 曾列举一个命题 $P$ 可能的四种情况：

(1) $P$ 被证明为真；

(2) $P$ 被证明为假，即荒谬；

(3) $P$ 既没被证明为真也没被证明为荒谬，但是我们知道一个算法可以判断 $P$ 为真还是为荒谬；

(4) $P$ 既没被证明为真也没被证明为荒谬，并且我们并不知道一个导致断定 $P$ 非真即假的算法。

据报道 [18]，布劳威尔在 1951 年的一次讲座中只列举了 (1)、(2)、(4) 而认为 (3) 可以被归约为 (1) 或 (2)。事实上，布劳威尔甚至认为，情况 (4) 也会演进为其他情况。所以命题的这些状态并不是固定的，而是随着人的精神构造而逐渐向 (1) 和 (2) 演进的。这种对命题状态的分类显然来自于布劳威尔关于数学是人们的精神构造的并且仍在被不断构造中的立场。然而，当我们站在实在论的立场上假设每个命题（包括关于命题的命题）都有一个客观的真值的话，就可以类似地列举命题 $P$ 可能的无穷种情况：

(1) $P$ 真，并且 $P$ 被证明为真；

(1.1) $P$ 真，但无法证明 $P$ 为真，却可以证明“无法证明 $P$ 为真”。

(1.1.1) $P$ 真，无法证明 $P$ 为真，也无法证明“无法证明 $P$ 为真”，却可以证明“无法证明‘无法证明 $P$ 为真’”。

……

[6]海丁代数（Heyting algebra）是一个有界偏序结构，满足格的公理，即任意两个元素都存在上确界和下确界，并且对任意结构中的元素 $a, b$ 存在一个最大的元素 $x$，使得 $a$ 和 $x$ 的下确界 $\leq b$。事实上，在用海丁代数解释直觉主义命题逻辑时，如果命题 $P$ 被赋予真值 $a$，命题 $Q$ 被赋予真值 $b$，那么 $P \to Q$ 的真值就是上述被断定唯一存在的 $x$；而 $\neg P$ 的真值就是最大的 $y$ 使得 $a$ 与 $y$ 的下确界是 0。可以证明，一个命题逻辑公式是 **IPC** 可证的，当且仅当它在任何海丁代数中的任何赋值下的真值都为 1。

(2) $P$ 假，并且 $P$ 被证明为假；

……

或如表 1 所示。或许，直觉主义命题逻辑没有有穷多值语义的结果注定由

$$\begin{array}{rlll}
(1) & P & \wedge & \vdash P \\
 & \wedge & & \\
(1.1) & \nvdash P\big(=\mathrm{Con}(\neg P)\big) & \wedge & \vdash \mathrm{Con}(\neg P) \\
 & \wedge & & \\
(1.1.1) & \nvdash \mathrm{Con}(\neg P)\big(=\mathrm{Con}(\neg\,\mathrm{Con}(\neg P))\big) & \wedge & \vdash \mathrm{Con}(\neg\,\mathrm{Con}(\neg P)) \\
 & \vdots & & \\
(2) & \neg P & \wedge & \vdash \neg P \\
 & \vdots & &
\end{array}$$

表 1: 关于命题 $P$ 的无穷种可能

一位实在论者发现。无论如何，哥德尔的结论至少说明了，直觉主义逻辑系统并不能被平凡地解释为，除了真、假之外还有非真非假的情况。对此，哥德尔在《直觉主义命题演算的一个解释》 [8] 中为海丁的直觉主义命题逻辑系统给出了一套自己的语义解释。

假设 $p$ 是命题，哥德尔用 $Bp$ 表示“$p$ 是可证的”，由此给出下述几条公理。

(1) $Bp \to p$（如果 $p$ 是可证的，那么 $p$ 是真的），

(2) $Bp \to B(p \to q) \to Bq$（如果可以证明 $p$ 和 $p \to q$，那么就可以证明 $q$），

(3) $Bp \to BBp$（如果可以证明 $p$，那就可以证明“可以证明 $p$”）。

事实上，这几条公理加上经典命题逻辑公理、分离规则以及“必然化规则”：如果 $p$ 可证，那么 $Bp$ 可证，那么就正好得到我们所熟悉的模态逻辑 **S4** 系统。

哥德尔给出对于海丁命题逻辑系统的翻译如下：[7]

$$
\begin{aligned}
\pi(p) &= p, \\
\pi(\neg\varphi) &= \neg B\pi(\varphi) \text{（或 } B\neg B\pi(\varphi)\text{）}, \\
\pi(\varphi \to \psi) &= B\pi(\varphi) \to B\pi(\psi), \\
\pi(\varphi \vee \psi) &= B\pi(\varphi) \vee B\pi(\psi), \\
\pi(\varphi \wedge \psi) &= \pi(\varphi) \wedge \pi(\psi) \text{（或 } B\pi(\varphi) \wedge B\pi(\psi)\text{）}.
\end{aligned}
$$

由此容易验证，对任意命题逻辑公式 $\varphi$，

$$\mathbf{IPC} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S4} \vdash \pi(\varphi).$$

哥德尔猜测相反的方向也能被证明。根据特鲁尔斯特拉在哥德尔文集 [15, 300] 中的报道，该方向被麦肯齐和塔斯基在 1948 年证明。也就是说哥德尔的这个解释完美地刻画了海丁的命题逻辑系统。

当然，这个解释无法被直觉主义者所接受。请比照海丁于 1934 年才完整提出的 BHK 解释[8]：

(1) 一个对 $\varphi \wedge \psi$ 的证明是由对 $\varphi$ 的证明和对 $\varphi$ 的证明组成的有序对；

(2) 一个对 $\varphi \vee \psi$ 的证明是一个有序对 $\langle a, b\rangle$，其中要么 $a = 0$ 且 $b$ 是对 $\varphi$ 的一个证明，要么 $a = 1$ 且 $b$ 是对 $\psi$ 的一个证明；

(3) 一个对 $\varphi \to \psi$ 的证明是一个函数，能把任何对 $\varphi$ 的证明转换为一个对 $\psi$ 的证明。

(4) 一个对 $\neg\varphi$ 的证明是一个函数，能把任何对 $\varphi$ 的证明转换为一个对荒谬（如 $0 = 1$）的证明。

其中对 $\neg p$，哥德尔的解释是“无法证明 $p$”，而直觉主义的解释是“可证‘可证 $p$ 导致荒谬’”，显然更强。不过，哥德尔的解释同样不会导致排中律：$\pi(p \vee \neg p) = Bp \vee B\neg Bp$ 显然不是 **S4** 有效式。BHK 解释虽然在 1934 年才由海丁较正式地表述，但直觉主义关于用证明的语义代替真的语义的说法在此之前就被布劳威尔和海丁多次提及，哥德尔显然也对此非常了解。事实上，哥德尔的解释也受其启发。但这样一种不同的解释却

[7] 哥德尔原文 [8] 中的定义并没有显示出一个完整的递归定义的形式。下述定义根据哥德尔原文中定义而改写，其中 $p$ 代表一个原子命题，$\varphi$ 和 $\psi$ 代表（可能是复合的）公式。

[8] 即 Brouwer–Heyting–Kolmogorov 解释，又称作证明解释（Proof interpretation）。这里仅列出命题逻辑部分。

表明了，即使接受直觉主义提出的对数学的改造，即直觉主义逻辑，也可能是出于不同于直觉主义的立场。

另外值得注意到是，哥德尔指出他所引入的算子 $B$ 不能被解释为“在特定系统 $S$ 中可证”。因为假设 $B$ 被解释为在皮亚诺算术系统 **PA** 中可证，那么 $B(B(0=1) \to (0=1))$ 这个在 **S4** 中可证的公式显然不成立，因为否则“ **PA** 一致”就是 **PA** 可证的了。哥德尔并没有进一步阐明应该如何理解 $B$。特鲁尔斯特拉认为 [14, 296]， $B$ 应该理解为“用任何一种正确的方法可证”。这是一个相当抽象的概念。同样地， BHK 解释虽又称作证明解释，可以被看作是对“可证”概念的递归定义。但其中“函数”这个概念的具体含义不清，为后续的争论留下很大空间。哥德尔的工作也牵涉其中。我们将在后文中回到这个问题。

## 2.2　否定性翻译

我们知道，当代数学哲学要回答的主要问题是无穷在数学中的运用，尤其是康托尔集合论对实无穷的处理是否合法。罗素悖论的发现加深了对集合论合法性的质疑。布劳威尔直截了当地认为是由于在数学中引入过大的集合而导致了悖论，甚至明确指出“康托尔的关于数的第二类[9]不存在” [4]。事实上，直觉主义对排中律的反对背后是对实无穷概念的拒绝。就特定自然数 $n$ 而言，“ $n$ 或者满足 $P$ 性质，或者不满足”（即 $Pn \vee \neg Pn$）是直觉主义有效的。而假设我们按照直觉主义的标准证明了“并非所有自然数都有 $P$ 性质”（$\neg(\forall x \in \mathbb{N})Px$），也即给出了一个把任何对“所有自然数都满足 $P$ 性质”的证明转化为一个荒谬的证明的函数。按照经典逻辑，运用双重否定消去（排中律的一个应用）就可以得出“存在一个自然数不满足 $P$ 性质”（$(\exists x \in \mathbb{N})\neg Px$）。其实，这里假定了自然数是一个完成的集合。因为按照直觉主义的标准，只有当确实构造出那个不满足 $P$ 性质的自然数时存在性证明才成立。而如果把自然数集看作是一个构造过程，对全称否定的证明就未必能直接指出存在性证明所需要的那个不满足 $P$ 性质的自然数。因此，直觉主义不承认 $\neg(\forall x \in \mathbb{N})Px \to (\exists x \in \mathbb{N})\neg Px$ 的一般有效性。

如果说，直觉主义者希望通过拒绝实无穷概念（体现为拒绝排中律等）而使数学免于悖论的威胁，那么他们可能因哥德尔 1933 年的论文《论直觉主义算术与数论》[9] 而感到失望。哥德尔在这篇文章中给出了经典算术的

[9]指由所有可数序数组成的类。

直觉主义解释，也即经典算术相对直觉主义算术的一致性证明。这一结果令人信服地表明了，直觉主义数学对经典数学的限制，至少在算术中并不会带来更多地安全感。

哥德尔首先给出了命题逻辑部分的翻译：

$$\begin{aligned}\pi(p) &= p,\\ \pi(\neg\varphi) &= \neg\pi(\varphi),\\ \pi(\varphi\to\psi) &= \neg(\pi(\varphi)\wedge\neg\pi(\psi)),\\ \pi(\varphi\vee\psi) &= \neg(\neg\pi(\varphi)\wedge\neg\pi(\psi)),\\ \pi(\varphi\wedge\psi) &= \pi(\varphi)\wedge\pi(\psi).\end{aligned}$$

这样，对每条经典命题逻辑中有效的公式 $\varphi$， $\pi(\varphi)$ 也是直觉主义命题逻辑中的有效公式。我们知道，在直觉主义逻辑下，排中律 $p\vee\neg p$ 等价于双重否定消去 $\neg\neg p\to p$。哥德尔的上述翻译正是避免有疑议的否定消去。例如，排中律 $p\vee\neg p$ 被翻译为 $\neg(\neg p\wedge\neg\neg p)$，而后者显然是直觉主义逻辑的有效式。因此，哥德尔的这个翻译又被称作否定性翻译（negative translation）。

接下来，哥德尔将这个翻译平凡地推广到一阶算术的语言。哥德尔在文中所采用的是厄布朗（Herbrand）的公理系统，但其中与皮亚诺算术等经典算术公理系统的差别对哥德尔的这个结论来说并不是本质的。因此，我们以皮亚诺算术系统为例。对原子命题的翻译实际上是等同翻译，而将 $\exists x\varphi$ 翻译为 $\neg\forall x\neg\pi(\varphi)$。细心的读者不难发现，否定性翻译等同于假设语言中初始的逻辑符号只有 $\neg,\wedge$ 和 $\forall$，而 $\to,\vee$ 和 $\exists$ 是被以典范的方式定义出来的。在此基础之上，哥德尔证明了，对任意一阶算术命题 $\varphi$，

$$\mathbf{PA}\vdash\varphi \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{HA}\vdash\pi(\varphi),$$

其中 **HA** 是海丁的直觉主义一阶算术系统。从右至左的方向是平凡的。为证明从左至右的方向，哥德尔首先证明对翻译后的一阶算术公式而言，直觉主义逻辑并无损失。例如，对任意一阶算术公式 $\varphi$，

$$\mathbf{HA}\vdash\neg\neg\pi(\varphi)\to\pi(\varphi).$$

其中证明的关键是，关于原子算术命题的排中律，$s=t\vee s\neq t$ （可以假设一阶算术的原子命题总是形如 $s=t$），是直觉主义系统中有效的。再检验每条（组）经典算术公理的翻译都在 **HA** 中可证。[10] 最后，证明如果一组

[10]海丁算术系统与皮亚诺算术的差别仅在逻辑公理，而在算术公理方面没有本质区别。哥德尔文中关于

公式的翻译是 **HA** 可证的，那么他们在经典系统推演规则下得到的公式的翻译同样是 **HA** 可证的。

哥德尔的这个结果不仅表明经典算术并不比直觉主义算术更危险，也说明了直觉主义对逻辑运用的限制并没有造成本质的不同。经典数论学家的成果都可以被轻易地翻译为直觉主义算术的定理。反过来，在直觉主义下工作的数学家也可以通过尝试在经典数学中的证明来获得提示。所以哥德尔认为，直觉主义对逻辑的改造只是表面上的，其对数学的真正限制在于禁止使用非构造性的概念。

> 直觉主义似乎只会对分析和集合论带来真正的限制；然而这些限制并不是由于禁止排中律，而是禁止由非直谓定义引入的概念。
> [9]

哥德尔在 [9] 最后指出，这种通过把经典算术翻译到直觉主义算术中得到的相对一致性证明并不是"希尔伯特使用'有穷主义'词项的意义上"的。

## 3 《辩证法》翻译

从某种意义上说，哥德尔的《辩证法》翻译是上述工作的延续。通过否定性翻译，哥德尔给出了了经典算术的直觉主义一致性证明，同时也指出这种一致性证明无法被希尔伯特学派所接受。当然，哥德尔在 1930 年证明的第二不完全性定理表明希尔伯特为算术寻找"有穷主义"证明的计划在其最严格的意义上是注定失败的。但同许多希尔伯特的追随者一样，哥德尔似乎仍未放弃为希尔伯特计划需找尽可能好的替代方案。哥德尔和希尔伯特一样相信算术是一致的，区别仅在于怎样的一致性证明才算是可接受的。[6, 64] 我们知道，根岑（Gerhard Gentzen）在 1936 年给出了一阶算术一致性的一个证明，并且这个证明被希尔伯特所接受。而哥德尔在 1958 年发表了《论一种迄今未用过的有穷主义观点的扩张》[12]，其中描述了一个扩张了有穷主义限制的系统，并证明了直觉主义算术相对于该系统的一致性。由否定性翻译，也即证明了经典一阶算术的一致性。

哥德尔的系统被称作 **T**，是一个无量词的系统。它的语言包括各类型函数的变量，各类型的等词，所有（可通过显定义和原始递归定义得到的）"被定义的常量"，构造项所需要的初始函数符号"+1"，以及"函数

---

厄布朗系统到海丁系统的翻译的非逻辑部分并不是本质的。例如，厄布朗系统中"$x$ 的后继"用 $x+1$ 表示，海丁系统中用 seq'$x$ 表示；厄布朗系统中自然数从 0 开始，而哥德尔文中的海丁系统是从 1 开始。

对适当自变元的‘应用’”。例如，后继函数的定义公理：$s(x)=x+1$，其中 $s$ 是一个类型 1 的常量符号，$x$ 是类型 0 的变元，$+1$ 是初始函数符号，$s(x)$ 表示 $s$ 对 $x$ 的应用。为表达利用原始递归引入的函数的定义公理，可能还需要更多的初始函数符号。特鲁尔斯特拉 [17] 给出了比较详细的解决方案。此外，$T$ 还可以含有命题连接词，但这不是必要的。例如，$s=t\vee u\neq v$，可以被 $h(s,t,u,v)=1$ 替代，其中

$$h(s,t,u,v)=\begin{cases}1 & \text{若 } s=t \text{ 或 } u\neq v\\ 0 & \text{否则。}\end{cases}$$

系统 $\mathbf{T}$ 的公理包括，(1) 命题演算公理（非必要）；(2) 各类型的等词公理：$x=x$ 和 $x=y\to t(x)=t(y)$；(3) 关于后继的皮亚诺公理；(4) 代入规则：从 $\alpha(x)$ 得到 $\alpha(t)$（用以代替谓词逻辑中概括规则和公理 $\forall x\alpha\to\alpha_t^x$ 的作用）；(5) 运用显定义和原始递归构造函数的定义公理；(6) 关于自然数的归纳推理规则。

接着，哥德尔定义了把算术公式转化成一个无量词的 $T$ 系统公式的翻译。由于这些工作首先发表于《辩证法》杂志，因而下述翻译又被称作《辩证法》翻译。

首先，对原子公式 $s=t$，定义 $(s=t)^*=(s=t)'=s=t$。

假设 $\varphi'=\exists y\forall z\alpha(y,z,x)$，$\psi'=\exists v\forall w\beta(v,w,u)$，其中 $\alpha,\beta$ 是无量词公式，$x,u$ 是 $\varphi',\psi'$ 中的自由变元序列。那么定义

(1) $(\varphi\wedge\psi)'=\exists yv\forall zw\big[\alpha(y,z,x)\wedge\beta(v,w,u)\big]$,

(2) $(\varphi\vee\psi)'=\exists yvt\forall zw\big[\big(t=0\wedge\alpha(y,z,x)\big)\vee\big(t=1\wedge\beta(v,w,u)\big)\big]$,

(3) $(\forall s\varphi)'=\exists Y\forall sz\alpha(Y(s),z,x)$,

(4) $(\exists s\varphi)'=\exists sy\forall z\alpha(y,z,x)$,

(5) $(\varphi\to\psi)'=\exists VZ\forall yw\big[\alpha(y,Z(yw),x)\to\beta(V(y),w,u)\big]$,

(6) $(\neg\varphi)'=\exists Z\forall y\neg A(y,Z(y),x)$.

所以每个 $(\varphi)'$ 都有 $\exists y\forall z\alpha(y,z,x)$ 的形式，其中 $\alpha$ 是无量词的，也是 $\mathbf{T}$ 系统语言的公式。我们令 $\varphi^*=\alpha$。哥德尔这篇文章的主要结论可以表述为：对任意算术公式 $\varphi$，有 $\varphi'=\exists y\forall z\varphi^*(y,z,x)$，并且

(3.1) 若 $\mathbf{HA}\vdash\varphi$，则存在一个项（序列） $t$ 使得 $\mathbf{T}\vdash\varphi^*(t,z,x,)$.

由于 $(0=1)$ 的翻译就是其自身，所以如果 **HA** 推出荒谬的话， **T** 也是矛盾的。这样就有了 **HA** 相对 **T** 的一致性证明。

《辩证法》翻译的想法不难理解。如果 $\varphi' = \exists y \forall z \varphi^*(y,z,x)$ 成立的话，那么自然的解释就是，存在 $t$ 使得 $\varphi^*(t,z,x)$ 总成立。而要理解 $\varphi$ 等价 $\varphi'$ 只需要认可选择公理：

$$\forall x \exists y \alpha(x,y) \to \exists Y \forall x \alpha(x, Y(x)).$$

即，如果对任意 $x$ 都存在 $y$ 使得 $\alpha(x,y)$ 成立的话，那么就可以找到一个选择函数 $Y$，每输入 $x$ 就可以输出一个使得 $\alpha(x,y)$ 成立的 $y=Y(x)$。假设 $y$ 是表示某个类型 $t$ 的可计算函数的变元，那么总可以构造一个函数判断任意两个类型 $t$ 的函数的“大小”，因此有理由认为上述形式的选择公理是成立的。这样，(3) 就是对选择公理的直接应用；(6) 是 (5) 的一个特例（如果把 $\neg\varphi$ 定义为 $\varphi \to 0=1$ 的话）。为了得到 (5)，首先假设 $\varphi \to \psi$ 等价于 $\varphi' \to \psi'$，而 $\exists y \forall z \alpha(y,z,x,) \to \exists v \forall w \beta(v,w,u)$ 可以写成前束范式 $\forall y \exists v \forall w \exists z \big[\alpha(y,z,x) \to \beta(v,w,u)\big]$，再运用两次选择公理即可。对 (3.1) 的严格证明通过对 **HA** 证明的长度归纳可得。特鲁尔斯特拉 [17] 给出了详细的步骤。

结合否定性翻译，我们就有了经典算术相对 **T** 的一致性证明。现在的问题是，我们凭什么接受 **T**。哥德尔认为 **HA** 的解释涉及“可证性”这样的抽象概念。我们在 2.1 结尾也提到，BHK 解释中的“函数”概念意义不清。而根岑证明所用到的 $\varepsilon_0$ 上的归纳原理也不能令哥德尔满意。

> 【 $\varepsilon_0$ 上的归纳原理】的有效性显然不是直接地明显的，不像 $\omega^2$ 的情形。$\omega^2$ 的情形可能可以说是直接地明显的。也就是说，我们不能在一瞥之下就把握下降序列的各种结构上的可能性，因此我们不具有对每个这种序列都会终止这一点的，直接的具体知识。而且，这种（希尔伯特意义上的）具体知识也不能通过从较小的序数到更大的序数的一步步跃迁来实现，因为，像 $\alpha \to \alpha^2$ 那样的具体地明显的跃迁步骤太小了，本身必须重复 $\varepsilon_0$ 次才能达到 $\varepsilon_0$。[13]

因此，哥德尔希望算术的一致性证明基于一个更具体的概念。他给出的方案是 **T** 系统基于的“自然数上的有限类型的可计算函数”（computable function of finite type over the natural numbers）这个概念。其中，“类型 $t$ 的可计算函数”可以被递归地定义：自然数是类型 0 的可计算函

数；假设类型 $t_0, \ldots, t_k$ （$k \geq 1$）的可计算函数被定义，那么一个类型 $(t_1, \ldots, t_k)t_0$ 的可计算函数就是一个“具有良定义的数学程序”，输入任何 $t_1, \ldots, t_k$ 类型的函数的 $k$ 元组都能输出一个 $t_0$ 类型的函数作为结果。例如，自然数 5 是一个类型 0 的函数；我们可以定义一个“否定”函数：$\mathrm{Neg}(0) = 1, \mathrm{Neg}(x+1) = 0$ ，它是类型 $(0)0$ 的，我们简称是类型 1 的；我们还可以定义一个“析取”函数： $\mathrm{Dis}(0, f, g) = f, \mathrm{Dis}(x+1, f, g) = g$ （$f, g$ 是类型 1 函数的变元），那么它是类型 $(0,1,1)1$ 的。

请注意，上述定义中用到了“具有良定义的数学程序”这个抽象概念。哥德尔认为这个概念是“被接受为意义清晰、无需进一步解释的”。为此，哥德尔在注释 5 中提到图灵（Alan Turing）对自然数上的可计算函数的刻画。该刻画被认为是合适的这件事本身说明，“机械地可计算”已经有了“清楚的虽然是未经分析的意义”，否则说图灵的刻画是合适的就没有意义了。哥德尔认为，正是在同样意义上，“具有良定义的数学程序”也是意义清晰的。可以认为，自然数上的有限类型的可计算函数构成了 $\mathbf{T}$ 的模型。因而， $\mathbf{T}$ 是一致的。

## 4 哥德尔的布阵及其困境

我们现在可以来总结哥德尔在直觉主义数学方面工作的哲学推论了。正如上文提到的，哥德尔试图以数学上的结论压迫直觉主义的阵地。直觉主义哲学在数学实践上的阵地无非是对排中律的反对，以及不承认非构造性的数学对象。前者被海丁形式化为直觉主义逻辑。这使得哥德尔运用数学结论证否直觉主义的意图成为可能。哥德尔于 1932 至 1933 年间发表的三篇文章，《论直觉主义命题演算》[7]、《直觉主义命题演算的一个解释》[8] 以及《论直觉主义算术与数论》[8] 构成了对直觉主义逻辑的围攻态势。

正如我们在前文中所分析的，《论直觉主义命题演算》一文揭示了直觉主义逻辑并不能用布劳威尔关于命题的有穷种（无论三种或四种）状态的朴素的划分来解释。这暗示着直觉主义逻辑并不存在平凡的语义解释。很快，哥德尔在《直觉主义命题演算的一个解释》中给出了他自己的解释，并指出其中的算子 $B$ 无法对应一个简单明确的概念，如“在特定系统 $S$ 中可证”。哥德尔的解释与著名的 BHK 解释差不多在同一时期形成，两者都涉及“可证”或“（可构造的）函数”这类抽象概念，但并不相同。可以说，哥德尔的解释中毫无直觉主义的痕迹。如果说第一篇文章表明，直觉

主义逻辑并没有正确地刻画布劳威尔的思想；那么后一篇则提示，直觉主义逻辑也并非只有直觉主义的解释，也可以是某种经典的可证性概念的刻画。虽然这个经典的可证性概念比较模糊、抽象，但海丁等人给出的直觉主义解释也没有更好。

《论直觉主义算术与数论》的结果直接否定了直觉主义逻辑作为一种数学基础解决方案在安全性方面存在任何优势：如果经典数论是不安全的，那么直觉主义算术就已经是不安全的了。并且直觉主义逻辑与经典逻辑下的工作可以机械地相互翻译。哥德尔的前两篇文章已经割裂了直觉主义逻辑与直觉主义哲学立场之间的必然联系，而这篇文章的结论大幅削弱了直觉主义逻辑在基础研究方面价值，将其置于一个尴尬的境地——既没有强健的哲学支撑，也没有缺之不可的实践价值。正如哥德尔自己所言，接下来需要着手解决的只有直觉主义限制引入非构造性数学对象的主张。

哥德尔或许对《辩证法》翻译有过很大的期许，期待它可以一锤定音。如果，《辩证法》翻译能令人信服地建立起对经典算术一致性的信念，那么无论直觉主义还是其他数学基础的备选方案都将黯然失色。哥德尔还在文末指出《辩证法》翻译不仅能提供经典算术的一致性证明，还可以被推广到更强的系统。人们后来也的确将其推广到高阶算术乃至集合论系统上。但是根本的问题还是，将经典数学翻译到 **T** 系统或其扩张中，在多大程度上能被接受为是对前者的一致性证明，它相对于哥德尔自己给出的直觉主义的一致性证明到底有何优势， **T** 系统所基于的抽象概念何以比直觉主义算术背后的抽象概念更清晰。如果无法为这些问题提供有力的辩护，那么《辩证法》翻译无非提供了另一种选择，其哲学意义将微不足道。

哥德尔的《辩证法》翻译初次发表于 1958 年，并且是为祝贺贝奈斯七十岁生日所作。但根据特鲁尔斯特拉 [15, 217] 和王浩 [1, 6] 的报道，其主要的技巧至少在 1941 年就被哥德尔发现。但哥德尔似乎始终无法找到令他自己满意的对这一数学成果的哲学意义的阐释。这可能是促使他直到 1958 年才将这一结果公诸于众的原因。在 1972 年的版本中，他添加了若干重要的注释，不仅精细化了技术上的处理，也试图完善哲学上的阐释。但仍然不如意。

希尔伯特希望数学能一劳永逸地证明自己的一致性。作为形式主义者，他把数学等同于句法规则，因而似乎有理由期待一个有穷主义的证明。但哥德尔第二不完全性定理宣告了这一愿望将难以实现。不过，根据哥德尔的观察，只要希尔伯特及其追随者放弃有穷主义数学中“更特别的有穷主

义成分”，即放弃要求对象“必须是元素的、有限的时空图式”，而保留“构造主义元素”的话，那么关于经典数学的一致性证明仍是可期的。而《辩证法》翻译就是这样一种尝试。哥德尔在文中极力让人们相信，“有限类型的可计算函数”概念是符合构造主义要求的。

但是按照“一致性强度”（consistency strength）理论，一致性强度越高的系统不一致的可能越大。经典算术可以被翻译到 **T** 中，也就意味着 **T** 的一致性强度不低于经典算术。这就是说，从技术上看，哥德尔是在用一个安全系数并没有更高的系统证明数论的一致性。当然，根据不完全性定理，任何形式系统中的一致性证明都只能是这样。哥德尔当然知道这点。那么，当哥德尔试图将他的结果描绘成数论的一致性证明的时候，他是刻意对此视而不见，或只是迎合形式主义者（贝奈斯）的口味？这种怀疑显然是肤浅的。哥德尔关于“有限类型的可计算函数”明晰性的论证是为了说明他的结果的确为算术的一致性提供了一个“证明”，不仅仅是显而易见的相对一致性证明。显然，前一个“证明”并非是任何一种形式化了的“证明”概念。因为，任何形式证明要么不可能，要么只是提供了另一个选项而在哲学上没有更多的意义。

哥德尔晚年在与王浩的讨论中谈到了“绝对证明”这个概念。他说：“有可能找到绝对证明的一个清晰的说明，数学直觉用它可以证明自己的一致性”[2, 238]。“绝对证明”这个概念牵涉哥德尔哲学令人难以捉摸的核心：心物问题与概念理论。哥德尔认为，“一旦我们理解了证明的一般概念，我们也就获得了心灵对于它自身一致性的证明”。又由于第二不完全性定理可以解读为机器（或机械程序）无法证明自己的一致性。所以，心灵证明自身一致性这一现象“就可以清楚地证明心灵不是机器”[2, 237-238]。此外，哥德尔还认为“关于证明的一般概念的情形，类似于关于概念的一般概念”[2, 237]。我们知道，概念实在论是哥德尔哲学略带神秘色彩的设想。罗素悖论揭示不存在所有集合的集合。这只是关于概念外延的命题。而哥德尔相信，所有概念的概念可以是一个一致的概念。同样，对于心灵的一致性，即所有证明都不会导致荒谬的绝对证明也是可能的。

在哥德尔的理想中，上述问题是紧密联系甚至是等价的。“因为人脑在表现上无论怎么看都是一台有穷的机器”[2, 235]。所以，关于心灵不是机器的证明，同时也是心灵不依赖于肉体（大脑）的证明。哥德尔设想，“人脑是一台与精神相连接的计算机”[2, 240]。熟悉可计算性理论的人们很容易联想到带神谕（oracle）的图灵机。一个合理的解释是，在哥德尔看来，

心灵就是大脑的神谕来源，它通过对概念世界的某种感知为大脑这台机器提供材料。所以心灵的独立存在与概念的独立存在是等价的。而对其存在性的证明是心灵（或数学直觉）对其自身一致性的证明，也同时是对“（全部）证明”这个概念的理解，即不会有“证明”见证心灵自身是不一致的。可能正是从这个意义上，哥德尔宣称，“概念的概念和绝对证明的概念可以相互定义”[2, 238]。

哥德尔为我们描绘了一幅乐观的理性主义的图景。他在正式发表物和晚年与王浩的谈话中都多次声明，他相信独立于物理世界的抽象世界的存在，并且如同我们能够认识物理世界一样，我们也可以认识概念的世界；也如同人们对于物理世界的感知会有错觉一样，对概念世界的认识也会出错，导致悖论的出现。哥德尔的乐观主义表现为，他相信对概念世界的认识会越来越清晰，这些根本问题能得到满意的解决。然而，显然的是，哥德尔终其一身也未能找到他所期待的答案。终结构造主义与柏拉图主义之争的“绝对证明”始终未被找到。

# 5 结语

哥德尔在发现不完全定理之后，转向有关直觉主义的研究。按照我们的分析，他在 1932-1933 年间发表的成果有力地冲击了直觉主义逻辑的哲学地位。这在一定程度上延续了哥德尔早年工作的特征，以无可争议的纯数学的成果形成对基础问题的回答。

当然，对哥德尔这些工作的意义可以有不同的解读。布劳威尔可能不会认同这些结果说明了任何问题，更不用说证明了直觉主义是错的。他从来就不认可对形式语言或逻辑的研究可以形成任何关于数学基础的有效断言。在他看来语言只是帮助数学家交流的不完善的辅助工具。他甚至不认同海丁发展的形式化的直觉主义数学。相信在布劳威尔看来，哥德尔对直觉主义逻辑和直觉主义算术的批评完全没有抓住要点。

然而，笔者认为，布劳威尔对于海丁直觉主义系统的否定并不意味着海丁的工作相对于他的老师是一种倒退。恰恰相反，能够把晦涩模糊的哲学表达用公理化的方式精确地刻画出来表明对相关概念的理解更清晰了。虽然更清晰的表达往往意味着有更大的风险被明确地证否，但即使被正否也只是揭示了之前的认识中存在错误，而使得更精确的理解成为可能。我们不能由此断定被证否的刻画比先前模糊的表达更糟糕。相反，正是更清

晰的表达才使得进一步的认识成为可能。哥德尔认为，“对概念的分析是哲学的核心”[2, 304]，诸如罗素悖论、连续不可导函数、巴拿赫 - 塔斯基分球怪论的发现让我们可以更清晰地分辨有关概念（集合（概念的外延）与概念、连续与光滑、集合论的点与空间直观的点）。[10][2, 300] 而哲学的进步正体现于此。

哥德尔认为人们对数学基础以及哲学概念的认识取决于心灵的发展：“心灵，就其运用而言，不是静态的，而是不断发展的。”[2, 254]。哥德尔还说道：“虽然在心灵发展的每一阶段，它的可能状态的数量是有穷的，但是，并没有理由说它的发展过程中这种数量不会收敛到无穷。”[2, 254] 这些论述与布劳威尔的一些说法非常接近，例如，数学是理想化的精神的构造，以及数学真是被经验到的（构造地证明的）。并且二人都不认为数学真是任意的。他们的区别仅在于，为了说明这种非任意性，哥德尔述诸抽象对象的外部存在以及对它们的感知；而布劳威尔将其归结为康德式的直觉形式，即时间直觉的二一性（two-oneness）。由此在数学实践上表现为，哥德尔能接受实无穷这样的抽象概念，而布劳威尔只接受潜无穷。笔者认为，布劳威尔的看似经济的假设其实是非常危险的，很有可能被后来的进步证明为是时代的偏见，正如非欧几何在物理学中被成功运用后，康德关于空间直觉形式的见解被逐渐抛弃一样。然而，哥德尔选择的道路绝非轻松。康德哲学的特点在于严格区分合法的经验知识与非法的超验知识，禁止用经验的概念谈论心灵、上帝等超验的话题，对经验对象背后的“物自体”避而不谈。这种为理性划定界线的做法在后来的哲学家中也广为流行，这样可以较方便地得到一个一致且封闭的系统。但哥德尔的道路是开放的，它为进步预留了空间，却很难想象任何进展会令人满意到足以终结这条道路。

## Gödel’s work on constructive mathematics

Ruizhi Yang
Fudan University

Kurt Gödel is a well-known realist. However, he also had some remarkable works on constructive mathematics, e.g. the Gödel’s Negative Translation and Dialectica Interpretation. These methodologies are fruitful in today’s proof theory. However, we are mostly interested in their foundational or philosophical consequences. We will introduce these achievements,

and try to reorganise them as an intended arrangement against intuitionism. We will also discuss its weakness, and then touch the most tangled part of Gödel's philosophy.

**Key words:** Philosophy of Mathematics, Constructivism, Realism

# 参考文献

[1] 王浩（著）and 康宏逵（译）. 哥德尔. 上海译文出版社, 上海, 2002.

[2] 王浩（著）and 邢滔滔、郝兆宽、汪蔚（译）. 逻辑之旅：从哥德尔到哲学. 浙江大学出版社, 2009.

[3] L. Brouwer. The effect of intuitionism on classical algebra of logic. In *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, pages 113–116, 1954.

[4] L. E. J. Brouwer. On the foundations of mathematics. In *Collected Works 1*, pages 11–101. 1907.

[5] L. E. J. Brouwer. Consciousness, philosophy and mathematics. In P. Benacerraf and H. Putnam, editors, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, pages 90–96. Cambridge University Press, second edition, 1984.

[6] J. Dawson. *Logic Dilemmas: the life and work of Kurt Gödel.* A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997.

[7] K. Gödel. On the intuitionistic propositional calculus. In *Kurt Gödel: Collected Works: Volume I Publications 1929-1936*, pages 223–224. 1932.

[8] K. Gödel. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus. In *Kurt Gödel: Collected Works: Volume I Publications 1929-1936*, page 301. 1933.

[9] K. Gödel. On intuitionistic arithmetic and number theory. In *Kurt Gödel: Collected Works: Volume I Publications 1929-1936*, pages 287–295. 1933.

[10] K. Gödel. Russell's Mathematical Logic. In P. A. Schilpp, editor, *The Philosophy of Bertrand Russell*, volume 11, pages 123–153. Open Court Publishing Company, 1944.

[11] K. Gödel. On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint. In *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II Publications 1938-1974*, pages 241–251. 1958.

[12] K. Gödel. Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica*, 12:280–287, 1958.

[13] K. Gödel. On an extension of finitary mathematics which has not yet been used. In *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II Publications 1938-1974*, pages 271–280. 1972.

[14] K. Gödel. *Kurt Gödel: Collected Works: Volume I Publications 1929-1936*. Oxford University Press, New York, 1986.

[15] K. Gödel. *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II Publications 1938-1974*. Oxford University Press, New York, 1990.

[16] A. Heyting. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*. Deütsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, 1930.

[17] A. S. Troelstra. *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*. Springer, New York, 1973.

[18] M. van Atten. The Development of Intuitionistic Logic *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2014 Edition), 2012.