弗雷格论数学定义

杨睿之*
复旦大学哲学学院

摘要：本文将探讨弗雷格关于数学定义的论述。弗雷格在其遗稿《数学中的逻辑》一文中用了较大篇幅谈论数学定义。本文将指出弗雷格论述中含有诸多领先时代的洞见，如对数学中规定性定义标准的较早表述，对贝斯可定义性定理的预见，以及关于公理系统一致即真的见解。弗雷格在文中的主要论点是，只有规定性定义是真正的数学定义。他对这一观点的论证引用了一些在今天看来不切实际的预设。作者将试图在保留弗雷格核心立场的基础上对其理论假设做一定修正以便与后来的不完全性、独立性等数学结果相兼容。特别地，在修正后的理论中，分析性定义可以被接受。

关键字：数学哲学、定义、概念、弗雷格

一、引言

我们知道，弗雷格工作的主要动机是希望将数学归约为逻辑以一劳永逸地解决数学基础问题。当然，弗雷格自《概念文字》[1]至《算术基本法则》[2]的努力由于罗素悖论的发现而折戟。今天，人们关于弗雷格谈论的更多的是散见于《算术基础》[3]和一些公开发表论文中的关于数学、逻辑、语言的一系列洞见及其对现代数学哲学、语言哲学的影响。

弗雷格去世前将大量未发表的遗稿托付给他的儿子阿尔佛雷德（Alfred Frege）并进而转交明斯特大学的肖尔茨（Heinrich Scholz）整理以期最终出版。第二次世界大战中，弗雷格遗稿原件在盟军轰炸中全毁。今天我们看到的遗稿全部基于肖尔茨的打印副本。战后，又由于肖尔茨的离世，其整理工作进展缓慢，直到 1969 年才出版。[4]而直到 1979 年弗雷格遗稿才被介绍到英语世界。[5]王路编辑翻译的

---

* 本文得到教育部人文社会科学研究青年项目——“当代集合论哲学及其对数学基础研究的影响”（13YJCZH226）以及复旦大学 2015 年青年研究创新项目资助。

[1] Frege, G., *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S.: Louis Nebert, 1879. English translated as *Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic*, by S. Bauer-Mengelberg in J. vanHeijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967. 中文翻译：《概念文字：一种模仿算术语言构造的纯思维的形式语言》，见王路译《弗雷格哲学论著选辑》，北京：商务印书馆，2006 年。

[2] Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena: Verlag Hermann Pohle, Band I/II, 1893/1903. Partial translation of Band I, *The Basic Laws of Arithmetic*, by M. Furth, Berkeley: U. of California Press, 1964.

[3] Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner, 1884. English translated as *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, by J.L. Austin, Oxford: Blackwell, second revised edition, 1974. 中文翻译：《算术基础》，王路译，北京：商务印书馆，1998 年。

[4] Frege, G., *Nachgelassene Schriften*, Hermes, Kambartel, Kaulbach (eds), Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1969. (English translation as Frege 1979).

[5] Frege, G., *Posthumous Writings*, Hermes *et al*. (eds.), Long, P. and White, R.M. (translator) Chicago: University of Chicago Press, 1979. 我们在下文中以缩写 PM 代替该英文版遗稿。

《弗雷格哲学论著选辑》[6]中挑选了遗稿中部分重要文献。在弗雷格的遗稿中，我们可以发现其发表文献中未能尽言的想法，部分思想对今天的数学基础研究仍然有启发意义。

遗稿中的《数学中的逻辑》[7]一文是弗雷格驳斥希尔伯特（David Hilbert）形式主义的两篇论文[8]的重做，也是弗雷格晚年数学基础思想的一份较完整的阐述。文章讨论了数学公理、定义和证明。弗雷格与希尔伯特争论的焦点本是数学公理"一致性"和"独立性"的意义。但这篇文章中关于数学定义的讨论却占据了最大的篇幅。本文正是受这部分工作的启发。

下文中，我们将围绕弗雷格关于数学定义的论述，发掘出其中领先于时代的思想。例如，关于数学定义标准的表述，对贝斯可定义性定理（Beth definability Theorem）的预言等。同时，我们也将分析并指出，弗雷格关于"只有规定性定义（stipulative definition）才是数学中可承认的定义"的论证是不成立的。我们试图说明，弗雷格的问题仅在于他受限于时代而无法理解不完全性与独立性现象对数学基础的影响，而只需要在弗雷格的知识库中加入后来那些数学结果，就可以将弗雷格的数学哲学思想更新为当代思想。而其中，非规定性的数学定义也应该被接受。

需要声明的是，受限于语言，作者主要依据《数学中的逻辑》这篇文章的中英译本，而弗雷格遗稿英译本的质量曾受到质疑。[9]下文中体现出来的作者对文本的解读可能因此有所偏差，欢迎指正。

二、规定性定义

关于数学定义的传统理论认为，一个合适的数学定义必须满足两个标准：保守性（Conservativeness）与可取消性（Eliminability）。定义的保守性可表述为，该定义不会造成使用原有符号的系统中不可证的句子变得可证；而可取消性可表述为，被定义项总是可以通过替换为它的定义项而被削去的，即该定义是非必要的。[10]一般认为，这两则关于数学定义的标准是由波兰学者列什涅夫斯基（S. Leśniewski，塔斯基的导师）在 1930 年左右首先提出的。但近年来，这一观点受到了挑战。[11]达德曼（Dudman, V. H.）指出[12]，弗雷格早在《概念文字》中就表达

---

[6] 弗雷格，《弗雷格哲学论著选辑》，王路译，北京：商务印书馆，2006 年。

[7] Frege, G., "Logic in Mathematics", 1914, in *Gottlob Frege: Posthumous Writings*, edited by H. Hermes, F. Kambartel, and F. Kaulbach, Chicago: University of Chicago Press 1979, pp. 203–250. 下文中以缩写 LIM 代替。

[8] Frege, G., "Uber die Grundlagen der Geometrie" – First Series. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12, 1903, p. 319-24, 368-75. English translation in Frege 1984, p. 273–284.
Frege, G., "Uber die Grundlagen der Geometrie" – Second Series, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15, 1906, p. 293-309, 377-403, 423–30. English translation in Frege 1984, p. 293–340.

[9] Kluge, E-H W. Gottlob Frege: Posthumous Writings. *The Philosophical Review*, Vol. 91, No. 1982, p. 115-118.

[10] 更严格的现代表述如下。给定形式语言L和理论T（语言L的一些句子组成的集合），假设在语言L中添加一个新符号s得到语言L^+，我们通过一个L^+句子σ来赋予s以意义，此即定义。这时，我们称σ是一个保守的定义，当且仅当，对任意L语言句子δ，若$T \cup \{\sigma\} \vdash \delta$，则$T \vdash \delta$。我们称σ是一个可取消的定义，当且仅当对任意$L^+$公式φ都存在一个L公式ψ，有$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$。参见 Gupta, A., "Definitions"(ed. Summer 2015), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2015, http://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/definitions/. 以及 Belnap, N. 1993, "On Rigorous Definitions," *Philosophical Studies*, 72: 115–146.

[11] 见 Urbaniak, R. and Hämäri, K.S., "Busting a Myth about Leśniewski and Definition", History and Philosophy of Logic 33, no, 2, 2012, p. 159-89.

[12] Dudman, V. H., "Frege on Definitions," *Mind*, 83, 1973, p. 609–610.

了类似的观点，并且在 LIM 中已经有了非常明确的表述：

> 定义对于一个系统而言并非绝对本质的。我们完全可以只使用原来的那一组符号。【通过定义】引入的简单符号并没有添加任何内容……事实上，仅仅从一个定义出发是无法证明什么没有它就证明不了的新东西……如果定义项（*definiens*）出现在句子中，我们把它换成被定义项（*definiendum*），这丝毫不会影响【句子的】思想。[13]

弗雷格在这里为数学定义设立的标准是为了论证，只有他所谓的构造性定义（constructive definition）或简化定义（"definition" *tout court*）才是真正的数学定义。弗雷格是这样描述这种定义的：

> 在构造系统时，同一符号组……会一次又一次地出现。这给了我们一个理由来引入一个新的符号，规定这个新的符号总是出现在原来那个符号组的位置，以代替该符号组……现在，一个简单符号就这样被引入以代替那个符号组，这样一个规定就是一个定义。[14]

显然，弗雷格的构造性定义或简化定义就是我们常说的规定性定义，即这种定义仅仅是为了方便而规定了一种缩写方式。因此，我们在文中采用“规定性定义”这个更通行的表述，而不是弗雷格本人的术语。

弗雷格关于只有规定性定义才是可被接受的数学定义的论证框架大致如下。首先，他给出数学定义的一系列标准和特征。这包括上述的保守性与可取消性，还有我们在下文中将提到的关于定义的形式特征和涵义唯一性等表述。其次，弗雷格讨论了一些其他种类的所谓数学定义，并说明这些所谓定义都不满足他给出的标准，因而不能算真正的数学定义。显然，这是一种经验论证，它并不力求穷尽其他所有可能的数学定义候选形式，而只需要指出人们常常误以为是定义的东西其实并非定义就可以了。接下来，我们具体分析弗雷格的两组论证。

三、隐定义

由于规定性定义本质上就是断言新引入的符号与已有符号的某种组合具有同样的涵义（sense），因此弗雷格认为所有定义都可以呈现为某种等式（或其变体）。例如，弗雷格以“素数”为例给出的一则关于如何定义概念的例子：

$$\left\{\begin{array}{c}\text{如果}a\text{是某个大于 1 的整数与别的正整数的积，}\\ \text{那么}a\text{就是那个整数，}\\ \text{并且}a\text{是整数，}\\ \text{并且}a\text{大于 1}\end{array}\right\} = a\text{是素数。}$$ [15]

[13] PM, P. 208.

[14] PM, P. 207.

[15] PM, P. 229. 按照现代的符号系统，这类定义应该在系统中被写成$\forall a[\varphi(a) \leftrightarrow Pa]$ 。其中P是被引入的新符号表示素数概念，$\varphi(a)$是由原有记号组成的关于a的谓述，对应于弗雷格定义左侧大括号内的内容。

我们现在也会把这种定义称作*显定义*（explicit definition）。

同时，弗雷格注意到另外一种被称作定义的东西，并称之为语词定义（verbal definition）。它是“一种其定义项包含了一个仅仅是单词而且是没有涵义的单词”。[16]弗雷格用代数来比喻这种“难以承认的定义”。

> 让我们假设三个未知的x、y、z出现在三个方程中。那么他们可以被这些方程所决定。然而更准确地说，仅当只有唯一解的时候，他们才被决定。类似地，“点”、“线”、“面”这几个词可能出现在若干句子中。让我们假设这些词目前还没有涵义。这就可能需要为每个词找一个涵义以使得问题中的这些句子都表达了真思想（thought）。[17]

显然，弗雷格比喻的是欧几里德几何。其公理[18]往往被看作是对点、线、面等基本概念的定义。此外，弗雷格还提到，希尔伯特在《几何学基础中》将下述四组公理冠以“定义”：

II.1. 如果 A、B、C 是直线上的点，且 B 在 A 和 C 之间，那么 B 在 C 和 A 之间。
II.2. 如果 A 和 C 是直线上的两点，那么至少有一个点 B 在 A 和 C 之间，也至少有一个点 D，使得 C 在 A 和 D 之间。
II.3. 任给直线上的三个点，有且仅有一个点在另两个点之间。
II.4. 直线上的任意四点 A、B、C、D 可以如此排列以使得 B 在 A 和 C 之间也在 A 和 D 之间，C 在 A 和 D 之间也在 B 和 D 之间。[19]

这组句子可以看作是对“……在……和……之间”这个三元关系的定义。这种定义，正是我们现在所说的*隐定义*（implicit definition）。

然而，弗雷格拒绝承认隐定义是真正的定义。为此，他提出了另一条关于定义的标准，即

定义必须唯一地决定被定义项的涵义。

我们称之为*唯一解标准*。提出这条标准的理由是，以“科学为目的而构造系统，其最重要的要求是免于模糊性。”[20] 因而，在数学系统中，由定义引入的被定义项不允许有不同的解释。而隐定义在一般情况下无法保证被定义项只有唯一的解释。

这个论证中有几点值得注意。首先，以科学为目的（scientific purposes）将数学构造为一个严格的系统是弗雷格许多论证的出发点，也是弗雷格几乎所有工作的动机。其次，弗雷格的系统是以“1. 公理以及 2. 定义”[21]（和一些推理规则）为基础的，弗雷格所谓的真正的定义（proper definition）是指构成系统一部分的那些定义。弗雷格在论证其他种类的所谓定义不是真正的定义时，常常把它们归于构造系统前所需要的准备，而非系统的一部分。我们在下文中还会遇到。最后，弗雷格否认的只是一般情况下的隐定义。因为，显定义也可以被视为一种特殊的

---

[16] PM, P. 215.
[17] PM, P. 212.
[18] 弗雷格在 LIM 中论证了所谓公设（postulate）就是一种公理（axiom）。PM, P. 207.
[19] PM, P. 248. 弗雷格这里引用的是希尔伯特《几何学基础》第一版，II.4 在后续版本中被修改。
[20] PM, P. 213.
[21] PM, P. 244.

隐定义。对任意显定义，如果其定义项的所有组成部分都有唯一确定的涵义，那么其被定义项的涵义也被唯一决定。所以，至少有一些隐定义是符合弗雷格的标准的。

那么到底哪些隐定义是可被接受的？对此，弗雷格表示，

> 如果可以证明【一则如方程组的定义中，被定义项】只有唯一一个解是可能的，那么这肯定是通过一则构造性定义来为每个需要被定义的词逐个赋予涵义而得到的。[22]

显然，弗雷格表达的就是，所有符合唯一解标准的隐定义都可以被看作是一种规定性定义，即构造性定义，因而也是显定义，从而是可接受的。

这很容易让人联想到贝斯可定义性定理（Beth Definability Theorem）。该定理是贝斯（Beth, Evert Willem）在 1953 年才发表的。[23]它可以被直观地表述为，一个新谓词可以被一个理论隐定义，那么它也可以被一条原语言中的公式在该理论下显定义。更严格的表述是，给定语言L和新谓词P，令T是语言$L\cup\{P\}$的理论，如果T可以隐定义P（即对任意T模型$\mathfrak{M}$、$\mathfrak{N}$，若$\mathfrak{M}|L=\mathfrak{N}|L$，则$P^{\mathfrak{M}}=P^{\mathfrak{N}}$），那么存在一个$L$公式$\varphi$在$T$下显定义$P$（即$T\vdash\forall x[\varphi(x)\leftrightarrow Px]$）。其中，模型$\mathfrak{M}$、$\mathfrak{N}$可以看作对语言$L\cup\{P\}$中符号的解释，$\mathfrak{M}|L=\mathfrak{N}|L$表示它们对原来语言$L$中符号的解释一样，$P^{\mathfrak{M}}=P^{\mathfrak{N}}$表示它们对需要定义的谓词$P$的解释也一样。可以认为，贝斯可定义性定理中的“$P$可以被$T$隐定义”就是弗雷格所说的$T$对$P$的隐定义符合唯一解标准。因此，弗雷格关于凡是符合唯一解标准的隐定义都可以被接受的断言可以被视为对贝斯可定义性定理提前四十年的预言。

我们知道，隐定义常常表现为公理化定义。除了上文提到的几何公理对几何概念的定义，还有例如算术公理可以被看作是对“自然数”概念和自然数上的加法、乘法等运算的定义，而集合论公理往往被视为对“集合”概念以及“属于”关系的定义。弗雷格关于这种所谓定义并非真正的定义的另一个论证来自于他对数学公理的要求。

> 因为它们（公理）要被用作前提，他们就必须是真的。公理不真就是一个矛盾。一则公理必须不含有任何我们不熟悉的词项。[24]

因此，如果按照弗雷格的理解，定义是为一个尚无涵义的符号赋予涵义，那么公理化定义就是试图运用“公理”（例如上述包涵词项“……在……和……之间”的公理 II.1-II.4）来定义其中包涵的某个尚无涵义的词项（如“……在……和……之间”）。此时那些所谓的公理就不符合弗雷格对公理的要求而不再是公理，因而也就不能构成数学系统。所以，所谓公理化定义，或者把公理系统看作是对其中某个词项的定义，是弗雷格所不能接受的。

四、分析性定义

弗雷格在 LIM 中明确区分了两种非常不同的需要使用定义的情况：

> (1) 我们从其组成部分中构造出一个涵义并引入一个全新的符

[22] PM, P. 212.

[23] Beth, E. W., “On Padoa’s method in the theory of definition”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 56, 1953, p. 330-9.

[24] PM, P. 244.

号来表示这个涵义。这可以被称为“构造性定义”……

(2) 我们有一个简单符号，它已经被长期使用。我们相信我们可以对它的涵义进行逻辑分析，得到一个具有同样涵义的复杂表达式。我们只允许那些我们可以识别其涵义的东西作为那条复杂表达式的组成部分。而且那条表达式的涵义是通过其被【从那些知道涵义的组成部分】组合起来的方式得到的。复杂表达式与被长期使用的简单符号具有相同涵义这一事实不是一个任意的规定，而只能通过直接的洞见来认识。无疑，我们在这种情况下也会说定义。它也许可以被称为一个“分析性定义”而与前一种情况相区别。[25]

情况(1)中所说的无疑就是规定性定义，而我们接受弗雷格的术语把情况(2)称之为分析性定义（analytic definition）。[26]显定义是根据其形式从隐定义划分出来的，而规定性定义与分析性定义则是根据其功能来划分的。分析性定义可以有显定义的形式，也可以是用公理化方法来隐定义的。例如，人们经常会说，图灵（Alan Turing）把“可计算”定义为图灵机可计算，以及，我们用 ZFC 来隐定义“集合”概念。

弗雷格主张，分析性定义不是一种真正的数学定义。对此，他提供了三组论证。

首先，如果一则分析性定义中的被定义项 A 基于其长期的使用（long established use）是有明确的涵义的，而定义项中各组成部分的涵义也是明确的，那么该分析性定义，即对于 A 的涵义与定义项的涵义等同的断定是否成立便是自明的。因此，当它出现在系统中时就“应该被称为公理”[27]，而非定义。

其次，如果 A 并没有一个明确的涵义，即 A 的分析性定义是否正确这个问题是可以怀疑的，那么关于 A 的分析是有意义的。但弗雷格认为，这些工作“并不是系统构造的一部分，而是在之前发生的。”[28]这里弗雷格使用了与反对隐定义类似的理由，即分析性定义虽然是构造系统前很重要的一项工作，但分析性定义本身并不属于数学系统，因而不是真正的数学定义。

这两组论证看似穷尽了所有情况，即被定义项有或没有明确的涵义。事实上，当人们说到分析性定义的时候所期望的往往是这样一种情况，即被定义项 A 的涵义起初并不明确，但经过分析后得到了明确的涵义，并以定义的方式固定下来。接下来的问题就是，“这个分析是否是正确的”。只要这个问题是可以怀疑的，那么就适用于第二种情况。那么是否可以通过某种论证使得可怀疑变得不可怀疑呢？弗雷格也考虑了这点，并给出了一种情况。

人们可以暂时用一个全新的记号 B 代替被长期使用的 A，用分析 A 所得的复杂表达式来定义 B。注意，这里是规定性定义。我们试图用不含 A 的公理以及对 B 的定义来构造系统。“如果我们不需要 A 就能这样成功地构造出一个数学系统”，并且如果这个系统的所有关于 B 的推论代入 A 得到的都符合 A 的长期使用，那

---

[25] PM, P. 210.

[26] 也有学者将其称作描述性定义或解释性定义。参见 Gupta, A., “Definitions”(ed. Summer 2015), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2015, http://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/definitions/.

[27] PM, P. 210. 弗雷格这里显然忽略了一种情况，即，即使被定义项与定义项的组成部分都有明确的涵义，但被定义项与定义项具有相同的涵义这一事实仍然可能不是自明的，或许是可以从公理出发通过复杂证明得到的定理。当然，这不妨碍弗雷格拒绝承认它是定义。

[28] PM, P. 211.

么这至少提供了很强的证据说明之前对 A 的分析是正确的。[29]但这一系统得以构造出来的事实也同时说明了 A 在系统中的出现不是本质的，或者说我们可以“把它当作一个在定义前没有涵义的全新的记号”[30]，而无需考虑它的长期使用。因此，我们用这种方式消除了关于 A 的分析的怀疑的同时也证明了 A 不是构造系统所必需的初始词项。当然，更没必要把 A 的所谓分析性定义作为系统的一部分。

由此，弗雷格断言分析性定义不是真正的数学定义。

六、弗雷格的立场与预设

以上，我们重现了弗雷格关于只有规定性定义是真正的数学定义的主要论证。接下来，我们希望分析并指出弗雷格论证中的核心立场和预设。我们将论证，其中的若干预设在今天看来是不合适的。但另一方面，弗雷格的核心立场相比希尔伯特形式主义却更易兼容我们今天对数学基础状况的认识。

正如我们在第一节提到的，LIM 最初的目的是反驳希尔伯特的形式主义。在文中的诸多论述中，都可以看到针对形式主义的影子。例如，用以反对公理化定义的唯一解标准针对的就是形式主义者的主张：形式系统中的符号被解释成“点”、“线”、“面”还是“桌子”、“椅子”、“啤酒杯”并不重要。再如，在反对分析性定义的论述中，弗雷格认为即使被定义项 A 与分析所得的定义项可以在句子中被替换（即不影响形式），也不足以证明两者的涵义是相同的。弗雷格与希尔伯特的争论源于他们数学哲学立场的根本分歧。

与形式主义者不同，弗雷格一再强调，“【数学】句子对我们的价值在于我们所把握的它们背后的涵义，……【句子的】这种涵义称为思想”[31]而数学思想必须有所指（reference），数学思想的所指就是真值，要么是真要么是假。没有所指的思想“不属于真和科学的王国，而是属于神话和虚构”。[32]因而，数学句子所表达的思想有确定的真假是数学作为一门科学而非神话所必须的。我们认为，这就是弗雷格的*核心立场*。而把握这些数学思想的所指正是弗雷格试图构造数学系统并提出关于数学定义的若干标准的动机。

数学思想，即数学句子的涵义是由其组成部分的涵义按照特定的方式复合而成的。我们知道，按照弗雷格开创的形式语言，数学句子的组成部分包括逻辑符号、专名、谓词、关系和函数符号等。我们把专名、谓词等记号的涵义复合成句子涵义的方式对应于运用逻辑符号把这些记号连接成句子的方式。同时，句子涵义（思想）的所指也按照对应的方式取决于那些记号（如谓词）涵义的所指。按照弗雷格的说法，要求句子所表达的思想有唯一确定的所指（真值），就必须要求其组成部分有确定的所指。例如，数学句子中的谓词都应该有明确的涵义，进而有唯一确定的所指，即概念。显然，数学定义的唯一解标准就来源于此。

虽然弗雷格本人没有直接使用完全性（completeness）这个术语。但诸多迹象表明，他所期望的数学系统是完全的，即能够把握每个数学思想的真值。否则就会有该系统无法判定其真假的句子。弗雷格不允许科学建立在这样一个模糊的基础之上。而在完全的系统中，任何引入新记号的数学定义都必须是非本质的，

---

[29] 弗雷格本人否认这构成对“A 得到了正确的分析”的一个证明。他认为“人们能做的至多是确定就语词的形式而言，分析后所得到的句子是一样的。但它的思想是否也保持一样是有疑问的。”PM, P. 209-11.

[30] PM, P. 211.

[31] PM, P. 206.

[32] PM, P. 225.

即类似于重言式而不增加任何内容。否则系统就会不一致了。因而，保守性与可取消性标准是必要的。

然而，自哥德尔（Kurt Gödel）证明不完全性定理以来，数学基础研究的进展让我们认识到，弗雷格的诸多理想是无法实现的。人们知道，弗雷格把数学建立在逻辑基础上的努力因为罗素悖论的发现而受挫。但这并不是本质的阻碍。为规避罗素悖论，罗素可以用类型分层的理论，新弗雷格主义者可以用休谟原则替换公理五，公理化集合论可以使用受限制的分离公理。真正的障碍在于，这些系统都不是完全的，并且按照哥德尔定理，根本上无法得到一个可判定的公理系统来把握所有的数学真。具体而言，弗雷格关于定义的诸标准是无法同时现实的。

假设给定系统内的所有定义都符合可取消性标准。我们可以逐步取消所有定义，那么系统中剩下的符号都是初始符号，它们必须有唯一确定的所指。也许弗雷格认为这不是问题。因为，他试图将算术建立在纯逻辑的基础之上，这个系统中不需要非逻辑的谓词或关系符号。但我们现在知道，弗雷格在《算术基本法则》中给出的系统实质上是某种二阶逻辑系统，其中涉及诸如Fx这样的表达式，而F、x是分别以概念和对象为论域的变元。对以这种方式组合的表达式的涵义有固定的解释模式。即，x所指的对象*落在*F所指的概念之下。或者说，这种表达式的形式本身具有“落在……之下”的涵义。而这个涵义是不明确的，就像集合论公理系统中∈的涵义是不明确的。因为，这些该系统如果是一致的话，那么就是不完全的。即存在二阶逻辑或集合论的句子，该句子的真假不是系统中可判定的。而如果该句子所有组成部分的涵义（如“落在……之下”）在系统中都是明确的，有唯一的所指，那么该句子的所指也应该是可判定的。因此，任何一致的数学系统，其中总有符号或表达式的涵义是不唯一的。由它们所定义的被定义项的涵义更无法保证所指的唯一性了。

因此，从今天的视角回看，弗雷格在 LIM 中的论述显然过于乐观了。甚至在当年，希尔伯特就已经取得了与弗雷格论战的胜利。希尔伯特并不要求数学系统的真，而只要求一致性。当代关于数学系统的一致性概念完全采纳了希尔伯特而非弗雷格的解释。[33]只是现在看来，希尔伯特形式主义也未必比弗雷格的核心立场（即数学思想有客观的真假，我们应该把握之）更有生命力。我们知道，希尔伯特在《几何学基础》中给出的所谓一致性证明都是相对一致性证明。即把几何的点、线、面等概念翻译为实数上的有序对、集合、卡氏积等。由此，如果几何公理不一致，那么关于实数的理论也是不一致的。但实数理论的一致性仍然是个问题。希尔伯特也意识到这点，他希望把这些一致性证明最终建立在有穷主义数学的基础上。这就是所谓的希尔伯特计划。然而，这个计划的意义预设了有穷主义数学为“真”。形式主义，似乎在这里放弃了它的立场，转而诉诸语义概念“真”。当然，形式主义者任然可以辩护，有穷主义的真与涉及无穷的数学的真有本质的不同，它就是形式操作的规律，是自明的。但是，哥德尔定理打破了这些幻想。首先，把经典数学（的一致性）建立在有穷主义数学的基础上是做不到的。其次，不完全性定理为我们勾画了这样一幅图景：诸数学系统按照一致性强度排列成一个偏序，每个系统都无法证明自己的一致性，而只能诉诸比它更有可能不一致的系统来证明这点。从某种意义上来说，仅仅诉诸形式证明来确证系统一致性的道路是根本上不可行的。弗雷格主张，数学公理必须是真的，而“如果数学公理必

[33] Blanchette, P. “The Frege-Hilbert Controversy” (ed. Spring 2014), The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2014, http://plato.stanford.edu/entries/frege-hilbert/

须是真的，那么它就不可能是彼此不一致的。”[34]而数学公理不真就是不一致。某种意义上，弗雷格关于数学系统的一致性与真的理解比纯粹的形式主义更协调也更富预见性。

七、数学定义与概念理论

接下来，我们尝试修改弗雷格过于乐观的预设而保留他的部分核心立场并给出一种与当代数学基础现状更兼容的理论。

弗雷格在 LIM 中按照被定义项的类型，分别讨论了关于概念、关系与函数的规定性定义。我们知道，在存在哥德尔编码的语境下，概念、关系、函数、专名的定义并没有本质的区别（函数、专名的定义需要辅以唯一性证明）。因此，我们下面的讨论以概念为例。

我们已说明弗雷格关于定义的诸标准是难以同时实现的。而弗雷格提出这些标准的理由源于他的信念：数学思想必须有唯一确定的所指，非真即假。其实，这一信念与他对概念的下述理解是等价的。

弗雷格将概念理解为具有“谓述性的特征，是一个有待填充的，正如句子的谓词部分总要求一个语法的主词，否则显然是不完整的”。我们可以简单地认为，概念就是谓词（有时又称作概念记号，concept-sign）的所指，正如对象是真名的所指，而真值是句子的所指一样。显然，谓词的涵义是句子涵义的组成部分，句子的所指，即真假取决于它的谓词的所指。由于弗雷格认为句子的所指非真即假，因此概念必须要有“明晰的边界”（sharp boundary），“意思是，对每个对象，要么它落在这个概念下，要么不是。”[35]反过来，每个数学概念有明晰的边界也要求所有数学思想都非真即假。例如，以 F 和 T 表示真值，并考虑概念：

要么是 F，要么是连续统假设的真值

如果连续统假设为真，那么这个概念的外延是$\{F, T\}$；如果连续统假设为假，那么它的外延是$\{F\}$。而如果连续统假设没有确定的真值，那么 T 落不落在这个概念之下就是存疑的，这个概念没有明晰的边界。因此，弗雷格关于数学思想非真即假的信念与他关于概念必须有明晰边界的理解是等价的。所以，概念理论可以看作是整个弗雷格数学哲学思想的投影。

弗雷格显然认为概念是客观的，独立于人的心理活动。上述列举的概念的外延要么是$\{F\}$要么是$\{F, T\}$，它的模糊性是心理学的而不是逻辑的。然而，当我们仔细分析其模糊性的来源，我们发现该概念边界的模糊性来源于连续统假设真值的模糊性，而连续统假设真值的不确定性是由于通常被我们作为数学基础的集合论公理系统 ZFC 不完全，无法证明连续统假设或其否定（除非它不一致）。这至少表明，我们通过 ZFC 这个系统体现出来的对所谓“集合”概念的理解是模糊的。而按照哥德尔不完全性定理，ZFC 任意一致的公理化扩张都是不完全的，即我们不可能给出关于“集合”这个基础概念的完备理解。当然，公理化集合论未必是唯一可行的数学基础。而哥德尔定理并不依赖于系统的基础概念是集合还是自然数，任何一致的公理系统，只要能够作为数学基础的候选（能够证明基本的算术事实）就总是不完全的，即如果我们认为这个系统是关于某个基础概念的话，通过这个系统体现的对其基础概念的理解是模糊的。

---

[34] PM, P. 247.
[35] PM, P. 229.

关于弗雷格概念理论另一个问题是，弗雷格是否承认独立于系统、句子、谓词及其涵义而存在的概念。弗雷格认为，“概念（就我对这个词的理解）是谓述性的”，“事实上，它是语法上的谓词的所指”[36]即概念总是某个谓词的所指，不存在不被任何谓词所指的概念。我们所知的数学系统都是建立在可数语言上的，其中能通过复合得到的谓述性的表达式也是至多可数的。因而，任意给定的系统中能定义的概念至多有可数个。弗雷格又认为系统的建立是一劳永逸的，通过可取消的规定性定义引入的概念记号都是可以用原来的记号组合替代的。弗雷格还认为，虽然存在不同的数学系统，但它们最终对应的数学思想及其所指是一样的。有理由认为，其中可定义的概念也是一样的。似乎可以由此推出，弗雷格认为数学概念只有可数多个。也许被普遍归为实在论者的弗雷格本人也会对这个推论感到惊讶。毕竟，存在不可数的自然数子集是当代实在论者普遍认可的事实。

另一方面，弗雷格所理解的概念至少是独立于人的心理活动的。人们出于心理的限制，有可能无法把握一个概念。

> 可能那个涵义通过一道迷雾才展示在两个人面前，当他们要抓住它的时候，他们错过了。其中一个人从它右边划过，可能另一位从左边划过。因此，尽管他们俩试图把握同一个东西，他们失败了。要有多浓的雾才会出现这种情况！但通过证明一定能发现他们没有把握同样的涵义。是的，这不可能失败，只要该证明是以逻辑地严格的方式绘制的，并且在推理链条中没有跳跃。[37]

弗雷格也许会辩解，今天人们谈论的不完全现象“不是一个算术问题，也不是逻辑问题，而是一个心理学问题”。[38]即使如此，有关定理也可以被解释为，人类的任何心智状态乃至任意有穷或可数的机制都无法把握任何一个基础概念。这是否可以被理解为一种逻辑的不可能？由此，我们是否应该更正弗雷格的概念理论，允许存在本质上无法被把握的概念？

事实上，弗雷格也意识到，我们无法证明关于一个概念的把握或分析是正确的。在上面的引文中，弗雷格给出了判定两种分析结果互不相同的方法。但这种方法只能证明两个人分析的是两个不同的概念，而不能用来证明任何一种分析正确地把握了那个概念。弗雷格还将这个观察作为反对分析性定义的理由之一。

哥德尔的概念理论是哥德尔哲学核心而神秘的部分。哥德尔在与王浩谈到“概念分析”的时候也有与弗雷格类似的说法。

> 存在这种情况，我们把两个或更多个明晰概念（sharp concept）混淆为一个直观概念（intuition concept），然后我们似乎得到了相悖的结果。……当我们意识到有两个不同的明晰概念被混淆为一个直观概念时，悖论就消失了。这里可以与感觉知觉类比。我们无法分辨远距离的两颗相邻的星球，但通过望远镜，我们能看到确实有两颗星球。[39]

然而，与弗雷格不同的是，哥德尔认为我们是有可能把握住一个明晰的概念的。按照王浩的报道，“图灵机就是最重要的例证，使得哥德尔相信明晰的概念

---

[36] Frege, G., “on Concept and Object”, *Mind*, Vol. 60, No. 238, 1951, p. 168-80. First published in the *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16 (1892), p. 192-205.
[37] PM, p. 217.
[38] PM, p. 222
[39] Wang, H,. *A Logical Journey: From Gödel to philosophy*. Mit Press, 1996, p. 234.

存在并且我们可以清晰地感知它们。”[40]然而，图灵本人却清醒地认识到关于图灵机可计算正确地刻画了“可计算”概念的“任何可以给出的论证都一定是从根本上诉诸直观的。”[41]无怪乎弗雷格拒绝接受此类工作是数学的一部分。

纵观数理逻辑的发展，对于“集合”、“真”、“证明”、“可计算”、“定义”等所谓基础概念的分析似乎是最主要的动机。然而，越来越多的证据表明，所谓对这些概念的精确把握是不现实的，或者是无法确证的。由此，近年来出现了诸如多宇宙观的新型集合论哲学。[42]主张不存在典范的集合概念，而是有各种各样的集合概念及其宇宙，集合论不是试图分析某个唯一典范的集合概念，而是要搞清楚诸多所谓集合概念之间的联系。如果把集合作为基础概念，典范集合概念的缺失会导致由它严格定义的其它概念也难以存在明晰的边界。例如，哈姆肯斯（Joel David Hamkins）与作者证明了[43]，存在两个集合论宇宙，它们中有相同的算术结构，但它们中用同样方式定义的算术真却是不同的。

可以说，弗雷格关于只有规定性定义是真正的数学定义论证的困难与当代数学哲学概念实在论者的困境都源于，似乎数学的基础概念乃至所有数学概念从根本上是模糊的。这让继承了弗雷格传统的概念实在论者有必要重新审视关于概念的基本假设，即数学概念是可把握的。或许应该承认，上文中提到的诸多迹象表明，数学概念从根本上是不可把握的。因此，使用专名指称一个概念或将定冠词置于“概念”之前的用法是无意义的。例如，“‘集合’概念”（the concept set）的说法就应该避免。但概念的不可把握并不意味着，尊从经济原则就必须否认概念的客观存在。相反，我们可以承认数学概念的存在，并组成一个数学概念的空间。量词可以以概念类或整个概念空间为辖域。例如，我们可以谈论“存在一个概念……”或“任意概念……”。

反对者可能会问：如果我们不能指称具体的概念，不能证明我们定义的这个概念就是那个概念。那么，数学命题又是关于什么的呢？例如，“度量空间都是豪斯多夫空间”若不是表明了两个概念之间的关系，又是什么呢？

已有的数学工作全部可以被看作是在某个给定形式语言和公理系统下的工作。一般认为，一个公理系统就是对其涉及的基础概念的定义。但这种定义是注定不完全的。我们可以换一种方式，把它理解为是对一个概念类的定义。例如，集合论多宇宙观将 ZFC 看作是对一个集合论复宇宙的定义，复宇宙中的每个集合论宇宙都可以视为某个集合概念的实现，然而其中并没有典范的集合论宇宙，因而也没有标准的集合概念。由此，数学真可以看作是关于概念类之间关系的正确描述。

这一框架下，规定性定义可以被视为给出了从若干基础概念类到被定义项所对应的概念类的一一对应。例如，度量空间和豪斯多夫空间都可以被规定为某类集合。在规定性定义下，每个集合概念对应于唯一一个度量空间或豪斯多夫空间概念。“度量空间都是豪斯多夫空间”可以被解释为，每个集合概念所对应的度量空间概念与豪斯多夫空间概念的外延之间都有包含于关系。

除了公理系统可以看作是对基础概念公理化的分析性定义，我们也能接受对派生概念的分析性定义。例如，随机性理论关于所谓“随机性”概念的刻画有很多，并没有形成像“可计算”概念那样一致的意见。但是，这些对随机性的刻画都必须

---

[40] 同上，p.194.

[41] Turing, A., “On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem”. *Proceedings of the London Mathematical Society*. Series 2, 42, 1936, P. 230-65.

[42] Hamkins, J. D., “The Set-theoretic Multiverse”, The Review of Symbolic Logic. Vol. 5, Issue 3, 2012, p. 416-449.

[43] Hamkins, J. D. and Yang, R., “Satisfaction is not absolute”, *arXiv*, 2013, http://arxiv.org/abs/1312.0670.

满足一些标准。例如在这些刻画中，被认为是随机的数列都必须满足不可压缩、不可预测以及大数定律（law of large numbers）等统计学要求。事实上，这些标准本身可以被视为一种分析性定义，它将一个概念类对应于一个基础概念。正如，我们可以通过加强 ZFC 得到更精细的集合概念类。我们也可以通过增加关于随机数的标准让每个基础概念对应于更精细的随机概念类。

文末简述的这种概念理论可以被视为是对集合论多宇宙观从集合概念类到一般概念类的推广。其动机也是在保留关于数学真的客观主义和概念实在论的基础上，更坦诚地接受当代数学基础研究为我们展现的图景。即，我们或由经验或通过证明发现，对一些直观的数学概念从根本上无法期待一个标准且完备的定义。当然，这种概念理论仍然非常粗糙，还有许多问题有待更细致的处理。例如：1) 这种概念理论是否能得到某种一致性证明？哈姆肯斯曾宣称证明了集合论多宇宙观并不会带来新的不一致。有关数学结果是否如他所宣称的那样证明了多宇宙观的一致性，它是否能对一般的概念理论有所启发？2) 这种理论禁止谈论概念本身，而只允许谈论人们把握的概念类。而概念类是否等价于它的语法定义，这是否又回到了一种唯名论的理解？

参考文献

弗雷格·吉，2006，《弗雷格哲学论著选辑》，王路译，北京：商务印书馆。

Beth, E. W. 1953, “On Padoa’s method in the theory of definition”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 56, p. 330-9.

Blanchette, P., 2014, “The Frege-Hilbert Controversy” (ed. Spring 2014), The Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/frege-hilbert/.

Dudman, V. H., 1973, “Frege on Definitions,” *Mind*, 83: p. 609–610.

Frege, G., 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S.: Louis Nebert.

Frege, G., 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner.

Frege, G., 1893/1903, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena: Verlag Hermann Pohle, Band I/II.

Frege, G., 1903, “Uber die Grundlagen der Geometrie” – First Series. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12: 319-24, 368-75. English translation in Frege 1984, p. 273–284.

Frege, G., 1906, “Uber die Grundlagen der Geometrie” – Second Series, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15: p. 293-309, p. 377-403,p. 423–30. English translation in Frege 1984, p. 293–340.

Frege, G., 1914, "Logic in Mathematics," in *Posthumous Writings*, edited by H. Hermes, F. Kambartel, and F. Kaulbach, Chicago: University of Chicago Press (1979), p. 203–250.

Frege, G. 1951, "on Concept and Object", *Mind*, Vol. 60, No. 238, p. 168-80. First published in the *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16 (1892), p. 192-205.

Frege, G., 1969, *Nachgelassene Schriften*, Hermes, Kambartel, Kaulbach (eds), Hamburg: Felix Meiner Verlag. (English translation as Frege 1979).

Frege, G., 1979, *Posthumous Writings*, Hermes *et al*. (eds.), Long, P. and White, R.M. (translator) Chicago: University of Chicago Press.

Frege, G., 1984, *Collected Papers on Mathematics, Logic and Phlosophy*, B. F. McGuinness (ed.), Oxford: Blackwell Publsishers.

Gupta, A. 2015, "Definitions"(ed. Summer 2015), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/definitions/.

Hamkins, J. D., 2012. "The Set-theoretic Multiverse", The Review of Symbolic Logic. Vol. 5, Issue 3, p. 416-449.

Hamkins, J. D. and Yang, R. 2013, "Satisfaction is not absolute", *arXiv*, http://arxiv.org/abs/1312.0670.

Kluge, E-H W., 1982, "Gottlob Frege: Posthumous Writings". *The Philosophical Review*, Vol. 91, No. 1982, p. 115-118.

Turing, A. 1936. "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem". *Proceedings of the London Mathematical Society*. Series 2, 42.

Urbaniak, R. and Hämäri, K.S., 2012, "Busting a Myth about Leśniewski and Definition", History and Philosophy of Logic 33, no, 2, p. 159-89.

Wang, H, 1996. *A Logical Journey: From Gödel to philosophy*. Mit Press.

Frege on Mathematical Definition

Abstract: In this article, we discuss Frege's theory of mathematical definition. In *Logic in Mathematics*, the discussion on mathematical definition occupies the most length of the whole writing. We will argue that some points of Frege's theory of definition go far ahead of his time, e.g., one of the earliest formulation of the criterion of stipulate definition, a predict of Beth Definability Theorem, and the insight into the relationship between consistency and truth. However, we also argues that Frege's main point, stipulate definition is the only type of proper mathematical definition, is not well-defended. Some of his assumptions are unrealistic concerning the results in mathematical logic known today. Nonetheless, we would try to fix Frege's theory so that it can be compatible with today's situation. Particularly, in the modified theory, analytical definition is are also admitted.

Key words: Philosophy of mathematics; Definition; Concept; Gottlob Frege