勘误更新及修改意见提交：`https://aplacenearby.ggr.fun/lap`

《作为哲学的数理逻辑》勘误

January 13, 2020

第 133-134 页

对 $\alpha < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ 定义 T_α，并称在 ZFC 的可数传递模型中每个 $\mathrm{Con}(T_\alpha)$ 都成立。这是错误的。感谢喻良教授与知乎用户张三指出错误，并提示图灵在 (Turing, 1939) 就证明了相关结果，而费弗曼（Solomon Feferman）在 (Feferman, 1962) 重写了有关证明。

在试图定义例如 $T_{\omega+1} = T_\omega + \mathrm{Con}(T_\omega)$ 时，"$\mathrm{Con}(T_\omega)$" 作为一则算术语句到底是什么取决于对无穷序数 ω 的自然数表示。通常我们用 Kleene's $\mathcal{O} \subset \mathbb{N}$ 来表示 $< \omega_1^{\mathrm{CK}}$ 的序数。参见：`https://en.wikipedia.org/wiki/Kleene's_O`。其中，每个无穷序数有无穷多个表达。算术中定义的 "T_ω" 对 ω 表达的选取是非常敏感的。即使自然数 n 与 m 表示了同一个序数，一般记作 $|n| = |m|$，通常 $T_n \neq T_m$。因此，书中原来的定义不是良定义的，甚至 T_ω 这个写法本身是不合适的。下面，我们尝试给出一种关于 T_n（$n \in \mathcal{O}$）的定义。

可以写出 Σ_1^0[①]公式 $\alpha(x, y)$ 使得：((Feferman, 1962), Theorem 3.8)。

(1) 若 $n = 0$，或对任意 $m \in \mathbb{N}$，$n \neq 2^m$，或对任意 $e \in \mathbb{N}$，$n \neq 3 \cdot 5^e$，那么

$$\{\sigma \mid \alpha(n, \ulcorner\sigma\urcorner)\} = \mathrm{ZFC};$$

(2) 对 2^m，有

$$\{\sigma \mid \alpha(2^m, \ulcorner\sigma\urcorner)\} = \{\sigma \mid \alpha(m, \ulcorner\sigma\urcorner)\} + \mathrm{Con}(\ulcorner\{\sigma \mid \alpha(m, \ulcorner\sigma\urcorner)\}\urcorner);$$

(3) 对 $3 \cdot 5^e$，有

$$\{\sigma \mid \alpha(3 \cdot 5^e, \ulcorner\sigma\urcorner)\} = \mathrm{ZFC} \cup \bigcup_{m \in \mathrm{ran}\,\Phi_e} \{\sigma \mid \alpha(m, \ulcorner\sigma\urcorner)\}$$

① 这里用集合论语言和 ZFC，实际上也可以用算术语言和足够强的（可以证明 $<_{\mathcal{O}}$ 良序的）算术系统。

令 $T_n = \{\sigma \mid \alpha(n, \ulcorner\sigma\urcorner)\}$。由于 (1)、(3) 中宽松的设定，对于任何 $n \in \mathbb{N}$，即使 $n \notin \mathcal{O}$，T_n 都是有清晰的定义的。由于 α 是 Σ^0_1 的，而 n 就是一个自然数，因此每个 T_n 都是递归可枚举的，$\mathrm{Con}(\ulcorner T_n \urcorner)$ 是一则明确的算术语句，后面简写为 $\mathrm{Con}(T_n)$。显然，$T_0 = \mathrm{ZFC}$。对任意 $n \in \mathbb{N}$，有 $T_{2^n} = T_n + \mathrm{Con}(T_n)$。注意，如果只是 $|n| = |m| + 1$（或 $n \simeq_{\mathcal{O}} m +_{\mathcal{O}} 1_{\mathcal{O}}$），未必有 $T_n = T_m + \mathrm{Con}(T_m)$。

注意：无论 e 是什么，我们总是有 $T_{3\cdot 5^e} = \mathrm{ZFC} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_{\Phi_e(n)}$。而如果 $3 \cdot 5^e \in \mathcal{O}$（即，$\Phi_e$ 是全函数，$\mathrm{ran}\,\Phi_e \subset \mathcal{O}$，并且对任何 n 有 $\Phi_e(n) <_{\mathcal{O}} \Phi_e(n+1)$。)，可以证明 $T_{3\cdot 5^e} = \bigcup_{n<_{\mathcal{O}} 3\cdot 5^e} T_n$（可以对良基的 $<_{\mathcal{O}}$ 归纳证明：$n <_{\mathcal{O}} m$ 蕴含 $T_n \subset T_m$）。所以，$\{T_n\}_{n\in\mathcal{O}}$ 的定义基本符合我们直观中想要定义的 $\{T_\alpha\}_{\alpha<\omega_1^{\mathrm{CK}}}$。只是，我们定义出来的不是一个线性甚至不是有向的系统，而是一个树形的系统。

接下来我们复述费弗曼整理的 (Turing, 1939) 的结果。

定理 0.1 对任何 Π^0_1 公式 $\forall x\varphi(x)$（φ 是 Δ^0_1 的），存在 $d \in \mathcal{O}$，$|d| = \omega$，且若 $\forall x\varphi(x)$ 真则 $T_d \vdash \forall x\varphi(x)$。

Proof 任给 $\forall x\varphi(x)$。令 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是原始递归函数：$f(0) = 0$，$f(n+1) = 2^n$。显然，每个 $f(n) \in \mathcal{O}$，且 $|f(n)| = n$。根据递归定理等，可以构造递归函数 Φ_e 满足

$$\Phi_e(n) = \begin{cases} f(n), & \text{若 } \forall x < n\varphi(x) \\ 2^{3\cdot 5^e}, & \text{否则} \end{cases}$$

令 $d = 2^{3\cdot 5^e}$。

如果 $\forall x\varphi(x)$ 真，则 $\Phi_e(n) = f(n)$ 对所有 n 成立，因而 $|3\cdot 5^e| = \omega$，$|d| = \omega+1$。并且，$T_{3\cdot 5^e} = \bigcup_{m\in\mathrm{ran}\,\Phi_e} T_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_{f(n)}$。而 $T_d = T_{3\cdot 5^e} + \mathrm{Con}(T_{3\cdot 5^e})$。

接下来，我们在 T_d 中（包含 ZFC 和 $\mathrm{Con}(T_{3\cdot 5^e})$）证明：

> 如果 $\forall x\varphi(x)$ 不成立，则存在最小的 $N \in \mathbb{N}$ 使得对任何 $n \geq N$ 都有 $\Phi_e(n) = d$。故 $T_{3\cdot 5^e} = \bigcup_{m\in\mathrm{ran}\,\Phi_e} T_m = T_{f(0)} \cup \cdots \cup T_{f(N)} \cup T_d$，而 $T_d = T_{3\cdot 5^e} + \mathrm{Con}(T_{3\cdot 5^e})$。故 $T_{3\cdot 5^e} = T_d$。因而，$T_{3\cdot 5^e} \vdash \mathrm{Con}(T_{3\cdot 5^e})$。根据哥德尔第二不完全性定理以及 $T_{3\cdot 5^e}$ 是递归可枚举的，$T_{3\cdot 5^e}$ 不一致。矛盾。故 $\forall x\varphi(x)$ 成立。

因此，$T_d \vdash \forall x\varphi(x)$。 □

注意，上述证明中从 φ 找到 $d \in \mathcal{O}$ 的过程是原始递归的。

参考文献

Feferman, S. 1962. Transfinite Recursive Progressions of Axiomatic Theories. *The Journal of Symbolic Logic*, 27(3):259–316.

Turing, A. M. 1939. Systems of logic based on ordinals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 45(2):161–228.