25年暑期学校递归论讨论课（第一部分）

目录

讨论课作为课堂之补充，将介绍限于时间等因素不能详细讲授的内容及习题。前三日讨论课与课程主题对应：递归论基础；能行力迫法；高阶递归论入门。第一天讲前三节，第二天讲四五节，第三天讲第六节。除习题外，笔者还选择了如下课题：

我们讨论康托空间的勒贝格测度的原因有二：一则测度在递归论中的应用已十分成熟，早期如Spector不可比较超算术度存在性定理，De Leeuw-Moore-Shannon-Shapiro定理等，都与课程有关；二则Martin-Löf随机性也是通过测度定义的概念，窃以为在学随机性之前，了解测度很有意义。

能行力迫法贯穿递归论的发展历程，在几乎所有相关领域都有应用。仅举若干例子：首先是在递归论中应用广泛的Posner-Robinson定理；此外我们已知Spector极小度存在定理，接下来的问题是极小度的可能复杂性，于是我们介绍Sacks的一个定理。

优先方法是递归论一大特色，不可不谈。我们以Lachlan-Yates极小对定理为例复习之。

除上述外，对于高阶递归论，我们仅复习和讨论习题。我们使用中文，对于概念的翻译我们参考郝兆宽-杨睿之-杨跃书和杨东屏-李昂生书。其余书已列结尾供看官参考。

赵烜恒
二五年七月

1 测度

本节很大程度参考*Downey-Hirschfeldt*书。

设m是区间$[0,1]$上Lebesgue测度，μ是Cantor空间2^ω上Lebesgue测度[1]。Cantor空间和区间$[0,1]$作为测度空间同构，从而继承了欧氏空间Lebesgue测度诸多好性质。此平易事实乃本节之根本，看官执此根，纵使主干参天，枝繁叶茂，亦可知矣。

称可测集$A\subseteq 2^\omega$在点$x\in 2^\omega$有密度$d\in[0,1]$，如果

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\mu(A\cap[x\upharpoonright n])=d.$$

记

$$D(A)=\{x\in 2^\omega : A在x处密度为1\}.$$

定理 1. *(Lebesgue 密度定理) 若$A\subseteq 2^\omega$可测，则$D(A)\Delta A$（对称差）零测。*

定理中相差之零测集似为美中不足，然实属无奈，且无大碍，应用时我们常已假设A有正测度，而仅为说明$D(A)$非空。

证明. 以下证明本质为Lebesgue微分定理和Vitalli覆盖定理证明在Cantor空间中之简化。

只需证$\mu(A-D(A))=0$，因如此则$D(A)-A\subseteq(2^\omega-A)-D(2^\omega-A)$也零测。

只需证对任意$\varepsilon>0$，

$$B_\varepsilon=\left\{x\in A : \liminf_n 2^n\mu(A\cap[x\upharpoonright n])<1-\varepsilon\right\}$$

零测。

假设不然，则存在$\varepsilon>0$及开集$U\supseteq B_\varepsilon$使得外测度$\mu^*(B_\varepsilon)>(1-\varepsilon)\,\mu(U)$。令

$$I=\{\sigma : [\sigma]\subseteq U\wedge 2^{|\sigma|}\mu(A\cap[\sigma])<1-\varepsilon\}.$$

引理 2. *若$\sigma_0,\sigma_1,\ldots\in I$满足对任何$i\neq j$，$[\sigma_i]\cap[\sigma_j]=\emptyset$，则$\mu^*(B_\varepsilon-\bigcup_i[\sigma_i])>0$。*

证明.

$$\mu^*\left(B_\varepsilon\cap\bigcup_i[\sigma_i]\right)\leqslant\mu\left(A\cap\bigcup_i[\sigma_i]\right)=\sum_i\mu(A\cap[\sigma_i])<(1-\varepsilon)\,\mu(U)<\mu^*(B_\varepsilon).$$

□

构造$\sigma_0,\sigma_1,\ldots$如下：任取I中σ_0。给定$\sigma_i(i\leqslant n)$，令

$$I_n=\{\sigma\in I : (\forall i\leqslant n)\,[\sigma]\cap[\sigma_i]=\emptyset\}.$$

则由引理，I_n非空。取I_n中σ_{n+1}使得$2^{-|\sigma_{n+1}|}>\frac{1}{2}\sup_{\sigma\in I_n}2^{-|\sigma|}$。由引理，设$x\in B_\varepsilon-\bigcup_n[\sigma_n]$，则存在$\sigma\in I$使得$x\in[\sigma]$。取$n$使得$[\sigma]\cap[\sigma_n]\neq\emptyset$，因为$\sigma\in I_{n-1}$，则$\sigma\supseteq\sigma_n$，矛盾。 □

称$A\subseteq 2^\omega$是一个尾集，如果对任意$x,y\in 2^\omega$，若$x=^*y$（x和y仅相差有限位），则$x\in A\Leftrightarrow y\in A$。

推论 3. *(i)可测尾集的测度是零或一。*

(ii)若$A\subseteq 2^\omega$可测且有正测度，则对几乎所有$x\in 2^\omega$，存在$y\in A$使得$x=^*y$，即x和y仅相差有限位。

(iii)若$A\subseteq 2^\omega$可测且有正测度，则存在x,$y\in A$使得$x=^*y$但$x\neq y$。

证明. (iii). 假设不然。由密度定理，存在σ使得$2^{|\sigma|}\mu(A\cap[\sigma])>\frac{3}{4}$。记$A_0=A\cap[\sigma 0]$，$A_1=A\cap[\sigma 1]$。对任意$y\in 2^\omega$，若$\sigma 0y\in A_0$，则$\sigma 1y\notin A_1$。从而$\mu(A_0)\leq\mu([\sigma 1]-A_1)$，同理$\mu(A_1)\leq\mu([\sigma 0]-A_0)$。于是

$$2^{|\sigma|}\mu(A\cap[\sigma])=\frac{\mu(A_0)+\mu(A_1)}{\mu(A_0)+\mu([\sigma 0]-A_0)+\mu(A_1)+\mu([\sigma 1]-A_1)}\leq\frac{1}{2},$$

矛盾。 □

定理 4. *设$x,z\in 2^\omega$，$A\subseteq 2^\omega$正测。*

1. 粗略地说，如此定义μ（m同理）：先对基本开集$[\sigma]$定义$\mu([\sigma])$为$2^{-|\sigma|}$，其中$|\sigma|$表示串σ之长度，而后将μ循可加性延拓到更广的集合类上。

(i) (De Leeuw, Moore, Shannon and Shapiro) 若x相对于A每个元素递归可枚举，则x递归可枚举。特别地，若x相对于A每个元素递归，则x递归。

(ii) (Stillwell) 若$\mu(\{y\in 2^\omega : x\leq_T z\oplus y\})>0$，则$x\leq_T z$。

推论 5. *(Stillwell)* 设$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$是图灵度。则对几乎所有图灵度$\mathbf{c}$，$(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}\vee\mathbf{c})=\mathbf{a}$。

Simpson证明图灵度$(\mathbf{D},\leqslant)$的一阶理论和二阶算术理论$\mathrm{Th}^2(\omega,+,\times,\leqslant,0,1)$递归同构[2]，于是图灵度$(\mathbf{D},\leqslant)$的一阶理论是不可判定的[3]。

Stillwell证明图灵度作为上半格，添加表示跃迁的函数符号，以及表示递归度的常数符号，并且将$\forall$理解为在测度意义下几乎处处成立所得到的理论可判定[4]。

最后讨论测度正则性之能行化。所谓测度正则性，是指在该测度下可测集能够被开集从外逼近或被紧集从内逼近之性质。

引理 6. *(Kurtz)* 设$S\subseteq 2^\omega$是Σ^0_n类。则$\{q\in\mathbb{Q}: q<\mu(S)\}$是$\Sigma^0_n$集合。

证明. 对n归纳。 $\square$

定理 7. *(Kurtz-Kautz) (i)* 存在一算法：任给有理数q和一Σ^0_n类S（指标），计算一$\Sigma^{0,\emptyset^{(n-1)}}_1$类$U$使得$U\supseteq S$且$\mu(U)-\mu(S)<q$。

(ii) 存在一相对于$\emptyset^{(n)}$的算法：任给有理数q和一Σ^0_n类S，计算一$\Pi^{0,\emptyset^{(n-1)}}_1$类$V$使得$V\subseteq S$且$\mu(S)-\mu(V)<q$。

(iii) 存在一算法：任给一Σ^0_n类S，计算一$\Sigma^{0,\emptyset^{(n-2)}}_2$类$U$使得$U\subseteq S$且$\mu(U)=\mu(S)$。

证明. 对n归纳同时证(i)和(ii)，证明中(i)要用(ii)，(ii)要用引理。而后由(i)得(iii)。 $\square$

注意 8. 每个$\Sigma^{0,\emptyset^{(n-1)}}_1$类都是$\Sigma^0_n$类，反之不然。首先，$\Sigma^0_n$类未必开。例如几乎所有位都是0的实数构成$\Sigma^0_2$类且非开。进一步，存在闭$\Pi^0_2$类不是$\Pi^{0,\emptyset'}_1$类，例如单点$\{\emptyset^{(\omega)}\}$。

---

2. 这是蔡铭中老师一八年在复旦暑期学校所讲主题。

3. 这一定理属于Lachlan。

4. 详见Downey-Hirschfeldt书Stillwell Theorem一节，证明用到上面的推论，Fubini定理和几乎所有集合具有广义低性的事实。

2 模函数和极限引理

定理 9. *(Shoenfield)* 函数$f \in \Delta^0_{n+1}$当且仅当存在递归函数g使得

$$f(n) = \lim_{m_1} \lim_{m_2} \cdots \lim_{m_n} g(n, m_1, \ldots, m_n).$$

设$x = \lim_s x_s$，称函数m是$\{x_s\}$的一个模函数，如果

$$(\forall n)\,(\forall s \geqslant m(n))\,[x_s \upharpoonright n = x].$$

定义

$$m_x(n) = \mu s[x_s \upharpoonright n = x],$$

$$c_x(n) = \mu s > n[x_s \upharpoonright n = x]。$$

定理 10. 设$x = \lim_s x_s$且$\{x_s\}_{s \in \omega}$递归，若函数$g > c_x$，则$x \leq_T g$。

失之毫厘，差以千里。

定理 11. *(Soare)* 存在集合$x \equiv_T \emptyset'$和递归序列$\{x_s\}$使得$x = \lim_s x_s$且$m_x(n) \leq n + 1$。

定理 12. 设x递归可枚举，集合$y \leq_T x$。则存在递归序列$\{y_s\}$使得$y = \lim_s y_s$及模函数$m \leq_T x$。

特别地，若x有递归可枚举度，则存在$\{x_s\}$使得$x = \lim_s x_s$且模函数$m \leq_T x$。反过来，设$x = \lim_s x_s$且$\{x_s\}$递归，若存在模函数$m \leq_T x$，令

$$C = \{\langle s, n\rangle: (\exists t > s)\,[x_s(n) \neq x_t(n)]\},$$

则C递归可枚举且$C \equiv_T x$，即x有递归可枚举度。

定理 13. *(Ng, Stephan, 杨和喻)* 设$P \subseteq 2^\omega$是$\Pi^{0,\emptyset'}_1$类，$x \in P$是*HIF*的，则存在Π^0_1子类$Q \subseteq P$使得$x \in Q$。

证明. 由极限引理，设Δ^0_2树$T = \lim_s T_s$满足$[T] = P$。令

$$f(n) = \mu k \geq n[x \upharpoonright n \in T_k].$$

则$f \leq_T x$。因为x是HIF的，取递归函数$g > f$。令

$$Q = \{\sigma \in 2^{<\omega}: (\forall n < |\sigma|)\,(\exists k \in [n, g(n)])\,[\sigma \upharpoonright n \in T_k]\}.$$ □

定理 14. *(Shore)* 设集合V递归可枚举但非递归，则存在*1-*通用*(1-generic)*集$A \leq_T V$。

证明. 固定V的一个递归枚举$\{V_s\}_{s \in \omega}$并定义枚举的模函数$m_V(s) = \mu t[V_t \upharpoonright s = V \upharpoonright s]$。构造$A = \cup_s \sigma_s$如下：第$s+1$阶段 选取最小的$e \leq s$使得$\sigma_s \notin W_{e,s}$且$(\exists \sigma)_{|\sigma| \leq m_V(s)}[\sigma_s \subset \sigma \wedge \sigma \in W_{e, m_V(s)}]$。若$e$存在，取最短的$\sigma$，令$\sigma_{s+1} = \sigma$；否则令$\sigma_{s+1} = \sigma_s\hat{}0$。

假设A不是1-通用的，则存在最小的自然数e使得

$$(\forall \sigma \subset A)\,[\sigma \notin W_e \wedge (\exists \tau \supset \sigma)\,\tau \in W_e].$$

如此，对任意$s \geq e$，我们能够递归地复现第$s+1$阶段的构造：搜索$\sigma \supset \sigma_s$使得$\sigma \in W_e$；计算$m_V(s)$；计算σ_{s+1}。从而$V \equiv_T m_V$递归，矛盾。 □

3 能行闭集

定理 15. *(Jockusch, Soare)* 非空Π^0_1类P有元素x使得x'左递归可枚举。

证明. 对$\tau \in 2^{<\omega}$，令

$$Q_\tau = \{y \in P \colon \forall e < |\tau| \, [\tau(e) = 0 \Rightarrow \Phi^y_e(e)\uparrow]\}.$$

“$Q_\tau = \emptyset$”是Σ^0_1性质且$Q_\tau \neq \emptyset \Rightarrow Q_{\tau\hat{\ }1} \neq \emptyset$。令$B = \{\tau \colon Q_\tau \neq \emptyset\}$则$[B] \neq \emptyset$。$[B]$中最左道路$y$左递归可枚举且存在$x \in \bigcap_e Q_{y \upharpoonright e}$。对任何$e$，

$$\Phi^x_e(e)\uparrow \Rightarrow Q_{y\upharpoonright e} \cap \{z \colon \Phi^z_e(z)\uparrow\} \neq \emptyset \Rightarrow y(e) = 0 \Rightarrow \Phi^x_e(e)\uparrow. \qquad \square$$

令

$$A = \{f \in \omega^\omega \colon (\forall e)\, [\varphi_e(e)\downarrow \Rightarrow \varphi_{e, f(e)}(e)\downarrow]\},$$

则A非空Π^0_1但不满足低基定理。

定理 16. *(Jockusch, Soare)* 非空Π^0_1类P有*HIF*元素x满足$x'' \equiv_T \mathrm{Tot}^x \leq_T \emptyset''$。

证明. 搜索n使得$\{\sigma \in T_e \colon \Phi^\sigma_{e,|\sigma|}(n)\uparrow\}$无穷。 $\square$

特别地，存在HIF且DNR的集合$x \leq_T \emptyset''$。

4 有限延伸

定理 17. *(Posner-Robinson)* 设集合B非递归，则存在集合G使得$G \oplus B \geq_T G'$。

递归论构造证明大致可分三步。第一步是写构造或算法；第二步是说明构造之合理性；第三步是验证一切需求皆被满足。下面证明是典例。

证明. 本证明属于Jockusch和Shore。要证一关于图灵度的结论，因此可假定B非递归可枚举：由于B非递归，则$B \oplus (\omega - B)$非递归可枚举，其与B图灵等价。此假设看似突兀，待到证明结尾，方可看出这一步实为妙手偶得。

下面用有穷扩张法构造集合$G = \bigcup_n \sigma_n$：

在第$s+1$阶段，搜索最小的自然数k使得

(i) k在B里，并且对任意扩张$\sigma_s 0^k 1$的串τ，总有$\Phi_s^\tau(s)$永远不停；或者

(ii) k不在B里，并且存在扩张$\sigma_s 0^k 1$的串τ使得$\Phi_s^\tau(s)$在第$|\tau|$步之前停机。

如果这样的k存在，且(i)发生，则定义$\sigma_{s+1} = \sigma_s 0^k 1$。否则(ii)发生，则取满足(ii)中条件的最短串τ，将其定义为σ_{s+1}。

我们需证上述构造确能进行，即在任何一阶段两种情况确有一种能发生。假设不然，设构造在第$s+1$步停滞，这等价于对任意数k，k在B里当且仅当存在扩张$\sigma_s 0^k 1$的串τ使得$\Phi_s^\tau(s)$在第$|\tau|$步之前停机。这样我们已给出B的一个递归枚举，但早已假设B非递归可枚举，矛盾。

不难验证$G \oplus B \geq_T G'$，即仅通过G和B之信息便可复现构造中每一步之结果。 □

上面证明可相对化。

命题 18. 设$B \not\leq_T C$，则存在集合G使得$G \oplus C \oplus B \geq_T (G \oplus B)'$。

推论 19. （*Slaman and Steel*）假设决定性公理。如果函数$f: 2^\omega \to 2^\omega$满足：

（*i*）$A \geq_T B$蕴含$f(A) \geq_T f(B)$；并且

（*ii*）$f(A) \geq_T A$而$A \not\geq_T f(A)$。

则存在集合C使得对任意集合D，如果$D \geq_T C$，则$f(D) \geq_T D'$。

证明. 对任意集合A，存在集合G使得$G \geq_T A$且$G \oplus f(A) \geq_T G'$。进而$f(G) \geq_T G \oplus f(A) \geq_T G'$。从而集合$\{G: f(G) \geq_T G'\}$图灵度不变，并且其元素可有任意高图灵度。由决定性公理，结论成立。 □

5 极小度

称图灵度$\mathbf{a}$极小，如果$\mathbf{a}>\mathbf{0}$且不存在度$\mathbf{b}$使得$\mathbf{0}<\mathbf{b}<\mathbf{a}$。称树$T\subseteq 2^{<\omega}$完美，如果对任意$\sigma\in T$，存在不可比较的$\tau_0$,$\tau_1\supset\sigma$使得$\tau_0$,$\tau_1\in T$。

图灵度$\mathbf{0}''$之下有$2^{\aleph_0}$个极小度。 事实上， 只要按Spector方法构造一个极小度， 则不难结合Kleene-Post定理构造$2^{\aleph_0}$个。为了构造一极小度，假设在第s阶段结束时已构造递归完美树T_s和$\sigma_s\in T_s$。我们将定义$A=\bigcup_s\sigma_s\in\bigcap_s T_s$并在第$s+1$阶段确保若$\Phi_s^A$是处处定义的，则要么$\Phi_s^A$递归，要么$\Phi_s^A\equiv_T A$：

第$s+1$阶段 用$\emptyset''$搜索$\tau\in T_s$使得$\tau\supseteq\sigma_s$且

$$(\forall m)\,(\forall\nu_0,\nu_1\supseteq\tau)_{\nu_0,\nu_1\in T_s}\big[\,\big(\Phi^{\nu_0}_{s,|\nu_0|}(m)\downarrow\wedge\Phi^{\nu_1}_{s,|\nu_1|}(m)\downarrow\big)\Rightarrow(\Phi^{\nu_0}_s(m)=\Phi^{\nu_1}_s(m))\,\big].$$

给定树$T\subseteq 2^{<\omega}$，$\sigma\in T$和自然数e，定义T在σ下的e-分裂子树$\mathrm{Sp}(T,\sigma,e)$如下：

(i) 归纳定义集合T_0如下： 令$\sigma\in T_0$； 假设$\tau\in T_0$， 若存在ρ, $\gamma\in T$和自然数n使得$\rho\supset\sigma_0,\tau\supset\sigma_0$且$\Phi_e^\rho(n)\downarrow\neq\Phi_e^\tau(n)\downarrow$，将最先找到的一对$\rho$和$\tau$放入$T_0$。

(ii) 令$\mathrm{Sp}(T,\sigma,e)$为T的由T_0生成的子树。

定理 20. *(Sacks) 存在极小度*$\mathbf{a}<\mathbf{0}'$。

证明. (Shoenfield) 构造$A=\cup_s\sigma_s\leq_T\emptyset'$如下。

令$T_0^s=2^{<\omega}$,$\forall s$和$\sigma_0=\emptyset$。归纳地，设在第s阶段已定义σ_s和递归可枚举树$T_e^s\,(0<e\leqslant s)$且

$$\sigma_s\in T_e^s\subseteq T_{e-1}^s,\forall 0<e\leqslant s.$$

第$s+1$阶段构造： 令$n_s=\max\{n\leqslant s{:}\,\exists\rho\in T_n^s(\rho\supset\sigma_s)\}$， 若$\sigma_s0\in T_{n_s}^s$， 令$\sigma_{s+1}=\sigma_s\hat{}0$； 否则令$\sigma_{s+1}=\sigma_s\hat{}1$。接着定义

(i) $T_e^{s+1}=T_e^s$,$\forall e\leqslant n_s$。

(ii) $T_{n_s+1}^{s+1}=\{\sigma\in T_{n_s}^s{:}\,\sigma\subseteq\sigma_{s+1}\vee\sigma\supset\sigma_{s+1}\}$。

(iii) $T_{e+1}^{s+1}=\mathrm{Sp}(T_e^{s+1},\sigma_{s+1},e)$ 若$n_s<e\leqslant s$。

由(ii)并对e归纳得$(\forall e)\,(\exists t)\,(\forall s\geqslant t)\,[n_s\geqslant e]$。定义$s_e=\mu t[\forall s\geqslant t\,(n_s\geqslant e)]$。则定义$T_e:=\lim_s T_e^s=T_e^{s_e}$。

给定e。若$s_{e+1}=s_e$， 则$T_{e+1}=\mathrm{Sp}(T_e^{s_e},\sigma_{s_e},e)$且$\Phi_e^A$处处定义蕴含$A\equiv_T\Phi_e^A$。于是可假设$s_{e+1}>s_e$。

断言

$$(\forall\rho,\tau\in T_{e+1})\,[\rho,\tau\supset\sigma_{s_{e+1}}\Rightarrow(\forall x)\neg[\Phi_e^\rho(x)\downarrow\neq\Phi_e^\tau(x)\downarrow]].\tag{1}$$

设(1)成立且Φ_e^A处处定义，则Φ_e^A递归。

假设存在$\rho,\tau\in T_{e+1}$，$\rho,\tau\supset\sigma_{s_{e+1}}$，$x\in\omega$使得$\Phi_e^\rho(x)\downarrow\neq\Phi_e^\tau(x)\downarrow$。 由于$n_{s_{e+1}-1}=e$， 则$\rho,\tau\in T_e^{s_{e+1}-1}$。分为如下两种情况。

1. 存在j使得$s_e\leqslant j\leqslant s_{e+1}-2$, $T_{e+1}^{j+1}=\{\sigma\in T_e^j{:}\,\sigma\subseteq\sigma_{j+1}\vee\sigma\supset\sigma_{j+1}\}$， 且$T_{e+1}^{j+1}=T_{e+1}^{j+2}=\cdots=T_{e+1}^{s_{e+1}-1}$。则 ρ,$\tau\in T_{e+1}^{j+1}=T_{e+1}^{s_{e+1}-1}$且$n_{s_{e+1}-1}\geqslant e+1$，矛盾。

2. 否则有$T_{e+1}^{s_{e+1}-1}=\mathrm{Sp}(T_e^{s_{e+1}-1},\sigma_{s_{e+1}-1},e)$或$\{\sigma\in T_e^{s_{e+1}-1}{:}\,\sigma\subseteq\sigma_{s_{e+1}-1}\vee\sigma\supset\sigma_{s_{e+1}-1}\}$。则$n_{s_{e+1}-1}\geqslant e+1$，矛盾。

假设A递归， 取e使得$(\forall\sigma\not\subset A)\,\Phi_e^\sigma(x)=\sigma(x)$且$(\forall\sigma\subset A)\,\Phi_e^\sigma\uparrow$。若$s_{e+1}=s_e$， 则 $A\in[T_{e+1}]=[\mathrm{Sp}(T_e^{s_e},\sigma_{s_e},e)]$，矛盾。若$s_{e+1}>s_e$，则(1)成立。但$[T_{e+1}]$没有孤立点，矛盾。 □

Yates和Cooper独立证明了每个递归可枚举度之下都有一个极小度， 这推广了Sacks定理。Cooper最终将逆跃迁和极小度构造结合，证明了任何在$\mathbf{0}'$之上的度都是某个极小度的跃迁[5]，度结构之复杂由此可见一斑。

将极小度构造相对化并编码可得如下推论。

推论 21. *(Sacks) 假设*$\{\mathbf{b}_n\}$*是一列严格上升图灵度，则存在*$\{\mathbf{b}_n\}$*的上界*$\mathbf{a}$*使得*$(\forall\mathbf{c}<\mathbf{a})\,(\exists n)\,(\mathbf{b}_n\not\leqslant\mathbf{c})$。

5. 详见Barry Cooper的七三年的论文 Minimal degrees and the jump operator。

6 Lachlan-Yates极小对存在定理

我们选取递归可枚举极小对存在定理来说明优先方法的使用[6]，Lachlan和Yates在六六年各自独立证明了此结论。本节用Lerman的证明。

称集合A和B构成一个极小对， 如果满足$C \leq_T A$且$C \leq_T B$的集合C都是递归的。 下面我们构造递归可枚举极小对$(A_0,\ A_1)$。 我们需要保证A_0和A_1非递归， 并满足需求N_e： 若对任意的自然数n，$\Phi_e^{A_0}(n)$和$\Phi_e^{A_1}(n)$都存在且相等，则函数$\Phi_e^{A_0}$递归。

如果N_e都被满足，则$A_0 \neq A_1$。不妨设存在$n \in A_0 - A_1$。对任意的$i \neq j$，存在e使得

$$\Phi_e^X(x) = \begin{matrix} \Phi_i^X(x) & n \in X \\ \Phi_j^X(x) & n \notin X \end{matrix},$$

从而N_e被满足蕴含下面的需求被满足： 若对任意的自然数n， $\Phi_i^{A_0}(n)$和$\Phi_j^{A_1}(n)$都存在且相等， 则函数$\Phi_i^{A_0}$递归。从而(A_0, A_1)是极小对。

设函数π: $\{0,1\} \times \omega \rightarrow \omega$为$(i,j) \mapsto 2j+i$，从而有$\pi_0^{-1}$: $2j+i \mapsto i$和π_1^{-1}: $2j+i \mapsto j$。

定义

$$l(e,s) = \max\,\{m \colon \Phi_e^{A_0} \upharpoonright m[s] = \Phi_e^{A_1} \upharpoonright m[s]\}.$$

看官可参考郝杨杨书对Sacks分裂定理证明想法之解释来理解l函数。

我们将每个二元组$(s,e) \in \omega^2$看作一个小球， 每个袋口B_n是小球的动态集合， 且总有$|B_n| \leq 2$。按$B_0, B_1, B_2, \ldots$的顺序将袋口从下到上排列，小球只能从上至下流动。称小球(t,e)优先度强于(s,i)，如果$e < i$或$e = i \wedge t < s$。

构造：第0阶段 令每个B_n都是空集。

第$s+1$阶段 (i)取最小的e使得e未作用且不存在t使得$(t,e) \in B_e$， 将(s,e)放入B_e， 将优先度弱于(s,e)的小球从$\bigcup_n B_n$中清除。

(ii)搜索优先度最强的小球(t,e)使得e未作用且存在$n \leq e$使得

(a) $n = e$，$(t,e) \in B_n$且$\varphi_{\pi_1^{-1}(e)}(t)[s] = 0$（这个条件是为了保证$A_0$和$A_1$非递归）；或

(b) $n < e$，$(t,e) \in B_n$且$l(n,s) = \max_{t \leq s} l(n,t)$。

将优先度弱于(t,e)的小球从$\bigcup_n B_n$中清除。搜索最大的自然数$m < n$使得B_m此时为空集：若m不存在，将t移到$A_{\pi_0^{-1}(e)}$中， 并称e已作用， 对任意t'，将(t',e)从$\bigcup_n B_n$中清除；若m存在，将(t,e)移到B_m中。

A_0和A_1非递归。事实上，假设$A_0 = \varphi_i$。设$e = 2i$。则e始终不能作用。总存在阶段$s+1$使得e是满足(i)的最小自然数，并且(s,e)将不会因为优先度弱而被清除，这是因为我们保证了每个袋口在任何时刻至多装有两个小球。如果(s,e)始终在$\bigcup_n B_n$中， 则$A_0(s) = 0$， 从而$\varphi_i(s) = 0$， 则(s,e)将被移动到$\bigcup_{n<e} B_n$中， 于是又有更大的阶段$t+1$使得e是满足(i)的最小自然数，但这样的阶段至多有$e+1$个，矛盾。

假设$\Phi_e^{A_0} = \Phi_e^{A_1}$且$\Phi_e^{A_0}$是处处定义的，则$\lim_s l(e,s) = \infty$。选取$s$使得第$s$阶段后对任意的$i \leq e$，袋口$B_i$不再通过(i)放入新的小球；且在第$s$阶段结束时，对任意的$i \leq e$，若至多存在有限个阶段使得其结束时$B_i$为空集，则在第$s$阶段结束时$B_i$中有小球，且若小球$(t,j) \in B_i$，则$(t,j)$永久停留在$B_i$中（由构造可以证明这样的$s$一定存在）。

固定自然数x。搜索最小的$k > s$使得$l(e,k) > x$且对$\forall i \leq e$，若存在无穷个阶段使得其结束时B_i为空集,则在第k阶段结束时B_i为空集（这样的k一定存在， 因为最强优先度的非永久停留小球的移动会导致所有其他非永久小球被清除，优先方法发挥作用就在于此）。设$\Phi_e^{A_0}(x)[k] = \Phi_e^{A_1}(x)[k] = y$,下面证明对任意$t \geq k$有$\Phi_e^{A_0}(x)[t] = y$或$\Phi_e^{A_1}(x)[t] = y$，即$\Phi_e^{A_0}$是递归的。

设$j \geq k$，且结论对$t \in [k,j]$都成立。下面证明结论对$t = j+1$成立。不妨设存在小球(p,i)在第$j+1$阶段被移到A_1中。

则存在$k < u \leqslant j+1$使得如下两种情形之一发生：

(A) 存在$m > e$使得在第u阶段(p,i)被从B_m移到B_e。则存在$u < v \leqslant j$使得且(p,i)在第$v+1$阶段被移动。从而$\Phi_e^{A_0}(x)[v] = \Phi_e^{A_1}(x)[v] = y$。而对任意$w \in (v+1, j+1]$， 若$(q,i')$在第$w$阶段被移动且$q \neq p$，则$(q,i')$优先度弱于$(p,i)$，所以$q > v$，从而结论对$t = j+1$成立。

6. 经典递归论美在它的基本概念很简单，它的宇宙仅是自然数这一人类心智容易把握的概念，它就像一副由简单线条构成的文艺复兴时期的画作一样，均衡而和谐。—Soare

(B) 存在$m > e$使得在第u阶段(p, i)被从B_m移到B_n，其中$n < e$。

则存在优先度强于$(p,\, i)$的小球$(q,\, i')$第u阶段在B_e中， 且不存在$w \in (u,\, j+1)$使得$(q,\, i')$在第w阶段被清除， 否则(p, i)将一并被清除。设(q, i')在第$v \geq k+1$阶段被放入B_e。从而$\Phi_e^{A_0}(x)[v] = \Phi_e^{A_1}(x)[v] = y$。而对任意$w \in (v+1,\, j+1]$， 若$(q', i'')$在第$w$阶段被移动且$q' \neq q$， 则$(q', i'')$优先度弱于$(q, i')$，所以$q' > v$，从而结论对$t = j+1$成立。证毕

参考书

- Rogers：Theory of Recursive Functions and Effective Computability 1967
- Lerman：Degrees of Unsolvability 1983
- Soare：Recursively Enumerable Sets and Degrees 1987
- Odifreddi：Classical Recursion Theory 1989 和续作（第二卷） 1999
- Sacks：Higher Recursion Theory 1990
- 杨东屏-李昂生：可计算性理论 1999
- Nies：Computability and Randomness 2009
- Downey-Hirschfeldt：Algorithmic Randomness and Complexity 2010
- Shore：The Turing Degrees: an Introduction 2011
- Chong-喻良：Recursion Theory 2015
- 郝兆宽-杨睿之-杨跃：递归论 2018