一阶算术的片段和模型

王玮

2024 年 8 月 3 日

这是我为 2024 年 8 月复旦大学数理逻辑暑期学校《一阶算术的片段和模型》部分准备的讲义, 主要参考了以下文献: Kaye [5], Kossak and Schmerl [6], Hájek and Pudlák [4], 黄天乐 [12].

目录

第一章　语言、模型和公理

一阶算术的模型是一种类似 $(\mathbb{N};0,1,+,\times,<)$ 的数学结构. 通常我们期望这些数学结构满足一阶皮亚诺算术公理 (简称 PA) 或其片段.

1.1　语言

设 $\mathcal{L}$ 是一阶语言, $\mathcal{M}=(M,I)$ 是 $\mathcal{L}$-模型. 通常将 $\mathcal{L}$ 中常元符号 c、关系符号 R、函数符号 F 在 $\mathcal{M}$ 中的解释记为 $c^{\mathcal{M}}$, $R^{\mathcal{M}}$ 和 $F^{\mathcal{M}}$. 这时可将 $\mathcal{M}$ 记为类似以下的形式

$$(M;c_0^{\mathcal{M}},c_1^{\mathcal{M}},\ldots,R_0^{\mathcal{M}},R_1^{\mathcal{M}},\ldots,F_0^{\mathcal{M}},F_1^{\mathcal{M}},\ldots).$$

有时还将论域 M 等同于模型 $\mathcal{M}$, 并将 $c^{\mathcal{M}}$, $R^{\mathcal{M}}$ 和 $F^{\mathcal{M}}$ 分别记为 c^M, R^M 和 F^M.

当讨论以上 $\mathcal{L}$-模型 M 时, 若 $A\subseteq M$, 可将 A 中的元素作为新常元符号, 如此所得的语言记为 $\mathcal{L}(A)$.

首先令 $\mathcal{L}_A$ 记刚好有以下非逻辑符号的一阶语言:

- 两个常元符号 $\overline{0},\overline{1}$;
- 两个二元函数符号 $\overline{+},\overline{\times}$;
- 一个二元关系符号 $\overline{<}$.

除了通常一阶逻辑的公式构成规则, 我们引入两条新的规则:

- 若 φ 是公式, $(\exists x<y\varphi)$ 和 $(\forall x<y\varphi)$ 也是公式.

可将 $\exists x<y$ 和 $\forall x<y$ 看作新量词, 称为 **有界量词** (bounded quantifiers).

通常人们将一个一阶语言等同于其公式的集合, 故 $\varphi\in\mathcal{L}_A$ 表示 φ 是 $\mathcal{L}_A$-公式. 因此一个 $\mathcal{L}_A$-模型是一个 6-元组 $(M;0^M,1^M,+^M,\times^M,<^M)$, 其

中 0^M,1^M,$+^M$,$\times^M$,$<^M$ 分别是 $\overline{0}$,$\overline{1}$,$\overline{+}$,$\overline{\times}$,$\overline{<}$ 的解释. 通常简单地将以上模型记为 M, 并且省略上标 ^{M}. 有时候也记 $\overline{0},\overline{1},\overline{+},\overline{\times},\overline{<}$ 分别为 $0,1,+,\times,<$. 在具体的使用中, 读者应该不难分辨 $0,1,+,\times,<$ 是 $\mathcal{L}_A$ 中的符号还是某个 (哪个) 模型中的解释.

以下 "项"、"公式" 通常指 $\mathcal{L}_A$-项、$\mathcal{L}_A$-公式, "模型" 通常指 $\mathcal{L}_A$-模型, "**一阶理论**" 通常指 $\mathcal{L}_A$-(闭) 公式的集合.

项在模型中的解释与通常一致, 公式的解释也与通常一致, 只有两类例外: $(\exists x < y\varphi)$ 和 $(\forall x < y\varphi)$, 它们的语义分别与 $(\exists x(x < y \wedge \varphi))$ 和 $(\forall x(x < y \to \varphi))$ 相同.

另外, 若 $\vec{x} = (x_0, \ldots, x_k)$, 用 $\exists\vec{x} < y\varphi$ 和 $\forall\vec{x} < y\varphi$ 分别记以下公式

$$\exists\vec{x}\left(\bigwedge_{i=0}^{k} x_i < y \wedge \varphi\right), \quad \forall\vec{x}\left(\bigwedge_{i=0}^{k} x_i < y \to \varphi\right).$$

当一个公式记为 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ 时, 其自由变元不超出 $x_0, \ldots, x_{n-1}$, 这时又可记之为 $\varphi(\vec{x})$; 有时需要将一个公式的自由变元分组, 这时可记之为 $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ 等. 若有公式 $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ 和模型 M, 当我们记 $M \models \varphi(\vec{a},\vec{b})$ 时, 总是预设 $|\vec{x}| = |\vec{a}|$ (即它们的长度相等), $|\vec{y}| = |\vec{b}|$. 在以上情况下, 用 $\varphi(M,\vec{b})$ 记以下可定义集合

$$\{\vec{a} \in M^{|\vec{x}|} : M \models \varphi(\vec{a},\vec{b})\}.$$

在一阶算术的研究中, 常常用 **算术分层** (arithmetic hierarchy) 区分公式的复杂性.

没有量词的公式称为 **开公式**, 所有开公式构成的集合记为 Open.

Σ_0-公式递归定义如下:

(1) 开公式是 Σ_0-公式;

(2) 若 φ 是 Σ_0-公式, 则 $\exists\vec{x} < y\varphi$ 和 $\forall\vec{x} < y\varphi$ 都是 Σ_0-公式.

Π_0-公式就是 Σ_0-公式.

当 $n > 0$ 时, 递归定义 Σ_n-公式如下

(1) Σ_{n-1}- 和 Π_{n-1}-公式都是 Σ_n-公式;

(2) 若 φ 是 Σ_n-公式, 则 $\exists x\varphi$ 也是.

同时递归定义 Π_n-公式如下

(1) Σ_{n-1}- 和 Π_{n-1}-公式都是 Π_n-公式;

(2) 若 φ 是 Π_n-公式, 则 $\forall x\varphi$ 也是.

若 φ 逻辑等价于 Σ_n- 或 Π_n-公式 ψ, 即

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi,$$

我们也称 φ 为 Σ_n- 或 Π_n-公式.

运用一阶逻辑的知识可知, 每一个 $\mathcal{L}_A$-公式都在某个 Σ_n (Π_n) 中, 即

$$\mathcal{L}_A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n;$$

且

$$\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}.$$

公式的 **算术层次**或 **算术分层** (arithmetic hierarchy) 是指 Σ_n, Π_n 构成的分层.

设 Γ 是一阶理论. 对公式 $\varphi(\vec{x})$, 若存在 Σ_n- (Π_n-) 公式 ψ, 使得

$$\Gamma \vdash \forall \vec{x}(\varphi \leftrightarrow \psi),$$

则我们称 φ 是 $\Sigma_n(\Gamma)$- ($\Pi_n(\Gamma)$-) 公式.

我们用 Σ_n (Π_n) 记 Σ_n- (Π_n-) 公式的集合, $\Sigma_n(\Gamma)$ ($\Pi_n(\Gamma)$) 记 $\Sigma_n(\Gamma)$- ($\Pi_n(\Gamma)$-) 公式的集合, $\Delta_n(\Gamma) = \Sigma_n(\Gamma) \cap \Pi_n(\Gamma)$.

设 M 是一个模型, $n \in \mathbb{N}$. M 上一个可以用 Σ_n- (Π-) 公式 (和 M 中的元素作为参数) 定义的集合称为 **Σ_n- (Π_n-) 集合**或 **$\Sigma_n(M)$- ($\Pi_n(M)$-) 集合** (当需要强调所在的模型时); 一个既是 $\Sigma_n(M)$-集合又是 $\Pi_n(M)$-集合的可定义集合称为 **$\Delta_n(M)$-集合**或 **Δ_n-集合**. 类似地, 可以引入 $\Sigma_n(M)$- ($\Pi_n(M)$-, Δ_n-) 函数的概念.

为了谈论可定义函数, 我们需要以下记号: 若 $\varphi \in \mathcal{L}_A$, 用 $\exists! x\varphi$ 记以下公式

$$\exists x\big(\varphi \wedge \forall y(\varphi(x/y) \rightarrow y = x)\big),$$

其中 $\varphi(x/y)$ 是用 y 代入 φ 中所有 x 的自由出现所得的公式. 可将 $\exists! x$ 看作又一个新量词.

以后将把 $\varphi(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$ 简写为 $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$, 这时总是预设 t_i 可自由代入 φ 中的 x_i.

1.2 公理系统

一阶皮亚诺算术公理系统可以分为两部分. 第一部分 (记为 PA^-) 由以下公式的全称概括组成:

(1) $0+x=x$;

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

(3) $x+y=y+z$;

(4) $0\times x=0$;

(5) $1\times x=x$;

(6) $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$;

(7) $x\times y=y\times x$;

(8) $x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)$;

(9) $x<y\vee x=y\rightarrow\neg(y<x)$;

(10) $x=y\vee x<y\vee x>y$;

(11) $x<y\wedge y<z\rightarrow x<z$;

(12) $\neg(x<0)$;

(13) $x<y\rightarrow x+1=y\vee x+1<y$;

(14) $x<y\rightarrow\exists z(x+z=y)$;

(15) $x<y\rightarrow x+z<y+z$;

(16) $x<y\rightarrow x\times z=y\times z\vee x\times z<y\times z$.

注意 PA^- 只由有穷多条公理构成. 以后我们将称 PA^- 的模型为 **一阶算术的模型**或简称模型. 显然 $\mathbb{N}$ 是 PA^- 的模型, 称为 **算术的标准模型**或简称标准模型. 我们将任何与 $\mathbb{N}$ 同构的模型等同于 $\mathbb{N}$, 并称不同构于 $\mathbb{N}$ 的一阶算术模型为 **算术的非标准模型**或简称非标准模型. 我们将沿用很多初等数学的习惯, 比如:

- 用 xy 记 $x \times y$,
- 用 $x + yz$ 记 $x + (y \times z)$,
- 用 $x \leq y$, $x > y$, $x \geq y$, $x \not< y$ 分别记 $x < y \vee x = y$, $y < x$, $x = y \vee y < x$, $\neg(x < y)$,
- 若 $M \models \mathrm{PA}^-$, a 和 b 是 M 的元素, 记

  $$[a, b]^M = \{c \in M : a \leq c \leq b\},\ (a, b)^M = \{c \in M : a < c < b\},\ \ldots$$

  有时还会省略上标 ^{M}, 比如将 $[a, b]^M$ 记为 $[a, b]$;
- ...

我们还不时采用公理集合论的习惯, 将 $[0, a)^M$ 记为 a.

设 $M \models \mathrm{PA}^-$. 定义 M 上的减法如下

$$a \dot{-} b = \begin{cases} 0 & a < b \\ c & a = b + c. \end{cases}$$

当 $a \geq b$ 时, 也将 $a \dot{-} b$ 写作 $a - b$.

命题 1.2.1. *存在 $\mathcal{L}_A$-公式 $\varphi(x, y, z)$, 使得对任意 $M \models \mathrm{PA}^-$ 和 $a, b, c \in M$,*

$$a \dot{-} b = c \quad \text{当且仅当} \quad M \models \varphi(a, b, c).$$

证明. 习题. □

对每个大于 0 的自然数 n, 我们递归地定义

$$\overline{n + 1} = \overline{n} \mathbin{\overline{+}} \overline{1},$$

并称 $\overline{n}$ 为 (n 对应的) **数项** (numeral).

命题 1.2.2. *任给 PA^- 的模型 M, 定义*

$$f : \mathbb{N} \to M, \quad f(n) = \overline{n}^M,$$

其中 $\overline{n}^M$ 是 $\overline{n}^M$ 在 M 中的取值. 则 f 是一个嵌入. 因此 $\mathbb{N}$ 可视作任意 PA^- 模型的子模型.

证明. 习题. $\square$

除了 PA^-, 一阶皮亚诺算术公理系统还包含无穷多条公理. 对任意 $\mathcal{L}_A$-公式 $\varphi(x,\vec{y})$, $I\varphi$ 是以下闭公式

$$\forall\vec{y}\big(\varphi(0,\vec{y})\wedge\forall x(\varphi(x,\vec{y})\to\varphi(x+1,\vec{y}))\to\forall x\varphi(x,\vec{y})\big).$$

我们看看 $I\varphi$ "说什么". 设 M 是一个模型, M 的一个子集 X 称为一个 **归纳集** (inductive set), 当且仅当

(1) $0\in X$;

(2) 任意 $a\in M$, 若 $a\in X$ 则 $a+1\in X$.

若 $M\models I\varphi$ 且 $\varphi(M,\vec{b})$ 是归纳集, 则 $\varphi(M,\vec{b})=M$. 因此 $I\varphi$ "说": φ 定义的集合适用数学归纳法.

若 Γ 是一个公式集合, 则令

$$I\Gamma=\mathrm{PA}^-\cup\{I\varphi:\varphi\in\Gamma\}.$$

当谈论一阶理论时, 人们常用 $+$ 代替 $\cup$, 比如将以上一阶理论写作

$$\mathrm{PA}^-+\{I\varphi:\varphi\in\Gamma\}.$$

一阶皮亚诺算术公理系统 (PA) 是以下一阶理论

$$\mathrm{PA}^-+\{I\varphi:\varphi\in\mathcal{L}_A\}=\mathrm{PA}^-+\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I\Sigma_n.$$

注意 PA^- 仅由有穷多条公理, 但 PA 有无穷多条公理. 后面我们将证明 PA 不可有穷公理化, 即不存在有穷一阶理论 Γ, 使得 $\mathrm{PA}\vdash\Gamma$ 且 $\Gamma\vdash\mathrm{PA}$.

定理 1.2.3 (Cantor)**.** *令 $\varphi(x,y,z)$ 为以下原子公式*

$$2z=(x+y)(x+y+1)+2y.$$

则 $I\Sigma_0$ 证明

(1) φ 定义一个二元函数, 用 $z=\langle x,y\rangle$ 记 $\varphi(x,y,z)$;

(2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是双射;

(3) $\forall x, y, z(z = \langle x, y\rangle \to x \leq z \wedge y \leq z)$.

再设 $\psi_0(z, x), \psi_1(z, y)$ 分别为以下 Σ_0-公式

$$\exists y \leq z\varphi(x, y, z), \quad \exists x \leq z\varphi(x, y, z),$$

则 $I\Sigma_0$ 证明: ψ_0, ψ_1 分别定义了两个函数, 记为 π_0, π_1, 且 $z = \langle \pi_0(z), \pi_1(z)\rangle$, 即

$$I\Sigma_0 \vdash \forall x, y, z(\psi_0(z, x) \wedge \psi_1(z, y) \leftrightarrow \varphi(x, y, z)).$$

证明. 习题. □

我们可以推广 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 当 $2 < n \in \mathbb{N}$ 时, 记 $z = \langle x_0, \langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle\rangle$ 为

$$z = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle.$$

由以上定理可得到以下简单但带来很多便利的推论.

推论 1.2.4. 设 $0 < n \in \mathbb{N}$.

(1) 任意 $\varphi_0(\vec{x}) \in \Sigma_n$ 和 $\varphi_1(\vec{x}) \in \Pi_n$, 有 $\psi_0, \psi_1 \in \Sigma_0$ 使得

$$I\Sigma_0 \vdash \varphi_0(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y_0 \cdots Q_{n-1}y_{n-1}\psi_0(\vec{x}, \vec{y}),$$
$$I\Sigma_0 \vdash \varphi_1(\vec{x}) \leftrightarrow \forall y_0 \cdots Q'_{n-1}y_{n-1}\psi_1(\vec{x}, \vec{y}),$$

其中, 当 n 是奇数时, $Q_{n-1} = \exists$, $Q'_{n-1} = \forall$; 当 n 是偶数时, $Q_{n-1} = \forall$, $Q'_{n-1} = \exists$.

(2) 任意 $\varphi(x, y, \vec{z}) \in \Sigma_n$ *(*Π_n*)*, 有 $\psi(w, \vec{z}) \in \Sigma_n$ *(*Π_n*)* 使得

$$I\Sigma_0 \vdash \forall \vec{z}, x, y, w(w = \langle x, y\rangle \wedge \varphi \leftrightarrow \psi).$$

设 $M \models I\Sigma_0$. 根据推论 1.2.4, 当我们谈论 $\Sigma_n(M)$-公式 φ 时, 可以设 φ 只有不多于 n 个无界量词, 且每个无界量词仅约束一个变元; 同时, 我们可以假设 M 上所有可定义集合都形如 $\varphi(M, a)$ $(a \in M)$, 而不需要讨论 $\varphi(M, a, b)$ 等情况.

证明. 习题. □

PA 有一种非常有用的变形. 对任意 $\varphi(x,\vec{y}) \in \mathcal{L}_A$, 令 $L\varphi$ 记以下闭公式

$$\forall\vec{y}\Big(\exists x\varphi(x,\vec{y}) \to \exists x\big(\varphi(x,\vec{y}) \wedge \forall z(z < x \to \neg\varphi(z,\vec{y}))\big)\Big).$$

若 $M \models L\varphi$, $\varphi(M,\vec{b})$ 是非空集合, 则 $\varphi(M,\vec{b})$ 有最小元素. 因此 $L\varphi$ 即: 用公式 φ 定义的集合适用最小数原理. 当 $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_A$ 时,

$$L\Gamma = \mathrm{PA}^- \ + \{L\varphi : \varphi \in \Gamma\}.$$

我们还需要 PA 的另一种分层. 对任意 $\varphi(x,y,\vec{z}) \in \mathcal{L}_A$, 令 $B\varphi$ 记以下闭公式

$$\forall\vec{z}\forall u\Big(\forall x < u\exists y\varphi(x,y,\vec{z}) \to \exists v\forall x < u\exists y < v\varphi(x,y,\vec{z})\Big).$$

设 $M \models B\varphi$, φ 如上, $\vec{c} \in M^{|\vec{z}|}$. $\varphi(M,\vec{c})$ 可 "大致" 看作一个可定义函数, 暂记为 F_φ. 若 $[0,a] \subseteq \operatorname{dom} F_\varphi$, 则由 $M \models B\varphi$ 可知 $F_\varphi([0,a]) = \{F_\varphi(b) : b \in [0,a]\}$ (在 M 中) 有 (上) 界. 当 $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_A$ 时,

$$B\Gamma = I\Sigma_0 \ + \ \{B\varphi : \varphi \in \Gamma\}.$$

请注意 $B\Gamma$ 与 $I\Gamma$ 定义方式的微妙区别.

命题 1.2.5. 设 $0 < n \in \mathbb{N}$.

(1) $B\Sigma_{n+1}$ *等价于* $B\Pi_n$.

(2) 若 φ *是* Σ_n*-公式, 则* $\exists x < y\varphi$, $\forall x < y\varphi$ *也是* $\Sigma_n(B\Sigma_n)$*-公式.*

(3) 若 φ *是* Π_n*-公式, 则* $\exists x < y\varphi$, $\forall x < y\varphi$ *也是* $\Pi_n(B\Sigma_n)$*-公式.*

证明. 习题. □

定理 1.2.6 (Parsons)**.** 设 $n \in \mathbb{N}$. $I\Sigma_{n+1} \vdash B\Sigma_{n+1}$.

证明. 设 $M \models I\Sigma_{n+1}$. 对 $k < n+1$ 用归纳法证明 $M \models B\Sigma_{k+1}$.

以下设 $k = 0$ (基础步) 或 $k > 0$ 且 $M \models B\Sigma_k$ (归纳假设). 设 $\varphi(x,y,z) \in \Pi_k$, $a \in M$, $p \in M$ 且

$$M \models \forall x < a\exists y\varphi(x,y,p). \tag{1.2.1}$$

令
$$X = \{c \le a : M \models \exists w \forall x < c \exists y < w \varphi(x, y, p)\}.$$
若 $k = 0$, 则由定义知 $X \in \Sigma_{k+1}(M)$; 若 $k > 0$, 则由归纳假设 $M \models B\Sigma_k$ 及命题 1.2.5 知, $X \in \Sigma_{k+1}(M)$. 易见 $0 \in X$. 设 $a > c \in X$, 则有 b 使得
$$M \models \forall x < c \exists y < b \varphi(x, y, p).$$
由 $c < a$ 及 (1.2.1) 知, 有 $d \in M$ 使得
$$M \models \varphi(c, d, p).$$
令 $e = \max\{b, d\}$, 则
$$M \models \forall x < c + 1 \exists y < e \varphi(x, y, p).$$
故 $c + 1 \in X$. 由 $M \models I\Sigma_{n+1}$ 知, $X = [0, a]$. 因此
$$M \models \exists w \forall x < a \exists y < w \varphi(x, y, p).$$
这就证明 $M \models B\Pi_k$, 结合命题 1.2.5 知 $M \models B\Sigma_{k+1}$.

由归纳法知 $M \models B\Sigma_{n+1}$. □

定理 1.2.7 (Paris and Kirby, [9])**.** 设 $n \in \mathbb{N}$, 则以下一阶理论相互等价
$$I\Sigma_n,\ I\Pi_n,\ L\Sigma_n,\ L\Pi_n.$$

证明. ($I\Sigma_n \vdash I\Pi_n$) 设 $M \models I\Sigma_n$, X 是 M 的 Π_n-归纳子集. 假设 $X \ne M$, 则有 $a \in M - X$. 令
$$Y = \{b \in M : a \dot{-} b \notin X\}.$$
则 Y 是 M 的 Σ_n-子集. 由 $a \notin X$ 知, $0 \in Y$. 任取 $b \in Y$, 则 $a \dot{-} b \notin X$; 由 $0 \in X$ 知, $a \dot{-} b > 0$, 故 $a \dot{-} (b+1) + 1 = a \dot{-} b$; 由 X 的性质知, $a \dot{-} (b+1) \notin X$, 故 $b + 1 \in Y$. 由 $M \models I\Sigma_n$ 知, $Y = M$, 但由 $0 \in X$ 知 $a \notin Y$.

($I\Pi_n \vdash L\Sigma_n$) 设 $M \models I\Sigma_n$, X 是 M 的非空 Σ_n-子集. 假设 X 没有最小元素. 令
$$Y = \{a \in M : \text{ 任意} b \in X, b > a\}.$$
则 Y 是 M 的 Π_n-子集. 由 $0 = \min X$ 知 $0 \in Y$. 若 $a \in Y$ 但 $a + 1 \notin Y$, 则 $a + 1 = \min X$, 与假设矛盾. 由 $M \models I\Pi_n$ 知, $Y = M$, 这与 $X \ne \emptyset$ 矛盾.

($L\Sigma_n \vdash I\Sigma_n$) 设 $M \models L\Sigma_n$, X 是 M 的 Σ_n-归纳子集. 假设 $X \neq M$, 则有 $a \in M - X$. 令

$$Y = \{d \in M: \text{ 存在} b \in X, b \leq a, b + d = a\}.$$

则 $Y \in \Sigma_n(M)$. 由 $0 \in X$ 知, $a \in Y$, 故 $Y \neq \emptyset$. 由 $M \models L\Sigma_n$ 知, Y 有最小元素, 记之为 c. 由 $a \notin X$ 知, 存在 $b \in X$, $b < a = b + c = a$, 故 $c > 0$. 由 X 的性质知 $b + 1 \in X$, 故 $c \dot{-} 1 \in Y$, 与 $c = \min Y$ 矛盾.

($I\Sigma_n \vdash L\Pi_n$) 设 $M \models I\Sigma_n$, X 是 M 的非空 Π_n-子集, 故有 Π_n-公式 $\varphi(x, y)$ 及来自 M 的 b 使得 $X = \varphi(M, b)$ 假设 X 没有最小元素. 令

$$Y = \{a \in M : M \models \forall x < a \neg\varphi(x, b)\}.$$

由 $L\Sigma_n \vdash I\Sigma_n \vdash B\Sigma_n$ 及命题 1.2.5 知, $Y \in \Sigma_n(M)$. 由定义知, $0 \in Y$. 设 $a \in Y$, 则 $[0, a) \cap X = \emptyset$; 结合 X 没有最小元素知, $a \notin X$; 故 $a + 1 \in Y$. 由 $M \models I\Sigma_n$ 知, $Y = M$, 从而 $X = \emptyset$, 与前提矛盾.

($L\Pi_n \vdash I\Sigma_n$) 设 $M \models L\Pi_n$, X 是 M 的 Σ_n-归纳子集. 假设 $X \neq M$. 令 $Y = M - X$, 则 $\emptyset \neq Y \in \Pi_n(M)$. 由 $M \models L\Pi_n$ 知, Y 有最小元素, 设为 b. 由 $0 \in X$ 知, $b > 0$; 由 $b = \min Y$ 知, $b \dot{-} 1 \in X$; 但由 X 的性质知 $b = b \dot{-} 1 + 1 \in X$, 与 $b \in Y$ 矛盾. □

定理 1.2.8 (Paris and Kirby, [9])**.** 设 $n \in \mathbb{N}$. $B\Sigma_{n+1} \vdash I\Sigma_n$.

证明. 设 $M \models B\Sigma_{n+1}$, 以下对 $k \leq n$ 用归纳法证明 $M \models I\Sigma_k$.

当 $k = 0$ 时, 已知 $M \models I\Sigma_0$.

设 $0 < k \leq n$, $M \models I\Sigma_{k-1}$, M 的 $\Sigma_k(M)$-子集 X 是一个归纳集. 设 $\psi(x, \vec{y}, \vec{z}) \in \Pi_{k-1}$, $\varphi(x, \vec{y}) = \exists \vec{z} \psi$ 且 $X = \varphi(M, \vec{b})$. 假设 $X \neq M$, 则存在 $a \in M - X$. 则

$$M \models \forall x < a + 1 \exists \vec{z} \big(\psi(x, \vec{b}, \vec{z}) \vee \neg\varphi(x, \vec{b})\big).$$

注意 $\psi \vee \neg\varphi \in \Sigma_{k+1} \subseteq \Sigma_{n+1}$. 由 $M \models B\Sigma_{n+1}$ 知, 存在 $c \in M$, 使得

$$M \models \forall x < a + 1 \exists \vec{z} < c \big(\psi(x, \vec{b}, \vec{z}) \vee \neg\varphi(x, \vec{b})\big).$$

则

$$X \cap [0, a] = \{i < a + 1 : M \models \exists \vec{z} < c\ \psi(i, \vec{b}, \vec{z})\}.$$

故 $X \cap [0, a] \in \Pi_{k-1}(M)$, $M - (X \cap [0, a])$ 是非空 $\Sigma_{k-1}(M)$-集合. 由 $M \models I\Sigma_{k-1}$ 及定理 1.2.7 知, $d = \min M - (X \cap [0, a])$ 存在. 由 $0 \in X$ 及 $a \notin X$

知, $0 < d \leq a$, 从而 $d > d \dot{-} 1 \in X$. 但由 X 是归纳集知 $d = (d \dot{-} 1) + 1 \in X$, 矛盾. □

推论 1.2.9. PA 等价于 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\Sigma_n$.

从哥德尔不完全性定理的证明中, 我们知道 PA 可以借助可定义函数"谈论"有穷集合、有穷序列. 最早的用于此目的的函数是哥德尔构造的 β-函数, 其构造及其性质 (以下定理) 的证明可以在很多文献中找到, 比如: [14, §9.1] 和 [5, §5.2].

定理 1.2.10 (哥德尔的 β-函数)**.** *存在 $\varphi_\beta(x, y, z) \in \Sigma_0$, 使得*

(1) $I\Sigma_1$ 可证明 φ_β 定义一个二元函数, 即

$$I\Sigma_1 \vdash \forall x, y \exists ! z \varphi_\beta(x, y, z).$$

下面将用 $\beta(x, y) = z$ 记 $\varphi_\beta(x, y, z)$.

(2) $I\Sigma_1$ 可证明

$$\forall x \exists y \beta(y, 0) = x, \quad \forall x, y, z \exists x' \Big((\forall i < y(\beta(x, i) = \beta(x', i))) \wedge \beta(x', y) = z \Big).$$

(3) 设 $0 < n \in \mathbb{N}$, $I\Sigma_1$ 可证明

$$\forall x_0, \ldots, x_{n-1} \exists y \bigwedge_{i<n} \beta(y, i) = x_i.$$

定理 1.2.11 (递归定理)**.** *设 $0 < n \in \mathbb{N}$. 任意 Σ_n-公式 $\varphi(\vec{w}, z)$ 和 $\psi(\vec{w}, x, y, z)$, 都对应 Σ_n-公式 $\theta(\vec{w}, x, z)$ 使得 $I\Sigma_n$ 可证明: 若 φ, ψ 分别定义了两个函数 (记为 G, H), 则 θ 定义一个函数 F 使得*

$$\forall \vec{w} \big(F(\vec{w}, 0) = G(\vec{w}) \wedge \forall x F(\vec{w}, x + 1) = H(\vec{w}, x, F(\vec{w}, x)) \big);$$

换言之, $I\Sigma_n$ 证明以下公式的全称概括

$$\begin{aligned} &\exists ! z \varphi(\vec{w}, z) \wedge \forall x, y \exists ! z \psi(\vec{w}, x, y, z) \to \\ &\qquad \Big(\forall x \exists ! z \theta(\vec{w}, x, z) \wedge \forall z (\theta(\vec{w}, 0, z) \to \varphi(\vec{w}, z)) \wedge \\ &\qquad\quad \forall x, z \big(\theta(\vec{w}, x + 1, z) \to \exists z' (\theta(\vec{w}, x, z') \wedge \psi(\vec{w}, x, z', z)) \big) \Big). \end{aligned}$$

证明. 用 β-函数. □

1.3 模型

现在我们看看 PA 的模型大致是什么模样.

若 $(P;<_P)$ 和 $(Q;<_Q)$ 是两个线序, 定义

$$P+Q=\{(0,p):p\in P\}\cup\{(1,q):q\in Q\},$$

及 $P+Q$ 上的二元关系

$$\begin{aligned}(i,a)<_{P+Q}(j,b)\quad \text{当且仅当}\quad & i<j,\\ & \text{或} i=j=0 \text{ 且} a<_P b,\quad \text{或} i=j=1 \text{ 且} a<_Q b.\end{aligned}$$

容易验证 $(P+Q;<_{P+Q})$ 也是线序; 同构于 $(P+Q;<_{P+Q})$ 的线序都可记为 $P+Q$.

再定义笛卡尔积集 $P\times Q$ 上的二元关系

$$(a,b)<_{P\times Q}(c,d)\quad \text{当且仅当}\quad b<_Q d,\ \text{或} b=d \text{ 且} a<_P c.$$

容易验证 $(P\times Q;<_{P\times Q})$ 也是线序; 同构于 $(P\times Q;<_{P\times Q})$ 的线序都可记为 $P\times Q$.

我们也用 $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 记它们上的线序结构. 一个线序 $(L;<_L)$ 是 **稠密的**, 当且仅当对任意 $a<_L b$ 都有 c 使得 $a<_L c<_L b$. $(L;<_L)$ 是 **无端点的**, 当且仅当不存在 $<_L$-最小、最大元素. 以上 $\mathbb{Z}$ 是无端点的线序, $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 都是无端点的稠密线序, $\mathbb{Q}+\mathbb{R}$ 也是无端点的稠密线序.

命题 1.3.1. *若 $M\models \mathrm{PA}$, 则存在一个无端点的稠密线序 L 使得 $(M;<)\cong \mathbb{N}+\mathbb{Z}\times L$.*

证明. "定义" M 上的二元关系如下

$$a\sim_{\mathbb{Z}} b\quad \text{当且仅当}\quad a\leq b \text{ 且} b\dot{-}a\in\mathbb{N},\ \text{或} a\geq b \text{ 且} a\dot{-}b\in\mathbb{N}.$$

容易验证 $\sim_{\mathbb{Z}}$ 是等价关系.

用 $[a]_{\mathbb{Z}}$ 记 a 在此等价关系下代表的等价类, 则 $<$ 在 $[a]_{\mathbb{Z}}$ 上的限制同构于 $\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{Z}$.

"定义" $M/\sim_{\mathbb{Z}}$ 上的二元关系如下

$$[a]_{\mathbb{Z}}\prec[b]_{\mathbb{Z}}\quad \text{当且仅当}\quad a<b \text{ 且} a\not\sim_{\mathbb{Z}} b.$$

容易验证 $\prec$ 是 $M/\sim_{\mathbb{Z}}$ 上的线序, 且 $\prec$ 在 $M/\sim_{\mathbb{Z}}-\{[0]_{\mathbb{Z}}\}$ 上的限制是一个无端点的稠密线序, 记为 L.

则 $(M;<)\cong\mathbb{N}+\mathbb{Z}\times L$. □

注意以上证明中的两个 “定义” 发生在元语言中.

定义 1.3.2. 设 M 是一个 $\mathcal{L}_A$-模型. M 的一个子集 I 是 M 的一个 **前截** (cut), 当且仅当 I 满足以下条件

(1) I 是一个归纳集;

(2) 若 $b \in I$ 且 $a < b$ 则 $a \in I$.

不等于整个论域的前截称为 **真前截** (proper cut).

可加前截是对加法封闭的前截, **可乘前截**是对乘法封闭的前截.

有时称 $M - I$ 为 M 的 **末截** (cocut).

定理 1.3.3. 设 $1 < n \in \mathbb{N}$, $M \models I\Sigma_1$. 则以下等价

(1) $M \models I\Sigma_n$;

(2) M 没有 Σ_n- 或 Π_n-真前截.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2). 若 I 是 M 的 Σ_n-真前截, 则 $M - I \in \Pi_n(M)$ 且没有最小元素, 故 $M \not\models L\Pi_n$.

(2) $\Rightarrow$ (1). 对 $n > 0$ 用归纳法证明: 若 $M \not\models I\Sigma_n$, 则 M 有 Σ_n-真前截.

当 $n = 1$ 时, 定理的条件保证 $M \models I\Sigma_1$, 故不需要证明什么.

设 $n > 1$, $M \models I\Sigma_1$ 但 $M \not\models I\Sigma_n$ 且 (2) 对 $n - 1$ 成立.

若 $M \not\models I\Sigma_{n-1}$, 则 $n - 1 > 1$. 这时由归纳假设知 M 有 Σ_{n-1}-真前截, 当然它也是 Σ_n-真前截. 以下假设 $M \models I\Sigma_{n-1}$, 分两种情况讨论.

(a) $M \not\models B\Sigma_n$. 故有 $\varphi(x, y) \in \Pi_{n-1}$ 及 $a \in M$ 使得

$$M \models (\forall x < a \exists y \varphi) \wedge (\neg \exists w \forall x < a \exists y < w \varphi).$$

令

$$I = \{b < a : M \models \exists w \forall x < b \exists y < w \varphi\}.$$

由命题 1.2.5 知, $I \in \Sigma_n(M)$. 不难证明 I 是 M 的真前截.

(b) $M \models B\Sigma_n$. 由 $M \not\models I\Sigma_n$ 知, 存在 $\varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_n$ 和 $\vec{b} \in M^{|\vec{y}|}$, 使得 $0 \in \varphi(M, \vec{b})$, 且任意 $a \in \varphi(M, \vec{b})$ 都有 $a + 1 \in \varphi(M, \vec{b})$, 但 $\varphi(M, \vec{b}) \neq M$. 令

$$I = \{a \in M : [0, a] \subseteq \varphi(M)\}.$$

由 $M \models B\Sigma_n$ 及命题 1.2.5 知 $I \in \Sigma_n(M)$. 由 $\varphi(M)$ 的性质知, I M 的一个真前截.

由数学归纳法知, 若 $n > 1$ 且 $M \not\models I\Sigma_n$, 则 M 有 Σ_n-真前截. 这时, 设 I 是 M 的 Σ_n-真前截且 $I < a$. 则以下定义了一个 Π_n-真前截

$$J = \{a \dot{-} b : I < b \leq a\}.$$

$\square$

定理 1.3.4 (溅出与渗入). *设 $0 < n \in \mathbb{N}$, $M \models I\Sigma_n$, I 是 M 的真前截, X 是 M 的 Σ_n-子集.*

(1) 存在 $a \in I$ 使得 $[a, \infty) \cap I \subseteq X$, 当且仅当存在 $b \in M - I$ 使得 $[0, b] \cap (M - I) \subseteq X$.

(2) $X \cap I$ 在 I 中无上界, 当且仅当 $X \cap (M - I)$ 在 $M - I$ 中无下界.

以上定理的两个结论中, 从左到右称为 **溅出** (overspill), 反之称为 **渗入** (underspill).

证明. (1) 设 $a \in I$ 且 $[a, \infty) \cap I \subseteq X$. 取 $c \in M - I$. 令

$$Y = \{d \in M : d < c, [a, d] \subseteq X\}.$$

由 $M \models I\Sigma_n$ 知, $Y \in \Sigma_n(M)$; 再用一次 $I\Sigma_n$ 知, $b = \max Y$ 存在. 由 a 的性质知, $b \in M - I$; 由 b 的定义知, $[0, b] \cap (M - I) \subseteq X$.

类似可证明渗入的方向.

(2) 设 $X \cap I$ 在 I 中无上界, 即任意 $a \in I$ 都有 b 使得 $a < b \in X \cap I$. 假设 $X \cap (M - I)$ 在 $M - I$ 中有下界 b, 即 $b \in M - I$ 且 b 小于任意 $c \in X \cap (M - I)$. 由 $M \models I\Sigma_n$ 知, $X \cap [0, b]$ 有最大元素, 设为 c. 由 b 的定义知, $c \in I$, 但这与 $X \cap I$ 在 I 中无上界矛盾.

类似可证明渗入的方向. $\square$

尽管我们可以借助哥德尔的 β-函数谈论有穷序列、有穷集合, 但一种可能更便利的方式是通过一阶算术模型中 "自然数" 的二进制展开形式. 首先我们需要在一阶算术中定义指数运算.

定理 1.3.5 (Bennett). *存在 Σ_0-公式 $\exp(x, y)$ 使得*

(1) $I\Sigma_1$ 可证明: $\exp(x, y)$ 定义一个函数;

(2) $I\Sigma_0$ 可证明

$$\exp(0,1)\wedge\forall x,y(\exp(x,y)\to\exp(x+1,2y)).$$

以下用 $2^x=y$ 记 $\exp(x,y)$.

用 $\operatorname{len}(x)=y$ 记以下公式

$$(x=0\to y=0)\wedge(x>0\to 2^y\leq x<2^{y+1}).$$

则 $\operatorname{len}(x)=y$ 是 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$-公式, 且

$$I\Sigma_1\vdash\forall x,y(\operatorname{len}(x)=y\to y\leq x).$$

用 $z<\operatorname{len}(x)$ 记公式

$$\exists y\leq x(\operatorname{len}(x)=y\wedge z<y),$$

显然 $z<\operatorname{len}(x)$ 也是 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$-公式. 我们还可以引入 $z\leq\operatorname{len}(x)$, $\operatorname{len}(x)<\operatorname{len}(y)$ 等记号表示具有适当语义的 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$-公式.

令 $\varphi_{\mathrm{bit}}(x,y,z)$ 为以下 Σ_0-公式

$$\exists w\leq x,u<x,v<x(w=2^y\wedge v<w\wedge x=w(2u+z)+v).$$

则

(1) $I\Sigma_1$ 可证明 $\varphi_{\mathrm{bit}}(x,y,z)$ 定义了一个二元函数;

(2) 任意 $M\models I\Sigma_1$, 若 $a,b,c\in M$ 且 $M\models\varphi_{\mathrm{bit}}(a,b,c)$, 则在 M 中, $b\geq\operatorname{len}(a)$ 或 a 的二进制展开形式的第 b 位为 c.

以下用 $(x)_y=z$ 记上述公式 $\varphi_{\mathrm{bit}}(x,y,z)$.

根据以上定义, 在 $\mathbb{N}$ 中, 对自然数 11 $(=1\cdot2^0+1\cdot2^1+0\cdot2^2+1\cdot2^3)$

$$\operatorname{len}(11)=3,\quad(11)_0=(11)_1=1,\quad(11)_2=0.$$

因此我们认为 11 编码了 01-序列 $\langle110\rangle$. 注意这种编码方式去掉了二进制展开形式的最高位, 否则无法区分 $\langle01\rangle$ 和 $\langle010\rangle$.

定义 1.3.6 (M-有穷性). 设 M 是一个模型.

(1) 一个 M-**有穷 01-序列**是一个函数 $f:[0,a]\to\{0,1\}$, 其中 $a\in M$, 且存在 $b\in M$ 使得对任意 $i\in[0,a]$, $(b)_i=f(i)$. 此时称 b **编码了** f 或 b 是一个 f **的编码**.

(2) M 的一个子集 X 是一个 M-**有穷集合**, 当且仅当存在一个 M-有穷 01-序列 $f:[0,a]\to\{0,1\}$ 使得

$$X=\{b\in[0,a]:f(b)=1\}.$$

此时称 f 的编码为 X **的编码**.

(3) 一个 M-**有穷函数**是一个图像为 M-有穷集合的函数.

(4) 一个定义域为某个 $\ell\in M$ 的 M-有穷函数 f 也称为 M-**有穷序列**, 这时通常记之为 $(f(i):i<\ell)$.

根据以上定义, 有两种不同的方式编码一个 M-有穷 01-序列, 但这两种方式通常不会带来实质的差异.

若 $X\subset M$, 我们用 $X\in M$ 表示 X 是 M 有穷集合; 若 $X\in M$ 且有编码 c, 我们用 $y\in X$ 记 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$-公式

$$y<\operatorname{len}(c)\wedge(c)_y=1.$$

类似地, 我们也用 $f\in M$, $(a_i:i<\ell)\in M$ 表示 f 和 $(a_i:i<\ell)$ 分别是 M-有穷函数和 M-有穷序列, 并且用 $f(x)=y$, $y<f(x)$, $D=\operatorname{dom}f$ 等表示对应的 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$-公式. 我们还可以引入对应的 “约束量词”, 比如用 $\exists x\in X\varphi$ 和 $\forall x\in X\varphi$ 分别记以下 $\mathcal{L}_A(M)$-公式

$$\exists x((c)_x=1\wedge\varphi),\quad\forall x((c)_x=1\to\varphi),$$

其中 c 是 M-有穷集合 X 的编码.

定理 1.3.7 (Harvey Friedman)**.** 设 $0<n\in\mathbb{N}$, $M\models\mathrm{PA}^-$. 则以下等价

(1) $M\models I\Sigma_n$;

(2) M 的任意有界 $\Sigma_n(M)$-子集都是 M-有穷的;

(3) M 的任意有界 $\Pi_n(M)$-子集都是 M-有穷的.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $M \models I\Sigma_n$, $\varphi \in \Sigma_n$, $X = \varphi(M, \vec{b})$ 有上界 a. 令

$$C = \{c \in M : \mathrm{len}(c) = a, M \models \forall y < a(\varphi(y, \vec{b}) \to (c)_y = 1)\}.$$

容易验证 $C \in \Pi_n(M)$; 且 $2^{a+1} \dot{-} 1 \in C$, 故 C 非空. 由 $M \models L\Pi_n$ 知, 存在 $c = \min C$. 不难证明

$$X = \{i < a : (c)_i = 1\},$$

故 X 是 M-有穷集合.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 $M \not\models I\Sigma_n$, 有两种方法构造并非 M-有穷的有界 $\Sigma_n(M)$-集合.

方法一: 由定理 1.3.3 知, M 有真前截 $I \in \Sigma_n(M)$, 且 I 是一个有界 $\Sigma_n(M)$-集合但不是 M-有穷的.

方法二: 设 $X \subset M$ 是 $\Sigma_n(M)$-归纳集. 取 $b \in M - X$. 不难验证 $X \cap [0, b]$ 是一个有界 $\Sigma_n(M)$-子集但不是 M-有穷的.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). 习题. $\square$

在习题 1.4.3 中, 我们肯定 PA^- 有一个很简单的非标准模型 $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$, $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$ 同构于一个可计算的模型. 但下面我们将看到 PA 并不存在可计算的非标准模型.

定义 1.3.8. 一个 $\mathcal{L}_A$-模型 M 是 **可计算的**, 当且仅当, $M = (\mathbb{N}; 0, 1, \oplus, \otimes, \lessdot)$, 其中

(1) $\oplus, \otimes$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个可计算二元函数;

(2) $\lessdot$ 是 $\mathbb{N}$ 上的可计算二元关系.

定义 1.3.9. 两个 $\mathbb{N}$ 的子集 A, B 能够 **可计算地分离** (computably separable), 当且仅当存在可计算函数 $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ 使得

$$e \in A \Rightarrow f(e) = 1 \text{ 且} e \in B \Rightarrow f(e) = 0.$$

否则称 A, B **不能可计算地分离** (computably inseparable).

命题 1.3.10. *存在两个不相交但不能可计算地分离的可计算可枚举集合.*

证明. 设 $\Phi(x, y)$ 是一个通用图灵机. 令

$$A = \{e \in \mathbb{N} : \Phi(e, e) \downarrow = 0\}, \quad B = \{e \in \mathbb{N} : \Phi(e, e) \downarrow = 1\}.$$

则 A, B 是两个不相交的可计算可枚举集合.

假设存在一个可计算函数 $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ 使得: 任意 $e\in\mathbb{N}$,

$$e\in A\Rightarrow f(e)=1 \text{ 且} e\in B\Rightarrow f(e)=0.$$

设 $d\in\mathbb{N}$ 且 $f(n)=\Phi(d,n)$ 对任意自然数 n 成立. 若 $f(d)=0=\Phi(d,d)$, 则 $d\in A$, 从而 $f(d)=1$; 若 $f(d)=1=\Phi(d,d)$, 则 $d\in B$, 从而 $f(d)=0$. 因此不存在这样的 f.

故 A,B 是不能可计算地分离的. □

定理 1.3.11 (Tennenbaum)**.** *若 $M=(\mathbb{N};0,1,\oplus,\otimes,\lessdot)\models I\Sigma_1$ 是非标准模型, 即 M 不同构于 $(\mathbb{N};0,1,+,\times,<)$, 则 $\oplus$ 和 $\otimes$ 都不是可计算二元函数.*

因此不存在可计算的、$I\Sigma_1$ 的非标准模型.

证明. 设 $M=(\mathbb{N};0,1,\oplus,\otimes,\lessdot)$ 是 $I\Sigma_1$ 的一个非标准模型, 注意

$$I=\{\overline{n}^M:n\in\mathbb{N}\}$$

构成 M 的一个真前截.

由命题 1.3.10 知, 存在两个不相交但不能可计算地分离的可计算可枚举集合, 记为 A,B. 设 φ_A,φ_B 为两个 Σ_1-公式且对任意自然数 n,

$$n\in A\Rightarrow I\Sigma_1\vdash\varphi_A(\overline{n}),\quad n\in B\Rightarrow I\Sigma_1\vdash\varphi_B(\overline{n}).$$

对任意 $a\in I$,

$$M\models\exists x<2^{a+1}\Big(a=\mathrm{len}(x)\wedge \\ \forall i<a\Big(\big(\varphi_A(i)\to(x)_i=1\big)\wedge\big(\varphi_B(i)\to(x)_i=0\big)\Big)\Big).$$

以上满足关系右边是一个 $\Pi_1(I\Sigma_1)$-公式. 由溅出知, M 中存在 $b\notin I$ 及 $c<2^{b+1}$ 使得

$$M\models\forall i<b\Big(\big(\varphi_A(i)\to(c)_i=1\big)\wedge\big(\varphi_B(i)\to(c)_i=0\big)\Big).$$

定义 $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ 如下

$$f(n)=\begin{cases}1 & (c)_n=1\\ 0 & (c)_n=0.\end{cases}$$

则

$$n \in A \Rightarrow f(n) = 1, \quad n \in B \Rightarrow f(n) = 0.$$

由 A, B 的性质知, f 不可计算.

假设 $\oplus$ 是可计算的, 我们用以下算法计算 f: 对任意 $n \in \mathbb{N}$,

(1) 穷举所有自然数 q 和所有自然数 $k < 2^n$;

(2) 当 $k = 0$ 时, 取 $r = 0$, 当 $k > 0$ 时 $k - 1$ 次迭代 $\oplus$ 计算得到 $r = \overline{k}^M$, 比如: 当 $k = 3$ 时

$$\overline{k}^M = (1 \oplus 1) \oplus 1;$$

(3) $2^n - 1$-次迭代 $\oplus$ 计算得到 p 满足 $M \models p = 2^n q$, 比如: 当 $n = 2$ 时

$$p = ((q \oplus q) \oplus q) \oplus q;$$

(4) 若 $r \oplus p \neq c$, 则继续穷举;

(5) 若 $r \oplus p = c$, 则

$$M \models c = 2^n q + r,$$

这时判断 p 是否 M 中的偶数, 即穷举 s 使得 $p = s \oplus s$ 或 $p = (s \oplus s) \oplus 1$, 若前者发生则求得 $f(n) = 0$, 若后者成立则求得 $f(n) = 1$.

此算法说明 f 可计算, 与上一段所得 f 的不可计算性矛盾.

同理可由 $\otimes$ 可计算得到矛盾. □

1.4 习题

习题 1.4.1. *用 $\mathcal{L}_A$-公式表达以下命题, 并证明它们都可被 $I\Sigma_0$ 证明*

(1) 任意自然数是偶数或奇数;

(2) 任意自然数 a, b, 若 $b > 1$ 则存在唯一一对 q, r 使得 $a = bq + r$ 且 $r < b$;

(3) 任意两个自然数有最大公因数.

习题 1.4.2. *设 $M \models I\Sigma_1$, X 是 M-有穷集合, 则存在唯一 $c \in M$ 使得存在 M-有穷双射 $f : c \to X$. 通常记此 c 为 $\mathrm{card}^M(X)$ 或 $|X|^M$.*

习题 1.4.3. 令 $\mathbb{Z}[X]$ 记所有以 X 为变元的整系数多项式构成的集合, 其上有自然的 $+, \times$. 定义

$$\mathbb{Z}[X]^+ = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X_i \in \mathbb{Z}[X] : a_n > 0 \right\}, \quad \mathbb{Z}[X]^{\geq 0} = \{0\} \cup \mathbb{Z}[X]^+.$$

再定义 $\mathbb{Z}[X]$ 上的二元关系如下

$$f(X) < g(X) \quad \text{当且仅当} \quad g(X) - f(X) \in \mathbb{Z}[X]^+.$$

用 $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$ 记模型 $(\mathbb{Z}[X]^{\geq 0}; 0, 1, +, \times, <)$. 证明:

(1) $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} \models \mathrm{PA}^-$;

(2) $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} \not\models I\,\mathrm{Open}$ (提示: 考虑公式 $X < y^2$, 这里 $X \in \mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$, y 是变元符号).

习题 1.4.4. 若 $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x, y) \in \Sigma_n$, 则存在 $\psi(x, y) \in \Pi_n$ 使得

$$\forall x \exists! y\ \varphi(x, y) \vdash \forall x, y(\varphi(x, y) \leftrightarrow \psi(x, y)).$$

习题 1.4.5. 设 $t(\vec{x})$ 是一个 ($\mathcal{L}_A$-) 项. 令 $\exists y < t(\vec{x})\varphi$ 和 $\forall y < t(\vec{x})\varphi$ 分别记以下公式

$$\exists y(y < t(\vec{x}) \wedge \varphi), \quad \forall y(y < t(\vec{x}) \to \varphi).$$

证明: 若 $\varphi \in \Sigma_0$ 则 $\exists y < t(\vec{x})\varphi$ 和 $\forall y < t(\vec{x})\varphi$ 都是 $\Sigma_0(I\Sigma_0)$-公式.

习题 1.4.6. 设 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \Sigma_0$. 证明: 以下命题等价

(1) $\mathrm{PA}^- \vdash \exists \vec{x}\varphi$;

(2) $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{PA}^- \vdash \varphi(\overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_{n-1})$;

(3) $\mathbb{N} \models \exists \vec{x}\varphi$.

进一步, 证明: 以上结论对任何介于 PA^- 和 $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ 的一阶理论都成立.

注意: 根据哥德尔不完全性定理, 以上结论对 $\forall \vec{x}\varphi$ 并不成立.

习题 1.4.7. 命题 *1.3.1* 证明中 M 上的二元关系 $\sim_{\mathbb{Z}}$ 不是 $\mathcal{L}_A$-模型 M 上可定义的.

习题 1.4.8. 设 M 是 PA 的可数模型. 证明:

(1) M 有连续统多个前截, 即存在单射

$$f:\mathbb{R}\to\{I\subset M: I \text{ 是} M \text{ 的前截}\}.$$

(2) M 有连续统多个可加前截 I.

(3) M 有连续统多个可乘前截 I.

(4) 若 I 是 M 前截且对乘法封闭, 则 I 是一个子模型 (的论域).

习题 1.4.9. 设 $0<n\in\mathbb{N}$, $M\models B\Sigma_n$, X 是一个 M-有穷集, $\varphi(x,y,z)\in\Sigma_n$, $a\in M$, 且

$$M\models\forall y\in X\exists z\varphi(a,y,z).$$

证明: 存在 $b\in M$ 使得

$$M\models\forall y\in X\exists z<b\varphi(a,y,z).$$

习题 1.4.10. 对公式 $\varphi(x,y,\vec{z})$, 令 $B^+\varphi$ 记以下公式

$$\forall\vec{z},u\exists v\forall x<u(\exists y\ \varphi(x,y,\vec{z})\to\exists y<v\ \varphi(x,y,\vec{z})).$$

若 Γ 是公式集合, 则令

$$B^+\Gamma=I\Sigma_0+\{B^+\varphi:\varphi\in\Gamma\}.$$

设 $n\in\mathbb{N}$, 证明: $I\Sigma_n$ 与 $B^+\Sigma_n$ 等价.

第二章　子模型和扩张

一阶语言 $\mathcal{L}$ 的模型 M 的 **理论**是以下一阶理论

$$\{\varphi : \varphi \text{ 是闭公式且} M \models \varphi\}.$$

同一个语言的两个模型 M, N **初等等价** (elementarily equivalent), 记为 $M \equiv N$, 当且仅当 $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$.

设 M, N 是一阶语言 $\mathcal{L}$ 的两个模型, 用 $c^M, c^N, F^M, F^N, R^M, R^N$ 等分别记 $\mathcal{L}$ 中的常元符号、函数符号、关系符号在 M, N 中的解释. 一个从 M 到 N 的 **嵌入** (embedding) 是一个满足以下条件的映射 $f : M \to N$,

(1) 任意常元符号 c, $f(c^M) = c^N$;

(2) 任意 n-元函数符号 F 和 $\vec{a} \in M^n$,

$$f(F^M(\vec{a})) = F^N(f(\vec{a}));$$

(3) 任意 n-元关系符号 R 和 $\vec{a} \in M^n$,

$$\vec{a} \in R^M \quad \text{当且仅当} \quad f(\vec{a}) \in R^N.$$

若存在从 M 到 N 的嵌入, 则 M 同构于 N 的一个子模型, 这时我们将 M 等同于 N 的一个子模型.

当以上嵌入是双射时, 称之为 **同构映射** (isomorphism), 记为 $f : M \cong M$; 这时称 M 和 N **同构** (isomorphic), 记为 $M \cong N$.

设 Γ 是一个公式集合. 一个从 M 到 N 的嵌入 f 是一个 **Γ-初等嵌入** (Γ-elementary embedding), 当且仅当, 对任意 $\varphi(\vec{x}) \in \Gamma$ 和 $\vec{a} \in M^{|\vec{x}|}$,

$$M \models \varphi(\vec{a}) \quad \text{当且仅当} \quad N \models \varphi(f(\vec{a})),$$

这时记 $f : M \preceq_\Gamma N$, 并且 M 可等同于 N 的一个 **Γ-初等子模型** (Γ-elementary submodel), 记为 $M \preceq_\Gamma N$, 称 N 是 M 的一个 **Γ-初等扩张**

(Γ-elementary extension). 当 $M \preceq_\Gamma N$ 且 M 是 N 的真子模型时 (记以上嵌入不是满射), 记 $M \prec_\Gamma N$.

当以上 Γ 是全体公式的集合时, 用 $\prec$, $\preceq$ 记 $\prec_\Gamma$, $\preceq_\Gamma$; 这时 Γ-初等嵌入 (子模型, 扩张) 称为初等嵌入 (子模型, 扩张).

我们将反复引用初等子模型的 **Tarski 判别准则**.

定理 2.0.1 (Tarski 判别准则). *设 M 是 N 的子模型, 则以下两个命题等价*

(1) $M \preceq N$;

(2) 任意 $\varphi(x,\vec{y})$ 和 $\vec{a} \in M^{|\vec{y}|}$, 若 $\varphi(N,\vec{a})$ 非空则 $\varphi(N,\vec{a}) \cap M$ 非空.

若 $X \subseteq M^n$ 是模型 M 的可定义集合, 则有 $\mathcal{L}_A(M)$-公式 φ 使得 $X = \varphi(M)$. 再设 $M \prec N$, 这时 $\varphi(N)$ 是 N 的可定义集合, 我们也记 $X^N = \varphi(N)$. 由 $M \prec N$ 可知 $X^N \cap M^n = X$.

类似地, 若在 M 中 $\mathcal{L}_A(M)$-公式 $\varphi(\vec{x},y)$ 定义了一个函数 $F : M^n \to M$ ($n = |\vec{x}|$), 而 N 是 M 的初等扩张, 则在 N 中 φ 也定义了一个 n-元函数, 我们记其为 F^N. 由 $M \prec N$ 可知 $F^N \upharpoonright M^n = F$, 即对任意 $\vec{a} \in M^n$, $F^N(\vec{a}) = F(\vec{a})$.

2.1 非标准模型的构造

一个直接构造非标准模型的方法是运用紧致性定理, 或者紧致性定理的推论, 上行 Löwenheim-Skolem 定理.

命题 2.1.1. *每一个 $\mathcal{L}_A$-模型 M 都有一个初等真扩张 N, 即 $M \prec N$.*

现在大家知道紧致性定理是哥德尔完全性定理的推论, 还知道紧致性定理也可以不用完全性定理而借助超积方法证明. 不少逻辑学家则将紧致性定理的最早形式归功于挪威数学家 Thoralf Albert Skolem. Skolem 在 [10] 中构造了第一个算术非标准模型 (英文版见 [11]), 他的方法也可以看作超积方法的雏形. Skolem 的方法大致如下.

设 M 是 PA 的可数模型.

令

$$\mathcal{B} = \{X \subseteq M : X \text{ 是可定义的}\}.$$

注意 $\mathcal{B}$ 是可数的. 构造 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ 使得

(1) 对任意 $a \in M$, $M - \{a\} \in \mathcal{U}$;

(2) 若 $X \in \mathcal{U}$ 且 $X \subset Y \in \mathcal{B}$ 则 $Y \in \mathcal{U}$;

(3) 若 X, Y 都在 $\mathcal{U}$ 中, 则 $X \cap Y$ 也在其中;

(4) 若 $X \in \mathcal{B}$ 则 X 和 $M - X$ 刚好有一个在 $\mathcal{U}$ 中.

了解布尔代数的读者应该知道: $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数, $\mathcal{U}$ 是它的一个超滤.

定义 M 上的可定义 $f : M \to M$ 的二元关系如下

$$f \sim g \quad \text{当且仅当} \quad \{a \in M : f(a) = g(a)\} \in \mathcal{U}.$$

可证明 $\sim$ 是一个等价关系. 用 $[f]$ 记 f 所在的等价类.

令 N 是所有 M 上的可定义一元函数的等价类构成的集合. 定义

$$[f] +_\sim [g] = [f + g]_\sim, \quad [f] \times_\sim [g] = [f \times g]_\sim,$$
$$[f] <_\sim [g] \quad \text{当且仅当} \quad \{a \in M : f(a) < g(a)\} \in \mathcal{U},$$

其中 $f+g, f \times g$ 分别定义为 $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$, $(f \times g)(a) = f(a)g(a)$.

对 $a \in M$, 令 $c_a : M \to M$ 将任意 $b \in M$ 映射为 a. 可以证明 $(N; [c_0], [c_1], +_\sim, \times_\sim, <_\sim)$ 是 $\mathcal{L}_A$-模型且是 M 的初等真扩张.

命题 2.1.2. 令 $F : M \to N$, $F(a) = [c_a]$. 则

(1) F 是初等嵌入;

(2) 设 $\mathrm{id} : M \to M$ 是恒等函数, 即 $\mathrm{id}(a) = a$, 则对任意 $a \in M$, $[\mathrm{id}] \neq [c_a] = F(a)$.

故 $F : M \prec N$.

以上命题的证明可通过 Łos 定理的以下形式得到:

引理 2.1.3 (Łos 定理)**.** 任意 $\mathcal{L}_A$-公式 $\varphi(\vec{x})$ 和 M 上可定义一元函数 $f_0, \ldots, f_{n-1}$,

$$N \models \varphi([f_0], \ldots, [f_{n-1}]) \Leftrightarrow \{a \in M : M \models \varphi(f_0(a), \ldots, f_{n-1}(a))\} \in \mathcal{U}.$$

上面构造的 N 还有以下性质.

命题 2.1.4. 设 M, N 如上.

(1) 若 $X \subseteq M$ 是 M 上的可定义集合, 则 $X \in \mathcal{U}$ 当且仅当 $[\mathrm{id}] \in X^N$.

(2) 若 g 是 M 上的可定义一元函数, 则 $[g] = g^N([id])$.

(3) $N = \{f^N([\mathrm{id}]) : f$ 是 M 上的可定义一元函数$\}$.

证明. (1) 设 $X = \varphi(M, d)$, 其中 $\varphi(x, y) \in \mathcal{L}_A$, $d \in M$. 则 $X^N = \varphi(N, [c_d])$. 故

$$\begin{aligned}
[\mathrm{id}] \in X^N &\Leftrightarrow N \models \varphi([\mathrm{id}], [c_d]) \\
&\Leftrightarrow \{a \in M : M \models \varphi(\mathrm{id}(a), c_d(a))\} \in \mathcal{U} \qquad (\text{由 Łos 定理}) \\
&\Leftrightarrow \{a \in M : M \models \varphi(a, d)\} \in \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

(2) 设 g 是 M 上的可定义一元函数, 则有 $\varphi(x, y, z) \in \mathrm{PA}$ 及 $d \in M$ 使得对任意 $a, b \in M$,

$$b = g(a) \Leftrightarrow M \models \varphi(a, b, d).$$

而在 N 中, 对任意 $[f_0], [f_1]$,

$$\begin{aligned}
[f_1] = g^N([f_0]) &\Leftrightarrow N \models \varphi([f_0], [f_1], [c_d]) \\
&\Leftrightarrow \{a \in M : M \models \varphi(f_0(a), f_1(a), d)\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

当 $f_1 = g$, $f_0 = \mathrm{id}$ 时,

$$\{a \in M : M \models \varphi(\mathrm{id}(a), g(a), d)\} = \{a \in M : M \models \varphi(a, g(a), d)\} = M \in \mathcal{U}.$$

因此 $[g] = g^N([\mathrm{id}])$.

(3) 是 (2) 的简单推论. □

2.2 型、Skolem 函数和闭包

设 M 是一个模型, $0 < n \in \mathbb{N}$, $B \subseteq M$, $\vec{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. M 上的一个 (n, B)**-型** (n-type) 是一个满足以下条件的 $\mathcal{L}_A(B)$-公式集合 $p = p(\vec{x})$

(1) $p(\vec{x})$ 中的公式都形如 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ (可能有来自 B 的参数);

(2) 任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\varphi_0, \ldots, \varphi_k \in p$, $\varphi_0(M) \cap \cdots \cap \varphi_k(M)$ 非空.

一个 M 上的 (n,B)-型 p 是 **完全的** (complete), 当且仅当任意 $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{L}_A(B)$, $\varphi \in p$ 或 $\neg\varphi \in p$. 令 $S_n^M(B)$ 记所有 M 上完全 (n,B)-型构成的集合, $S^M(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n^M(B)$. 当 $B = M$ 时, M 上的 n-型指 M 上的 (n,B)-型, $S_n^M = S_n^M(M)$, $S^M = S^M(M)$.

任何 M-上的 n-型都包含于一个完全的 n-型, 当 M 不可数时这需要用选择公理. 给定 M 时, 我们可以将 $\mathcal{L}_A(M)$-公式等同于其定义的集合, 一个 n-型 p 等同于一个满足以下条件的可定义集合族 p

(1) 任意 $X \in p$ 是 M^n 的子集;

(2) 任意 $k \in \mathbb{N}$, $X_0, \ldots, X_k \in p$, $\bigcap_{i=0}^k X_i$ 非空.

下面我们构造型时常常采用这种观点, 将构造型等同于构造满足以上条件的可定义集合族. 这时可见上一节 Skolem 构造中的 $\mathcal{U}$ 就是一个完全 1-型.

例子 2.2.1. 设 $M \prec N$.

(1) $\{x \neq a : a \in M\}$ 是一个 M 上的 1-型.

(2) $\{x > a : a \in M\}$ 也是一个 M 上的 1-型.

(3) 若 I 是 M 的真前截, $\{a < x < b : a \in I < b \in M\}$ 也是一个 M 上的 1-型;

(4) 任意 $\vec{b} \in N$, $\mathrm{tp}^N(\vec{b}/M) = \{\varphi \in \mathcal{L}_A(M) : N \models \varphi(\vec{b})\} \in S(M)$.

设 $M \prec N$, p 是一个 M-上的 n-型. N 中的 $\vec{b}$ 是 p 的一个 **实现** (realization), 当且仅当 $\mathrm{tp}^N(\vec{b}/M) \supseteq p$, 当且仅当任意 $\varphi \in p$, $N \models \varphi(\vec{b})$. 这时, 也称 $\vec{b}$ **满足**或 **实现** (realizes) p, 有时记作 $\vec{b} \models p$. 令

$$p(N) = \{\vec{b} \in N^n : \vec{b} \text{ 实现} p\}.$$

由紧致性定理知, 任何语言任何模型上的型总是能在某个初等扩张中实现. PA 还具有下面介绍的特别性质, 使得这样的初等扩张在某种意义上是可构造的.

设 M 是一个模型 (未必是一阶算术的模型), $\varphi(x, \vec{y})$ 是 (M 所解释的一阶语言的) 公式. 若 $f : M^{|\vec{y}|} \to M$, 且对任意 $\vec{b} \in M^{|\vec{y}|}$, 当 $\varphi(M, \vec{b}) \neq \emptyset$ 时 $f(\vec{b}) \in \varphi(M, \vec{b})$, 则称 f 为 **$\varphi(x, \vec{y})$ 在 M 上的一个 Skolem 函数**, 或简称一个 **$\varphi(x, \vec{y})$-Skolem 函数**.

命题 2.2.2. *若 $M \models \mathrm{PA}$, 则任意公式 $\varphi(x, \vec{y})$ 有可定义 Skolem 函数.*

证明. 习题. □

设 M 是模型, $A \subseteq M$. 称 $b \in M$ 是 **M 中 A-可定义的**, 当且仅当存在 $\mathcal{L}_A(A)$-公式 $\varphi(x)$ 使得

$$\varphi(M) = \{b\},$$

即 b 是 M-中唯一满足 $\varphi(x)$ 的元素. M 中 $\emptyset$-可定义的元素简称为 M 中的可定义元素. 令

$$\mathrm{dcl}(M; A) = \{b \in M : b \text{ 是 } M \text{ 中 } A\text{-可定义的}\}, \quad \mathrm{dcl}(M) = \mathrm{dcl}(M; \emptyset).$$

称 $\mathrm{dcl}(M; A)$ 为 **A 在 M 中的可定义闭包** (definable closure). 由于 PA 的模型有可定义 Skolem 函数, 故 $\mathrm{dcl}(M; A)$ 也是 A 在 M 中的 **Skolem 闭包** (Skolem hull).

命题 2.2.3. *若 $M \models \mathrm{PA}$, $A \subseteq M$, 则 $\mathrm{dcl}(M; A)$ 是 M 中包含 A 的最小的初等子模型, 即 $\mathrm{dcl}(M; A) \preceq M$, 且任意 $N \preceq M$, 若 $A \subseteq N$ 则 $\mathrm{dcl}(M; A) \subseteq N$.*

证明. 习题. □

命题 2.2.4. *设 $0 < n \in \mathbb{N}$, $M \models \mathrm{PA}$, p 是 M 上的完全 n-型, N 和 N' 是 M 的两个初等扩张.*

(1) 若 $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ 是 p 在 N 中的一个实现, 则

$$\mathrm{dcl}(N; M \cup \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}) = \{F^N(\vec{b}) : F \text{ 是 } M\text{-上的可定义 } n\text{-元函数}\}.$$

(2) 若 $\vec{b}' = (b'_0, \ldots, b'_{n-1})$ 是 p 在 N' 中的一个实现, 则

$$\mathrm{dcl}(N; M \cup \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}) \cong \mathrm{dcl}(N'; M \cup \{b'_0, \ldots, b'_{n-1}\}).$$

证明. 习题. □

以上 $\mathrm{dcl}(N; M \cup \{b_0, \ldots, b_{n-1}\})$ 记为 $M(\vec{b})$, 称为 **M 的 p-扩张**. 由以上命题可知, 在同构的意义上, 对 M 上的完全型 p, M 只有一个 p-扩张. 现在我们知道 Skolem 构造的 N 就是 M 的一个型扩张, 且 $N = M([\mathrm{id}])$.

直观地说, 一个在 M 中没有实现的完全型 p 描述了一个 (相对 M 而言的) "虚数". M 的 p-扩张是由 M 和一个 "虚数" 构造 (借助可定义函数) 出来的, 类似于用 $\mathbb{Q}$ 和 π 构造 (借助多项式函数) $\mathbb{Q}(\pi)$, 或者用 $\mathbb{R}$ 和 $\sqrt{-1}$ 构造 $\mathbb{C}$.

命题 2.2.5. *设 $M \models \mathrm{PA}$, 初等子模型关系 $\prec$ 是 $\{N : N \preceq M\}$ 上的偏序关系, 记对应的偏序集为 $\mathrm{Lt}(M)$. 则*

(1) $\mathrm{Lt}(M)$ *有最小元* $\mathrm{dcl}(M;\emptyset)$ *和最大元* M.

(2) *若* $\{N_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *是* M *的一族初等子模型, 则* $\bigcap\{N_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *是此子模型族在* $\mathrm{Lt}(M)$ *中的下确界, 即此偏序集中任意* N, *若* N *是其中每个* N_α *的初等子模型, 则* $N \preceq \bigcap\{N_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

(3) *若* $\{N_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *是* M *的一族初等子模型, 则它在此偏序集中有上确界* $\mathrm{dcl}(M;\bigcup\{N_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$.

因此 $\mathrm{Lt}(M)$ *是一个有最大和最小元的 (完备) 格.*

证明. 习题. □

以上命题还有一个相对化的形式.

命题 2.2.6. *设 $M \prec N \models \mathrm{PA}$, 初等子模型关系 $\prec$ 是 $\{\bar{M} : M \preceq \bar{M} \preceq N\}$ 上的偏序关系, 记对应的偏序集为 $\mathrm{Lt}(N/M)$. 则 $\mathrm{Lt}(N/M)$ 是一个有最大和最小元的 (完备) 格.*

证明. 习题. □

一阶算术模型中有若干重要开问题是关于 $\mathrm{Lt}(M)$ 或 $\mathrm{Lt}(N/M)$ 的.

问题 2.2.7. *(1) 哪些有穷格同构于某个 $\mathrm{Lt}(M)$?*

(2) *是否任意有穷格* L *和任意 (可数)* $M \models \mathrm{PA}$ *都存在* $N \succ M$ *使得* $L \cong \mathrm{Lt}(N/M)$?

当然我们不打算在这里讨论这个大问题, 只介绍一类基本的扩张构造.

模型 M 的一个初等扩张 N 是 **极小的**, 当且仅当 $\mathrm{Lt}(N/M)$ 只有两个元素, 当且仅当不存在 $\bar{M}$ 使得 $M \prec \bar{M} \prec N$. 若 N 是 M 的极小初等扩张, 必有某个 M 上的完全 1-型 p 使 N 是 M 的 p-扩张, 因为对任意 $c \in N$, $\mathrm{dcl}(N; M \cup \{c\}) \in \mathrm{Lt}(N/M)$.

> 给定 $M \models \mathrm{PA}$, 是否存在初等扩张 N 使得 $\mathrm{Lt}(N/M)$ 刚好有两个元素 (M 和 N)?

2.3 Gaifman 分裂

有两类特别有意思的扩张关系. 设 $\mathcal{L}_A$-模型 M 是 N 的子模型.

(1) 若 M (的论域) 是 N 的前截, 称 N 为 M 的 **外扩张** (end-extension), 记为 $M \subseteq_{\text{end}} N$ 或 $N \supseteq_{\text{end}} M$. 当 $M \subseteq_{\text{end}} N$ 且 $M \neq N$ 时, 记 $M \subset_{\text{end}} N$.

(2) 若 M 在 N 中无界, 即任意 $a \in N$ 存在 $b \in M$ 使得 $a < b$, 则称 N 为 M 的 **内扩张** (cofinal extension), 记为 $M \subseteq_{\text{cf}} N$.

(3) 若 $M \subseteq_{\text{end}} N$ 且 $M \preceq N$, 则称 N 是 M 的 **初等外扩张**, 记为 $M \preceq_{\text{end}} N$. 类似地可定义 **初等内扩张**, 记为 $M \preceq_{\text{cf}} N$.

定理 2.3.1 (Gaifman 分裂)**.** *若 $M \prec N \models \text{PA}$, 则存在 $\bar{M}$ 使得*

$$M \preceq_{\text{cf}} \bar{M} \preceq_{\text{end}} N.$$

引理 2.3.2. *若 $M \prec_{\Sigma_0,\text{cf}} \bar{M}$, $M \models \text{PA}$, $\bar{M} \models \text{PA}^-$. 则 $M \prec \bar{M}$, 从而 $\bar{M} \models \text{PA}$.*

证明. 只要对 $n > 1$ 用归纳法证明: 若 $M \prec_{\Sigma_{n-2},\text{cf}} \bar{M}$, $\varphi(x, y, z) \in \Pi_{n-2}$, $a \in M$ 且 $M \models \forall y \exists z \varphi(a, y, z)$, 则 $\bar{M} \models \forall y \exists z \varphi(a, y, z)$.

设 n, φ, a 如上. 由 $M \subset_{\text{cf}} \bar{M}$ 知, 只要证明: 任意 $b \in M$, $\bar{M} \models \forall y < b \exists z \varphi(a, y, z)$. 固定 $b \in M$, 由 $M \models \text{PA}$ (其实只需要 $M \models I\Sigma_n$) 知, 存在 M-有穷函数 f 使得: 任意 $c \in [0, b)^M$, $M \models \varphi(a, c, f(c))$. 故

$$M \models \forall y < b \forall z (z = f(y) \to \varphi(a, y, z)).$$

以上满足关系右边是一个 Π_{n-1}-公式, 且 a, b, f 都来自 M. 由 $M \prec_{\Sigma_{n-1}} \bar{M}$ 知

$$\bar{M} \models \forall y < b \forall z (z = f(y) \to \varphi(a, y, z)).$$

故

$$\bar{M} \models \forall y < b \exists z \varphi(a, y, z).$$

□

证明定理 2.3.1. 设 $M \prec N \models \mathrm{PA}$. 令

$$\bar{M} = \{a \in N : \text{ 存在} b \in M \text{ 使得} b > a\}.$$

容易证明 $\bar{M}$ 是 N 的可乘前截.

由习题 2.6.1 知, $\bar{M} \models \mathrm{PA}^-$ 且

$$\bar{M} \preceq_{\Sigma_0,\mathrm{end}} N.$$

再由 $M \prec N$ 可知, $M \preceq_{\Sigma_0,\mathrm{cf}} \bar{M}$. 由引理 2.3.2 知, $M \prec \bar{M}$.

以下证 $\bar{M} \preceq N$. 由 Tarski 判别准则, 只要证明: 任意 $a \in \bar{M}$ 和任意公式 $\varphi(x, y)$, 若 $\varphi(N, a) \neq \emptyset$ 则 $\varphi(N, a) \cap \bar{M} \neq \emptyset$. 设 a, φ 如上, 并设 $b \in M$ 且 $a < b$. 由 $M \models \mathrm{PA}$ 知, 存在 $c \in M$ 使得

$$M \models \forall y < b(\exists x \varphi(x, y) \to \exists x < c\, \varphi(x, y)).$$

由 $M \prec N$ 知

$$N \models \forall y < b(\exists x \varphi(x, y) \to \exists x < c\, \varphi(x, y)).$$

结合 $\varphi(N, a) \neq \emptyset$ 知, $\varphi(N, a) \cap [0, c]$ 非空. 由 $c \in M$ 及 $\bar{M}$ 的定义知, $\varphi(N, a) \cap \bar{M}$ 非空. □

由 Gaifman 分裂定理可知, 若 $N = M(c)$ 是 M 的极小初等扩张, 则 N 或者是 M 的内扩张或者是 M 的外扩张.

2.4 外扩张

这里我们将证明任意 PA 的模型有极小初等外扩张.

定理 2.4.1 (MacDowell-Specker [7]). *PA-模型都有初等外扩张.*

定理 2.4.2 (可数 MacDowell-Specker). **可数** *PA-模型都有初等外扩张.*

我们先证明定理 2.4.2, 然后再将其证明方法推广至一般模型的情况, 证明定理 2.4.1.

引理 2.4.3. *设 $M \models \mathrm{PA}$, $X \subseteq M$ 是 M 上可定义的无界集合, F 是 M 上可定义的一元函数, $b \in M$. 则存在无界的可定义 $Y \subseteq X$ 满足以下两种情况之一*

(1) $F \upharpoonright Y$ *是常函数;*

(2) $F(Y) = \{F(a) : a \in Y\} > b$.

证明. 若有 $i \in [0, b]$ 使 $X \cap F^{-1}(i)$ 在 M 中无界, 则 $Y = X \cap F^{-1}(i)$ 满足 (1).

否则, 任意 $i \in [0, b]$, $X \cap F^{-1}(i)$ 在 M 中有界; 故 $X \cap F^{-1}[0, b]$ 有界. 则 $Y = X \cap F^{-1}(b, \infty)$ 满足 (2). □

证明定理 *2.4.2*. 设 $M \models \mathrm{PA}$ 是可数的. 则 M 上所有可定义一元函数和 M 中元素构成的有序对可列举如下

$$(F_0, b_0),\ (F_1, b_1),\ \ldots,\ (F_n, b_n),\ \ldots \quad (n \in \mathbb{N}).$$

以下我们构造一个 M 上的 1-型 p.

令 $X_0 = M$. 设 $X_n \in p$ 且 X_n 是 M 的可定义、无界的子集. 由引理 2.4.3, 取 X_{n+1} 是 X_n 的无界、可定义子集, 使 $F_n \upharpoonright X_{n+1}$ 是常函数或 $F(X_{n+1}) > b_n$.

令 p 是一个 M 上的完全 1-型使之包含所有 X_n $(n \in \mathbb{N})$. 令 N 是 M 的一个 p-扩张, 即 $N = M(c)$, c 是 p 在 N 中的一个实现. 则

$$N = \{F^N(c) : F \text{ 是 } M \text{ 上可定义一元函数}\}.$$

对任意 M 上可定义一元函数 F, 分情况讨论 $F^N(c)$.

(i) 若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $F_n = F$ 且 $F_n \upharpoonright X_{n+1}$ 总等于某个 $a \in M$, 则 $F^N(c) = F_n^N(c) = a \in M$.

(ii) 否则, 任取 $b \in M$, 再取 $n \in \mathbb{N}$ 使 $(F_n, b_n) = (F, b)$. 则

$$F(X_{n+1}) = F_n(X_{n+1}) > b_n = b,$$

故 $F^N(c) > b$. 由 b 的任意性知, $F^N(c) > M$.

当 $F = \mathrm{id}$ 时, 以上 (i) 不成立. 故由 (ii) 知 $c = \mathrm{id}^N(c) > M$.

因此 $M \prec_{\mathrm{end}} N$. □

当 M 不可数时, 我们不能像以上证明那样构造 X_n 的序列. MacDowell-Specker 注意到, $\mathcal{L}_A$-公式是可数的; 当 $\mathcal{L}_A$-公式 $\varphi(x, y, z)$ 固定时, 在 $M \models \mathrm{PA}$ 中我们可以仅对用 φ 定义的函数递归构造类似 X_n 的序列, 并且取某种交集 Y, 使得对所有在 M 上用 φ 定义的函数和所有 $b \in M$, Y “几乎” 都满足引理 2.4.3 的结论.

引理 2.4.4. *设 $\varphi(x,y,z) \in \mathcal{L}_A$, $M \models \mathrm{PA}$, $X \subseteq M$ 是 M 上可定义的无界集合. 则存在无界的可定义 $Y \subseteq X$, 使得对任意 $b, c \in M$, 若 $F = \varphi(M, c)$ 是一元函数, 则有 $a \in M$ 满足两种情况之一*

(1) 存在 $i < b$ 使 $F(Y \cap (a, \infty)) = \{i\}$;

(2) $F(Y \cap (a, \infty)) > b$.

证明. 我们先直观地描述如何构造 Y. 令

$$P = \{c \in M : \varphi(M, c) \text{ 是一个一元函数}\}.$$

不妨设 P 非空, 否则令 $Y = X$ 即可. 设 $(\langle b_k, c_k \rangle : k \in M)$ 是所有满足 $b_k \in M$ 和 $c_k \in P$ 的有序对.

令 $X_0 = X$. 设 X_k 已定义. 令 $a_k = \min X_k$. 记 $\varphi(M, c_k)$ 为 F_k. 若存在 $i \leq b_k$ 使得 $X_k \cap F_k^{-1}(i)$ 无界, 则令

$$i_k = \min\{i : X_k \cap F_k^{-1}(i) \text{ 无界}\}, \quad X_{k+1} = X_k \cap F_k^{-1}(i_k) \cap (a_k, \infty);$$

否则, 令 $X_{k+1} = X_k \cap F_k^{-1}(b_k, \infty) \cap (a_k, \infty)$.

最后, 令 $Y = \{a_k : k \in M\}$. 设 $b \in M$, $c \in P$, 取 $j \in M$ 使 $\langle b, c \rangle = \langle b_j, c_j \rangle$. 令 $a = a_j$. 若 i_j 有定义, 则

$$Y \cap (a, \infty) \subseteq X_{j+1} \subseteq F_j^{-1}(i_j),$$

这时 (1) 成立. 否则,

$$Y \cap (a, \infty) \subseteq X_{j+1} \subseteq F_j^{-1}(b_j, \infty),$$

这时 (2) 成立.

下面我们验证 Y 是可定义的.

(a) 用递归定理 1.2.11 可证明以下递归定义的函数是可定义的

$$Q(0) = \min\{\langle b, c \rangle : b \in M, c \in P\},$$
$$Q(k+1) = \min\{\langle b, c \rangle > Q(k) : b \in M, c \in P\}.$$

(b) 令 $\mathrm{Func}(x, y)$ 记以下 Σ_0-公式

$$\forall u < y \exists! v < x((x)_{\langle u,v \rangle} = 1) \land$$
$$\forall u < x \left(u \geq y \to \forall v < x(\langle u, v \rangle < \mathrm{len}(x) \to (x)_{\langle u,v \rangle} = 0)\right).$$

则 $M \models \mathrm{Func}(s,k)$ 当且仅当 s 编码了一个以 $[0,k)$ 为定义域的 M-有穷函数, 这时我们用 $s(i)=j$ 记 $(s)_{\langle i,j\rangle}=1$.

(c) 用 $\psi(x_s,x_k,y)$ 记以下公式

$$\begin{aligned}&\mathrm{Func}(x_s,x_k)\wedge y\in X\wedge\\ &\qquad\forall x_j<x_k, x_a<x_s, x_i<x_s\Big(\big((x_s)_{\langle x_j,\langle x_a,x_i\rangle\rangle}=1\to x_a<z\big)\wedge\\ &\qquad\quad\forall x_b,x_c\Big(\big(Q(x_j)=\langle x_b,x_c\rangle\to(x_i\le x_b\to\varphi(y,x_i,x_c))\wedge\\ &\qquad\qquad\qquad(x_i>x_b\to\forall z(\varphi(y,z,x_c)\to z>x_b))\big)\Big)\Big).\end{aligned}$$

设 $M\models\psi(s,k,d)$. 上面公式的第一行意味着 s 编码了一个以 $[0,k)$ 为定义域的 M-有穷函数, 且 $d\in X$; 第二行大括号内的公式称: 若 $s(j)=\langle a,i\rangle$, 则 $d>a$, 这相当于在前面构造的第 j 步我们只考虑 $>a_j$ 的元素; 第三行要求: 若 $Q(j)=\langle b_j,c_j\rangle$ 且 $i\le b_j$, $F_j(d)=i$, 其中 F_j 是函数 $\varphi(M,c_j)$, 这相当于前面构造第 j 步时第一种情况成立; 第四行则对应构造第 j 步的第二种情况, 公式中用 $i\le b_j$ 与否区分两种情况.

(d) 用 $\theta_1(x_s,x_k,x_i)$ 记以下公式

$$\begin{aligned}&\exists x_b,x_c\Big(\langle x_b,x_c\rangle=Q(x_k)\wedge x_i\le x_b\wedge\\ &\qquad\qquad\forall w\exists y\big(w<y\wedge\psi(x_s,x_k,y)\wedge\varphi(x,x_i,x_c)\big)\Big).\end{aligned}$$

$M\models\theta_1(s,k,i)$, 当且仅当 $i\le b_k$ 且 $\psi(s,k,M)\cap F_k^{-1}(i)$ 无界 (其中 b_k,F_k 如 (c)).

(e) 用 $\theta_2(x_s,x_k,x_i)$ 记以下公式

$$\exists x_b,x_c(\langle x_b,x_c\rangle=Q(x_k)\wedge x_i=x_b+1\wedge\forall x<x_i\neg\theta_1(x_s,x_k,x)).$$

(f) 用以下公式定义函数 $G(x_s,x_k)=x_t$

$$\begin{aligned}&(\neg\mathrm{Func}(x_s,x_k)\to x_t=0)\wedge\\ &\mathrm{Func}(x_s,x_k)\to\mathrm{Func}(x_t,x_k+1)\wedge\forall x<x_k,y((x_t)_{\langle x,y\rangle}=1\to(x_s)_{\langle x,y\rangle}=1)\wedge\\ &\qquad\exists x_a,x_i\Big((x_t)_{\langle x_k,\langle x_a,x_i\rangle\rangle}=1\wedge\psi(x_s,x_k,x_a)\wedge\forall x<x_a\neg\psi(x_s,x_k,x)\wedge\\ &\qquad\qquad\big(\theta_1(x_s,x_k,x_i)\wedge\forall x<x_i\neg\theta_1(x_s,x_k,x)\big)\vee\theta_2(x_s,x_k,x_i)\Big).\end{aligned}$$

(g) 用递归定理知以下函数可定义

$$H(0)=0,\quad H(k+1)=G(H(k),k).$$

最后可验证

$$Y = \Big\{a : M \models \exists k, t\Big(t = H(k) \wedge \exists x_i((t)_{\langle k, \langle a, x_i \rangle\rangle} = 1)\Big)\Big\}$$

且是可定义的. □

现在可证明 MacDowell-Specker 定理.

证明 *MacDowell-Specker* 定理. 设 $M \models$ PA. 列举所有形如 $\varphi(x, y, z)$ 的 $\mathcal{L}_A$-公式如下

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots \quad (n \in \mathbb{N})$$

令 $X_0 = M$. 设 X_n 是 M 的可定义无界子集, 对 X_n, φ_n 用引理 2.4.4 所得的集合记为 X_{n+1}.

令 p 是一个 M 上的完全 1-型使之包含

$$\{X_n \cap (a, \infty) : n \in \mathbb{N}, a \in M\}.$$

令 $N = M(d)$ 是 M 的 p-扩张, 则

$$N = \{F^N(d) : F \text{ 是 } M \text{ 上可定义一元函数}\}.$$

对任意 $F^N(d) \in N$, 取 $n \in \mathbb{N}$ 和 $c \in M$ 使得 $F = \varphi_n(M, c)$. 由 X_{n+1} 的定义知, 以下两种情况之一成立

(a) 对某个 $a \in M$, $F \restriction (X_{n+1} \cap (a, \infty))$ 是常函数, 这时 $F^N(d) \in M$;

(b) 对任意 $b \in M$, 有 $a \in M$ 使 $F(X_{n+1} \cap (a, \infty)) > b$, 这时 $F^N(d) > b$, 故 $F^N(d) > M$.

因此 $M \prec_{\text{end}} N$. □

接下来我们将加强 MacDowell-Specker 定理以得到极小初等外扩张. 在上一节的末尾, 我们已知这样的扩张一定形如 $N = M(c)$. 我们先考察 $\text{tp}^N(c/M)$.

引理 2.4.5. *设 $M \models$ PA, p 是 M 上的完全 1-型, $N = M(c)$ 是 M 的 p-扩张. 则 N 是 M 的极小初等外扩张, 当且仅当 p 满足以下条件*

(1) 任意 $a \in M$, 公式 $x > a$ 在 p 中;

(2) 任意 M 上可定义一元函数 F, 存在 $\mathcal{L}_A(M)$-公式 $\varphi(x) \in p$, 使得 $F \restriction \varphi(M)$ 是常函数或 $F \restriction \varphi(M)$ 是单射.

证明. 先设 $N = M(c)$ 是 M 的极小初等外扩张, $\mathrm{tp}^N(c/M) = p$. 对任意 $a \in M$, $N \models c > a$; 由 $\mathrm{tp}^N(c/M) = p$ 知, 公式 $x > a$ 在 p 中. 对任意 M 上可定义一元函数 F, 设 $\theta(x, y) \in \mathcal{L}_A(M)$ 使 $F = \theta(M)$. 分两种情况讨论.

(a) 若 $F^N(c) \in M$ 则存在 $a \in M$ 使 $F^N(c) = a$, 则 $N \models \theta(c, a)$; 由 $\mathrm{tp}^N(c/M) = p$ 知, $\varphi(x) = \theta(x, a) \in p$, $F \restriction \theta(M, a)$ 是常函数 (取值恒为 a).

(b) 设 $d = F^N(c) \notin M$. 由 N 的极小性知, $N = \mathrm{dcl}(N; M \cup \{d\})$. 故有 M 上可定义一元函数 G 使 $c = G^N(d) = G^N \circ F^N(c)$. 设 $G = \psi(x, y)$, $\psi \in \mathcal{L}_A(M)$. 由 $\mathrm{tp}^N(c/M) = p$ 定理知, p 包含以下公式

$$\varphi(x) = \exists y(\theta(x, y) \wedge \psi(y, x)).$$

由 $\psi(M) = G$ 是一元函数知, F 在 $\varphi(M)$ 上是单射.

反之, 设 p 满足 (1) 和 (2). 由 $N = M(c)$ 是 M 的 p-扩张及 (1) 知, $c > M$. 任取 $d \in N$, 则有 M-上可定义一元函数 F 使 $d = F^N(c)$. 设 $F = \theta(M)$, $\theta(x, y) \in \mathcal{L}_A(M)$. 分情况讨论如下:

(a) 若存在 $\varphi(x) \in p$ 使得 $F \restriction \varphi(M)$ 恒取值 $a \in M$, 则

$$M \models \forall x(\varphi(x) \to \theta(x, a)).$$

故

$$N \models \forall x(\varphi(x) \to \theta(x, a)).$$

由 $\varphi \in p$ 及 $\mathrm{tp}^N(c/M) = p$ 知 $c \in \varphi(N)$, 故 $d = F^N(c) = a \in M$.

(b) 设存在 $\varphi(x) \in p$ 使得 $F \restriction \varphi(M)$ 是单射. 故对任意 $b \in M$, $F^{-1}[0, b] \cap \varphi(M)$ 有上界, 设为 a; 由 (1) 及 p 的完全性知, $x > a \wedge \varphi(x)$ 在 p 中; 由 $\mathrm{tp}^N(c/M) = p$ 知 $d = F^N(c) > b$. 因此 $d > M$.

因此 $M \prec_{\mathrm{end}} N$.

再证明 N 的极小性. 任取 $d \in N - M$. 这时可设 F, θ 如上, 且 (b) 成立, 即有 $\varphi(x) \in p$ 使 $F \restriction \varphi(M)$ 是单射. 构造 M 上的可定义一元函数如下

$$G(a) = \begin{cases} b & b \in \varphi(M) \text{ 且} F(b) = a \\ a & \text{不存在如上} b. \end{cases}$$

设 $\psi(x,y)$ 是定义 G 的 $\mathcal{L}_A(M)$-公式. 则

$$M \models \forall x\big(\varphi(x) \to \forall y(\theta(x,y) \to \psi(y,x))\big).$$

故

$$N \models \forall x\big(\varphi(x) \to \forall y(\theta(x,y) \to \psi(y,x))\big).$$

由 $\varphi \in p$ 及 $\mathrm{tp}^N(c/M) = p$ 知, $c \in \varphi(N)$; 结合以上知, $G^N(d) = c$, 故 $c \in \mathrm{dcl}(N; M \cup \{d\})$. □

现在证明极小初等外扩张的存在性. 类似 MacDowell-Specker 定理, 我们先以可数模型为例.

定理 2.4.6. PA 的可数模型都有极小初等外扩张.

引理 2.4.7. 设 M 是 PA 的可数模型, $X \subseteq M$ 是可定义的无界集合, F 是 M 上的可定义一元函数. 则存在可定义的无界集合 $Y \subseteq X$ 使得 $F \restriction Y$ 是常函数或单射.

证明. 若存在 $b \in M$ 使 $X \cap F^{-1}(b)$ 是无界的, 则 $Y = X \cap F^{-1}(b)$ 满足要求.

否则, 构造 M 上的一元函数如下

$$G(0) = \min X, \quad G(k+1) = \min\{a \in X : a > G(k) \text{ 且} F(a) > F(G(k))\}.$$

由递归定理知, G 是可定义的, 故 $Y = \operatorname{ran} G = \{G(k) : k \in M\}$ 也是可定义的且满足要求. □

证明定理 *2.4.6.* 设 M 是 PA 的可数模型, 列举所有 M-上可定义的一元函数如下

$$F_0,\ F_1,\ \ldots,\ F_n,\ \ldots \quad (n \in \mathbb{N}).$$

令 $X_0 = M$. 若 $n \in \mathbb{N}$, X_n 是可定义的无界集合, 令 X_{n+1} 记对 X_n 和 F_n 用引理 2.4.7 所得的 Y. 令 p 是一个 M 上的完全 1-型且包含所有 X_n ($n \in \mathbb{N}$). 由引理 2.4.5 知 M 的 p-扩张是 M 的极小初等外扩张. □

用 MacDowell-Specker 定理的方法, 可以加强以上定理.

定理 2.4.8 (Gaifman [3])**.** PA 的模型都有极小初等外扩张.

引理 2.4.9. 设 $\varphi(x,y,z)\in\mathcal{L}_A$, $M\models\mathrm{PA}$, $X\subseteq M$ 是 M 上可定义的无界集合. 则存在无界的可定义 $Y\subseteq X$, 使得对任意 $c\in M$, 若 $F=\varphi(M,c)$ 是一元函数, 则有 $a\in M$ 满足两种情况之一

(1) $F\restriction(Y\cap(a,\infty))$ 是常函数;

(2) $F\restriction(Y\cap(a,\infty))$ 是单射.

证明. 这里我们只直观描述如何构造 Y, 其可定义性的验证留给读者.

令

$$P=\{c\in M:\varphi(M,c)\text{ 是一元函数}\}.$$

递归地定义

$$c_0=\min P,\quad c_{k+1}=\min P\cap(c_k,\infty).$$

由递归定理知 $k\mapsto c_k$ 是可定义函数. 记 $\varphi(M,c_k)$ 为 F_k.

递归地定义函数如下. 令

$$G(0)=\langle\min X,1,1\rangle,$$

注意 1 的二进制展开形式编码了空串. 设 $G(k)=\langle a_k,s_k,t_k\rangle$ 已定义, $a_k\in X$, $\mathrm{len}(s_k)=k$ 且 t_k 编码了一个以 $[0,k)$ 为定义域的 M-有穷函数. 令

$$X_k=X\cap\bigcap_{i<k,(s_k)_i=0}F_i^{-1}(t_k(i))\cap\bigcap_{i<k,(s_k)_i=1}F_i^{-1}(F_i(a_k),\infty),$$

其中, 引理 2.4.4 的证明, $t_k(i)$ 是 t_k 所编码的函数在 i 的取值. 定义 $G(k+1)=\langle a_{k+1},s_{k+1},t_{k+1}\rangle$ 是 M 中满足以下所有条件的唯一元素:

- $\mathrm{len}(s_{k+1})=k+1$, 当 $i<k$ 时 $(s_{k+1})_i=(s_k)_i$, 且

$$(s_{k+1})_k=0\Leftrightarrow\ \text{存在}b\text{ 使得}X_k\cap F_k^{-1}(b)\text{ 无界};$$

- t_{k+1} 编码了一个以 $[0,k]$ 为定义域的 M-有穷函数,

$$t_{k+1}(i)=\begin{cases}t_k(i) & i<k\\ \min\{b\in M:X_k\cap F_k^{-1}(b)\text{ 无界}\} & i=k,(s_{k+1})_k=0\\ 0 & i=k,(s_{k+1})_k=1;\end{cases}$$

- 而

$$a_{k+1} = \begin{cases} \min X_k \cap (a_k, \infty) \cap F_k^{-1}(t_{k+1}(k)) & (s_{k+1})_k = 0 \\ \min X_k \cap (a_k, \infty) \cap F_k^{-1}(F_k(a_k), \infty) & (s_{k+1})_k = 1. \end{cases}$$

最后令

$$Y = \{a_k : k \in M\}.$$

□

证明定理 2.4.8. 设 $M \models \mathrm{PA}$. 列举所有形如 $\varphi(x, y, z)$ 的 $\mathcal{L}_A$-公式如下

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots \quad (n \in \mathbb{N})$$

令 $X_0 = M$. 设 $n \in \mathbb{N}$, X_n 是 M 的可定义无界子集. 对 X_n 和 φ_n 用引理 2.4.9 得 X_n 的可定义无界子集 X_{n+1}. 令 p 是一个 M 上的完全 1-型且包含以下集合族

$$\{X_n \cap (a, \infty) : n \in \mathbb{N}, a \in M\}.$$

由 p 的构造知, p 满足引理 2.4.5 的前提. 因此任意 M 的 p-扩张是 M 的极小初等外扩张. □

2.5 内扩张

其实初等内扩张的构造不需要如同 MacDowell-Specker 定理那般. 首先引入一个模型论概念. 设 M 是一阶语言 $\mathcal{L}$ 的模型, 其 **原子图像** (atomic diagram) 是指

$$\mathrm{Diag}(M) = \{\varphi \in \mathcal{L}(M) : \varphi \text{ 是原子公式且} M \models \varphi\},$$

初等图像 (elementary diagram) 是指

$$\mathrm{Diag_e}(M) = \{\varphi \in \mathcal{L}(M) : \varphi \text{ 是闭公式且} M \models \varphi\}.$$

若 N 是 M 的扩张, 则 N 可自然地膨胀为一个 $\mathcal{L}(M)$-模型, 这时

$$M \preceq N \iff N \models \mathrm{Diag_e}(M).$$

初等图像常常用于初等扩张的构造.

命题 2.5.1. PA 的非标准模型都有初等真内扩张.

证明. 设 $M \models \mathrm{PA}$ 是非标准模型, 任取 $b \in M - \mathbb{N}$. 令 c 是一个新常元符号, 再令

$$\Gamma = \{c < b\} \cup \{c \neq a : a \in M\} \cup \mathrm{Th}(M).$$

由紧致性定理知, Γ 有模型 N, 且 N 作为 $\mathcal{L}_A$-模型是 M 的初等扩张. 由 Gaifman 分裂定理 2.3.1 知, 存在 $\bar{M}$ 使得

$$M \prec_{\mathrm{cf}} \bar{M} \preceq_{\mathrm{end}} N.$$

□

这可能让人以为通常更容易构造初等内扩张. 但如果我们加入额外的条件, 情况就变得不一样. 比如: 如果要构造极小的初等内扩张, 目前人们只有以下结论.

定理 2.5.2 (Blass [1])**.** PA 的可数非标准模型都有极小初等内扩张.

我们先考察 $M \models \mathrm{PA}$ 的一个型扩张何时是内扩张.

引理 2.5.3. 设 $M \models \mathrm{PA}$, $p(x) \in S_1^M$, $N = M(c)$ 是 M 的 p-扩张.

(1) $M \preceq_{\mathrm{cf}} N$ 当且仅当存在 $a \in M$ 使 $[0, a] \in p$;

(2) 若 $a \in M$ 且 $[0, a] \in p$, 则

$$N = \{f(c) : f \text{ 是以}[0, a] \text{ 为定义域的 } M\text{-有穷函数}\}.$$

证明. (1) 若 $M \preceq_{\mathrm{cf}} N$, 则存在 $a \in M$ 使 $c < a$. 由 $p = \mathrm{tp}^N(c/M)$ 知 $[0, a] \in p$.

反之, 设 $a \in M$, $[0, a] \in p$. 设 $\mathcal{L}_A(M)$-公式 $\varphi(x, y)$ 定义了一元函数 F. 由 $M \models \mathrm{PA}$ 知, 存在 $b \in M$ 使

$$M \models \forall x \leq a \exists y \leq b\ \varphi(x, y).$$

由 $M \preceq N$ 知

$$N \models \forall x \leq a \exists y \leq b\ \varphi(x, y).$$

故 $N \models \exists y \leq b\ \varphi(c, y)$, 即 $F^N(c) \leq b$. 因此 N 是 M 的内扩张.

(2) 设 $a \in M$ 且 $[0,a] \in p$. 如上, 设 $\mathcal{L}_A(M)$-公式 $\varphi(x,y)$ 定义了一元函数 F, $b \in M$ 使

$$M \models \forall x \leq a \exists y \leq b\ \varphi(x,y).$$

令

$$X = \{\langle i,j\rangle \in M : i \leq a, j \leq b, M \models \varphi(i,j)\}.$$

则 X 在 M 中有上界 $\langle a+1, b+1\rangle$. 由定理 1.3.7 知, X 是 M-有穷集合. 设 $s \in M$ 编码了 X, 则 s 就编码了以下 M-有穷函数 f

$$f : [0,a] \to [0,b], \quad f(i) = j \Leftrightarrow \langle i,j\rangle \in X.$$

故

$$M \models \forall x \leq a, y(\varphi(x,y) \leftrightarrow (s)_{\langle x,y\rangle} = 1).$$

由 $M \preceq N$ 知

$$N \models \forall x \leq a, y(\varphi(x,y) \leftrightarrow (s)_{\langle x,y\rangle} = 1).$$

故若 $d = F^N(c)$ 则 $N \models (s)_{\langle c,d\rangle} = 1$, 即 $f(c) = d$. □

一个 M 上的 n-型 $p(\vec{x})$ 是 **有界的**, 当且仅当存在 $a \in M$ 使得 $[0,a]^n \in p$ (当 p 视作可定义集合族时), 当且仅当存在 $a \in M$ 使得 $\vec{x} < a \in p$ (当 p 视作 $\mathcal{L}_A(M)$-公式集时). 若 p 如上, 称 a 为 p 的一个上界. 以上引理说明, 当 $p \in S_1^M$ 时, M 的 p-扩张是内扩张当且仅当 p 有界.

设 M 是模型, $X \subseteq M$, 令

$$\mathcal{P}^M(X) = \{Y \subseteq X : Y \text{ 是 } M\text{-有穷的}\},$$

即 $\mathcal{P}^M$ 是 M 上的 “幂集” 运算.

引理 2.5.4. *设 $M \models \mathrm{PA}$, a_0 和 a_1 是 M 的元素, $[0,a_i] \in p_i \in S_1^M$ $(i = 0,1)$, N_i 是 M 的 p_i-扩张. 令 $b = \max\{a_0, a_1\}$. 则以下等价*

(1) 存在 $\pi : N_0 \cong N_1$ 使得 $\pi \upharpoonright M = \mathrm{id}$ (即任意 $a \in M$, $\pi(a) = a$);

(2) $p_0 = p_1$;

(3) $p_0 \cap \mathcal{L}_A([0,b]) = p_1 \cap \mathcal{L}_A([0,b])$ (p_i 视作公式集时);

(4) $p_0 \cap \mathcal{P}^M([0,b]) = p_1 \cap \mathcal{P}^M([0,b])$ (p_i 视作集合族时).

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) 留给读者.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 $N_i = M(c_i)$, $\mathrm{tp}^{N_i}(c_i/M) = p_i$. 由引理 2.5.3 知,

$$N_i = \{f(c_i) : f \text{ 是以}[0,b] \text{ 为定义域的 } M\text{-有穷函数}\}.$$

定义 $\pi : N_0 \to N_1$ 为

$$\pi(f(c_0)) = f(c_1).$$

若在 N_1 中 $f(c_0) = g(c_0)$, 则由 $\mathrm{tp}^{N_0}(c_0/M) = p_0$ 及 (4) 知

$$\{k \le b : f(k) = g(k)\} \in p_0 \cap \mathcal{P}^M([0,b]) = p_1 \cap \mathcal{P}^M([0,b]).$$

由 $\mathrm{tp}^{N_1}(c_1/M) = p_1$ 知, 在 N_1 中 $f(c_1) = g(c_1)$. 这说明

$$\pi(f(c_0)) = f(c_1) = g(c_1) = \pi(g(c_0)),$$

从而 π 的定义是合理的.

类似地可证明 π 是嵌入映射且是双射, 故 π 是同构.

对任意 $a \in M$, 设 $f_a : [0,b] \to M$, $f_a(k) = a$. 则 f_a 是 M-有穷函数且在 N_i 中 $f_a(c_i) = a$. 故

$$\pi(a) = \pi(f_a(c_0)) = f_a(c_1) = a,$$

即 $\pi \restriction M = \mathrm{id}$. □

以上引理告诉我们, 构造以 b 为上界的 $p \in S_1^M$ 等价于构造 M-上的完全 $(1,[0,b])$-型.

类似引理 2.4.5, 我们可刻画何时一个模型的型扩张是极小初等内扩张.

引理 2.5.5. *设 $M \models \mathrm{PA}$, p 是 M 上的完全 1-型, $N = M(c)$ 是 M 的 p-扩张. 则 N 是 M 的极小初等内扩张, 当且仅当*

(1) p 有上界 $b \in M$, 且

(2) 任意 M-有穷函数 $f : [0,b] \to M$, 存在 $X \in p \cap \mathcal{P}^M([0,b])$ 使得 $f \restriction X$ 是常函数或单射.

证明. 习题. □

要给可数模型构造极小初等内扩张, 我们还需要一个引理和习题 1.4.2 引入的记号 card^M.

引理 2.5.6. *设 $b \in M \models \mathrm{PA}$, $X \in \mathcal{P}^M([0,b])$ 且 $\mathrm{card}^M(X) > \mathbb{N}$, $f : [0,b] \to M$ 是有穷函数. 则存在 M-有穷集合 $Y \subseteq X$, 使得 $\mathrm{card}^M(Y) > \mathbb{N}$, $f \upharpoonright Y$ 是常函数或单射.*

证明. 首先注意: 任意 M-有穷集合 Z, $f^{-1}(Z) = \{a \le b : f(a) \in Z\}$ 也是 M-有穷的.

分情况讨论如下.

(a) 若存在 j 使得 $\mathrm{card}^M(f^{-1}(j) \cap X) > \mathbb{N}$, 只要令 $Y = f^{-1}(j) \cap X$.

(b) 设对任意 j, $\mathrm{card}^M(f^{-1}(j) \cap X) \in \mathbb{N}$. 故对任意 $a \le b$,

$$\mathrm{card}^M(f^{-1}(f(a)) \cap X) = \mathrm{card}^M(\{d \in X : f(d) = f(a)\}) \in \mathbb{N}. \tag{2.5.1}$$

由于任意 $n \in \mathbb{N}$, $n^2 < b$, 故由溅出知, 存在 $c < b$ 使得

$$b > c^2 > c > \mathbb{N}. \tag{2.5.2}$$

以下构造可定义的严格递增序列 $(a_i : i \le c)$ 使得 $a_i \in X$ 且 $f \upharpoonright \{a_i : i \le c\}$ 是单射. 我们只直观描述构造, 所得序列的可定义性由读者验证.

令 $a_0 = \min X$. 设 $i < c$, $a_i \in X$. 由 (2.5.1) 及 (2.5.2) 知,

$$\mathrm{card}^M(f^{-1}\{a_j : j \le i\} \cap X) < c^2 < b.$$

故可定义

$$a_{i+1} = \min\left(X - f^{-1}\{a_j : j \le i\}\right).$$

最后令 $Y = \{a_i : i \le c\}$. □

证明定理 2.5.2. 设 $M \models \mathrm{PA}$ 是可数的, $b \in M - \mathbb{N}$. 列举所有以 $[0,b]$ 为定义域的 M-有穷函数如下

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots \quad (n \in \mathbb{N}).$$

令 $X_0 = [0,b]$. 设 $n \in \mathbb{N}$, X_n 是 $[0,b]$ 的 M-有穷子集且 $\mathrm{card}^M(X_n) > \mathbb{N}$. 对 X_n 和 f_n 用引理 2.4.7, 记所得集合为 X_{n+1}. 令 $p \in S_1^M$ 包含

$$\{X_n - \{a\} : n \in \mathbb{N}, a \in [0,b]\}.$$

则 p 满足引理 2.4.5 的 (1) 和 (2). 故 M 的 p-扩张是 M 的极小初等内扩张. □

Blass 定理的证明并不能简单地推广至任意大小的非标准模型.

问题 2.5.7. *是否 PA 的非标准模型都有极小初等内扩张?*

2.6 习题

习题 2.6.1. 设 $N \models \mathrm{PA}^-$, M 是 N 的子模型. 证明:

(1) $M \subseteq_{\mathrm{end}} N$ 当且仅当 M 是 N 的可乘前截,

(2) 若 $M \subseteq_{\mathrm{end}} N$ 则 $M \preceq_{\Sigma_0} N$ 且 $M \models \mathrm{PA}^-$.

习题 2.6.2. 设 $M \models \mathrm{PA}$, p 是 M 上的完全 1-型. 证明: M 的 p-扩张是 M 的外扩张, 当且仅当任意 M 上可定义一元函数 F 满足以下两种情况之一

(1) 存在 $\varphi \in p$ 使 $F \restriction \varphi(M)$ 是常函数;

(2) 任意 $\varphi \in p$, $F \restriction \varphi(M)$ 是无界函数.

习题 2.6.3. 证明引理 *2.5.5.*

习题 2.6.4. 证明: 如下减弱引理 *2.5.5* 条件 *(2)*, 此引理依然成立

- 任意 M-有穷函数 $f : [0, b] \to [0, b]$, 存在 $X \in p \cap \mathcal{P}^M([0, b])$ 使得 $f \restriction X$ 是常函数或单射.

第三章　Scott 集问题

在 Tennenbaum 定理 1.3.11 的证明中, 我们看到如何在非标准模型 M 中编码 $\mathbb{N}$ 的特定子集. 我们也看到 $\mathbb{N}$ 是所有一阶算术模型的前截, 通常称一阶算术模型 M 的以下子集为其 **标准前截** (standard cut):

$$\{\overline{n}^M : n \in \mathbb{N}\}.$$

若 X 是模型 M 的子集, $Y \subseteq X$ 是 **X-相对 M-有穷的** (M-coded over X), 当且仅当存在 M-有穷集合 Z 使得 $Y = X \cap Z$, 当且仅当存在 $a \in M$ 使得 $Y = \{i \in X : i < \mathrm{len}(a), (a)_i = 1\}$. 令

$$\mathrm{Cod}(M/X) = \{Y \subseteq X : Y \text{ 是 } X\text{-相对 } M\text{-有穷的}\}.$$

当 $M \models \mathrm{PA}$ 时,

$$\mathrm{Cod}(M/X) = \{Y \subseteq X : \text{ 存在} M\text{-可定义的} Z \text{ 使得} Y = X \cap Z\}.$$

当 $\mathbb{N}$ 视作 M 的前截时, $\mathrm{Cod}(M/\mathbb{N})$ 称为 M 的 **标准系统** (standard system), 记作 $\mathrm{SSy}(M)$.

3.1　一点可计算性理论

我们需要一点可计算性理论的概念, 读者可以参考 [13, §3.2].

通过二进制展开形式, 可以用自然数编码有穷 01-序列. 通常用 $2^{<\mathbb{N}}$ 记所有有穷 01-序列构成的集合, 用 ρ, σ, τ 等记 $2^{<\mathbb{N}}$ 的元素. 对 $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$, 用 $|\sigma|$ 记 $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ 的长度, 当 $i < |\sigma|$ 时用 $\sigma(i)$ 记其第 i 位 (σ 有第 $0, 1, \ldots, |\sigma| - 1$ 位).

对 $\sigma, \tau \in 2^{<\mathbb{N}}$, σ 是 τ 的 **前缀** (记为 $\sigma \preceq \tau$), 当且仅当, $|\sigma| \leq |\tau|$ 且对所有 $i < |\sigma|$, $\sigma(i) = \tau(i)$. 当 $\sigma \neq \tau$ 且 $\sigma \preceq \tau$ 时, 记 $\sigma \prec \tau$, 称 σ 为 τ 的 **真前缀**.

若 $A \subseteq \mathbb{N}$, 其 **特征函数**是以下函数

$$\chi_A(n) : \mathbb{N} \to \{0, 1\}, \quad \chi_A(n) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A. \end{cases}$$

将 χ_A 看作可数长的 01-序列, $A \upharpoonright n$ 是 χ_A 的长度为 n 的前缀, 即: 令 $\sigma = A \upharpoonright n$, 则 $|\sigma| = n$, 且对 $i < n$, $\sigma(i) = \chi_A(n)$.

设 A, B 为 $\mathbb{N}$ 的两个子集. A 是 B-可计算的 (记为 $A \leq_T B$), 当且仅当存在一个喻示图灵机 (oracle Turing machine) Φ, 使得任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in A \Rightarrow \Phi(B; n) \downarrow = 1, \quad n \notin A \Rightarrow \Phi(B; n) \downarrow = 0.$$

这里我们将采用喻示图灵机的一种等价定义. 一个喻示图灵机 Φ 是 $2^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的一个 $\Sigma_0(\mathbb{N})$-子集, 且满足以下条件:

(1) 若 $(\sigma, m, n) \in \Phi$ 且 $\sigma \prec \tau$ 则 $(\tau, m, n) \in \Phi$;

(2) 若 $(\sigma, m, n), (\sigma, m, n') \in \Phi$ 则 $n = n'$.

用以上定义重新定义喻示图灵机的计算如下: 设 $B \subseteq \mathbb{N}$, $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi(B; m) \downarrow = n \quad \text{当且仅当} \quad \text{存在} k \in \mathbb{N} \text{ 使得} (B \upharpoonright k, m, n) \in \Phi.$$

当我们不关心计算的输出时, 用 $\Phi(B; m) \downarrow$ 表示存在 n 使 $\Phi(B; m) \downarrow = n$; 用 $\Phi(B; m) \uparrow$ 表示不存在 k, n 使 $(B \upharpoonright k, m, n) \in \Phi$. 由此可将 $\Phi(B)$ 看作一个以 $\{m \in \mathbb{N} : \Phi(B; m) \downarrow\}$ 定义域的函数. 当 $\Phi(B) = \chi_A$ 时, 记 $A = \Phi(B)$. A 是 B-可计算的 ($A \leq_T B$), 当且仅当存在喻示图灵机 Φ 使 $A = \Phi(B)$.

设 Φ 是上述的喻示图灵机, 则有 Σ_0-公式 φ 使得

$$\Phi = \varphi(\mathbb{N}) = \{(\sigma, m, n) \in 2^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \varphi(\sigma, m, n)\}.$$

再设 $M \models I\Sigma_0$, 令

$$\Phi^M = \varphi(M).$$

由 $\mathbb{N} \preceq_{\Sigma_0, \text{end}} M$ 知,

$$\Phi^M \cap 2^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \Phi.$$

这时, 我们还可以进一步假设 Φ^M 满足上述条件 (1)(2).

两个 $\mathbb{N}$ 的子集 A, B 的 **直和** (记为 $A \oplus B$) 是以下集合

$$\{2n : n \in A\} \cup \{2n + 1 : n \in B\}.$$

可以证明: 对任意 $C \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_T C$ 且 $B \leq_T C$ 当且仅当 $A \oplus B \leq_T C$.

二叉树是另一个我们将要用到的概念. 一棵二叉树 T 是 $2^{<\mathbb{N}}$ 的一个对前缀封闭的子集, 即: $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$, 且若 $\rho \prec \sigma \in T$ 则 $\rho \in T$. 一个可数 01-序列 $p : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ 是二叉树 T 的一个 **无穷分支**, 当且仅当 p 的所有有穷前缀都在 T 中. 令 $[T]$ 记 T 的所有无穷分支构成的集合.

3.2 Scott 集

一个 $\mathbb{N}$ 的子集族 (即 $\mathbb{N}$ 的幂集的子集) $\mathcal{S}$ 是一个 **Scott 集**, 当且仅当 $\mathcal{S}$ 满足以下条件

(1) $\mathbb{N} \in \mathcal{S}$;

(2) 若 $A \leq_T B \in \mathcal{S}$ 则 $A \in \mathcal{S}$;

(3) 若 $A, B \in \mathcal{S}$ 则 $A \oplus B \in \mathcal{S}$;

(4) 若 $T \in \mathcal{S}$ 是一个无穷二叉树, 则存在 $p \in [T] \cap \mathcal{S}$.

定理 3.2.1 (Scott)**.** *若 $M \models I\Sigma_1$ 是非标准模型, 则 $\mathrm{SSy}(M)$ 是 Scott 集.*

证明. 容易证明: $\mathbb{N} \in \mathrm{SSy}(M)$, 且若 $A, B \in \mathrm{SSy}(M)$ 则 $A \oplus B \in \mathrm{SSy}(M)$.

设 $A \leq_T B \in \mathrm{SSy}(M)$. 则有 $b \in M - \mathbb{N}$ 使得

$$B = \{n \in \mathbb{N} : (b)_n = 1\},$$

且有喻示图灵机 Φ 使 $A = \Phi(B)$. 由喻示图灵机的定义知, 存在 Σ_0-公式 φ 使得

$$\Phi = \left\{(\sigma, m, n) \in 2^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \varphi(\sigma, m, n)\right\}.$$

令 $\theta(y)$ 记以下 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$-公式

$$\exists \sigma, w\big(\mathrm{len}(\sigma) \leq \mathrm{len}(b) \wedge \forall i < \mathrm{len}(\sigma)(\sigma(i) = (b)_i) \wedge \\ \forall i < \mathrm{len}(y), j < 2((y)_i = j \leftrightarrow \varphi(\sigma, i, j))\big).$$

则对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$M \models \exists y(\mathrm{len}(y) = n \wedge \theta(y)).$$

由溅出知, 存在 $a \in M - \mathbb{N}$ 使

$$M \models \theta(a),$$

当然 $\mathrm{len}(a) \notin \mathbb{N}$. 则

$$A = \{i \in \mathbb{N} : (a)_i = 1\} \in \mathrm{SSy}(M).$$

再设 $T \in \mathrm{SSy}(M)$ 是一棵无穷二叉树, $c \in M$ 编码了 T, 即

$$T = \{\sigma \in 2^{<\mathbb{N}} : (c)_\sigma = 1\}.$$

令 $\psi(\sigma, y)$ 记以下 Σ_1-公式

$$\begin{aligned}&\mathrm{len}(\sigma) = y \wedge (c)_\sigma = 1 \wedge \\ &\qquad \forall z < y, \rho < \sigma(\mathrm{len}(\rho) = z \wedge \forall w < z((\rho)_w = (\sigma)_w) \to (c)_\rho = 1).\end{aligned}$$

则对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$M \models \exists\sigma\ \psi(\sigma, n).$$

由溅出知, 存在 τ 使 $\ell = \mathrm{len}(\tau) \in M - \mathbb{N}$ 且 $M \models \psi(\tau, \ell)$. 令

$$p : \mathbb{N} \to 2, \quad p(n) = (\tau)_n.$$

则 $p \in \mathrm{SSy}(M) \cap [T]$. □

Scott 还证明上面定理的逆命题对可数 Scott 集成立.

定理 3.2.2 (Scott)**.** *可数的 Scott 集都是某个可数非标准模型 M 的 $\mathrm{SSy}(M)$.*

我们预设读者了解一阶逻辑语法元素的哥德尔数, 从而也了解如何将一个一阶理论等同于其元素的哥德尔数构成的自然数集合.

引理 3.2.3. *若 $\mathcal{S}$ 是 Scott 集, $\mathcal{L}'$ 是往 $\mathcal{L}_A$ 添加至多可数个常元符号所得的一阶语言, $\Gamma \in \mathcal{S}$ 是协调的 $\mathcal{L}'$-理论, 则存在 $M \models \Gamma$ 使 $\mathrm{Diag}_e(M) \in \mathcal{S}$.*

证明. 设 $\mathcal{L}''$ 是往 $\mathcal{L}'$ 添加可数个常元符号 d_n 所得的一阶语言. 按通常的方法赋予 $\mathcal{L}''$ 的非逻辑符号哥德尔数, 并设 $\ulcorner d_n \urcorner > n$. 我们将 $\mathcal{L}''$-公式的有穷集合等同于 $2^{<\mathbb{N}}$ 的元素. 记哥德尔数等于 n 的 $\mathcal{L}''$-公式为 φ_n, 故

$$\ulcorner \varphi_n \urcorner = n.$$

构造一棵 Γ-可计算的二叉树 T, 其元素等同于 $\mathcal{L}''$-闭公式的有穷集合. 对 $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$, 令

$$\Lambda(\sigma) = \{\psi : \sigma(\ulcorner \psi \urcorner) = 1\}.$$

令 $T_0 = \{\emptyset\}$. 设 T_s 是有穷二叉树. $\sigma \in T_s$ 是 T_s 的叶子, 当且仅当不存在 $\tau \in T_s$ 且 $\sigma \prec \tau$. 称 T_s 的叶子 σ 是 s-坏的, 当且仅当以下条件之一成立

- 存在 $\varphi \in \Gamma$, $\ulcorner\varphi\urcorner < |\sigma|$ 且 $\varphi \notin \Lambda(\sigma)$;
- 存在一个哥德尔数 $< s$ 的 $\Lambda(\sigma)$-推演序列且其最后一个公式为 $(0 = 1)$.

若 T_s 的叶子 σ 不是 s-坏的, 它就是 s-好的. 若 T_s 的叶子 σ 是 s-好的, 令

$$\ell(\sigma) = \begin{cases} \ulcorner\psi(x/d_{|\sigma|})\urcorner + 1 & s > 0 \text{ 且} \varphi_{s-1} = \exists x\psi \in \Lambda(\sigma) \\ |\sigma| + 1 & \text{否则.} \end{cases}$$

注意: 由于 $\ulcorner d_{|\sigma|}\urcorner > |\sigma|$, $d_{|\sigma|}$ 不会出现在 $\Lambda(\sigma)$ 中. 再令

$$\begin{aligned} &T_s(\sigma) = \{\tau \in 2^{\leq \ell(\sigma)} : \sigma \prec \tau, \\ &\text{若} s > 0 \text{ 且} \varphi_{s-1} = \exists x\psi \in \Lambda(\sigma) \text{ 且} \ulcorner\psi(x/d_{|\sigma|})\urcorner < |\tau| \text{ 则} \psi(x/d_{|\sigma|}) \in \Lambda(\tau)\}, \end{aligned}$$

定义

$$T_{s+1} = T_s \cup \bigcup \{T_s(\sigma) : \sigma \in T_s \text{ 是} s\text{-好的叶子}\}.$$

不难证明 $T = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} T_s$ 是 Γ-可计算的无穷二叉树, 从而 $T \in \mathcal{S}$. 由 $\mathcal{S}$ 是 Scott 集知, 存在 $p \in [T] \cap \mathcal{S}$. 由 T 的构造知,

$$\Lambda(p) = \{\varphi \in \mathcal{L}'' : p(\ulcorner\varphi\urcorner) = 1\}$$

是 p-可计算的 Γ 的扩张, 且是极大协调的并具有 Henkin 性质. 由 Henkin 构造知, 存在 $M \models \Lambda(p)$ 且 $\mathrm{Diag}_e(M) \leq_T \Lambda(p)$. □

证明定理 *3.2.2.* 设 $\mathcal{S} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是可数的 Scott 集.

PA 是可计算的一阶理论, 故

$$\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in \mathrm{PA}\} \in \mathcal{S}.$$

由引理 3.2.3 知, 存在 $M_0 \models \mathrm{PA}$ 且 $\mathrm{Diag}_e(M_0) \in \mathcal{S}$, 从而 $\mathrm{SSy}(M_0) \subseteq \mathcal{S}$.

设 $M_0 \prec \cdots \prec M_k$ 已定义且 $\mathrm{Diag}_e(M_k) \in \mathcal{S}$. 设 $\mathcal{L}'$ 是 $\mathcal{L}_A(M_k)$ 加入一个新常元符号 d 所得的语言, 令

$$\Gamma = \mathrm{Diag}_e(M_k) \cup \{(d)_n = 1 : n \in X_k\} \cup \{(d)_n = 0 : n \notin X_k\}.$$

则 Γ 是协调的且 Γ 是 $\mathrm{Diag}_e(M_k) \oplus X_k$-可计算的, 从而 $\Gamma \in \mathcal{S}$. 由引理 3.2.3 知, 有 $M_{k+1} \models \Gamma$ 且 $\mathrm{Diag}_e(M_{k+1}) \in \mathcal{S}$. 由 $\mathrm{Diag}_e(M_k) \subset \mathrm{Diag}_e(M_{k+1})$ 知, $M_k \prec M_{k+1}$.

最后, 令 $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$, 则 M 符合要求. □

3.3 Friedman 嵌入定理

设 M 是模型, $\vec{a} = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in M^n$, 一个 M 上的 $(m, \vec{a})$-型 p 是 **可计算的**, 当且仅当

$$\{\varphi(\vec{x}, \vec{y}) : \varphi(\vec{x}, \vec{a}) \in p\}$$

是可计算的 (这里将公式 $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ 等同于其哥德尔数). 称 M 是 **可计算地饱和的**或 **递归地饱和的** (computably saturated, recursively saturated), 当且仅当任意可计算的 $(m, \vec{a})$-型 p 都可在 M 中实现, 即存在 $\vec{b} \in M^m$ 使得 $\vec{b} \models p$.

命题 3.3.1. *任意 M 都有初等扩张 N 使得 $|M| = |N|$ 且 N 是可计算地饱和的.*

命题 3.3.2. *设 $M \models \mathrm{PA}^-$ 是可计算地饱和的.*

(1) M 是非标准模型;

(2) 任意 $a \in M$ 和 $\vec{b} = (b_0, \dots, b_{n-1}) \in M^n$, 存在 $c \in M$ 编码 $\mathrm{tp}^M(a/\vec{b})$, 即

$$\{i \in \mathbb{N} : (c)_i = 1\} = \{\ulcorner \varphi \urcorner : M \models \varphi(a, \vec{b})\};$$

(3) 若 $\vec{b} = (b_0, \dots, b_{n-1}) \in M^n$, p 是 M 上的 $(m, \vec{b})$-型且

$$\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi(\vec{x}, \vec{b}) \in p\} \in \mathrm{SSy}(M),$$

则 p 在 M 中被实现, 即有 $\vec{a} \in M^m$ 满足 p.

证明. 习题. □

定理 3.2.2 可以加强为以下结论, 只需略微修改其证明.

定理 3.3.3. *可数的 Scott 集都是某个可数且可计算地饱和的非标准模型 M 的 $\mathrm{SSy}(M)$.*

证明. 习题. □

定理 3.3.4 (Friedman)**.** *设 M 和 N 都是可计算地饱和的 PA-模型, M 是可数的且 $M \equiv N$. 则*

(1) $\mathrm{SSy}(M) \subseteq \mathrm{SSy}(N)$ 当且仅当 $M \preceq N$;

(2) 若 N 也是可数的, 则 $\mathrm{SSy}(M)=\mathrm{SSy}(N)$ *当且仅当* $M\cong N$.

证明. 这里只证明 (1). 显然, 当 $M\preceq N$ 时, $\mathrm{SSy}(M)\subseteq\mathrm{SSy}(N)$.

下面设 $\mathrm{SSy}(M)\subseteq\mathrm{SSy}(N)$, 并且设

$$M=\{a_n:n\in\mathbb{N}\}.$$

对 $\vec{a}=(a_0,\ldots,a_{n-1})$, $\mathcal{L}_A(\vec{a})$ 是往 $\mathcal{L}_A$ 添加新常元符号 $a_0,\ldots,a_{n-1}$ 所得的语言, $(M;\vec{a})$ 记 M 自然地膨胀所得的 $\mathcal{L}_A(\vec{a})$-模型; 同理可对 $\vec{b}=(b_0,\ldots,b_{n-1})\in N^n$ 定义 $(N;\vec{b})$. 当 $n=0$ 时, $\vec{a}=\vec{b}=\emptyset$, $(M;\vec{a})=M$, $(N;\vec{b})=N$.

由前提知, $(M;\emptyset)\equiv(N;\emptyset)$. 设 $\vec{a}=(a_0,\ldots,a_{n-1})\in M^n$, $\vec{b}=(b_0,\ldots,b_{n-1})\in N^n$, 且 $(M;\vec{a})\equiv(N;\vec{b})$. 由命题 3.3.2 知,

$$X=\{\ulcorner\varphi\urcorner:M\models\varphi(a_n,\vec{a})\}\in\mathrm{SSy}(M);$$

由 $\mathrm{SSy}(M)\subseteq\mathrm{SSy}(N)$ 知, 存在 $c\in N$ 编码 X; 又由 $(M;\vec{a})\equiv(N;\vec{b})$ 知,

$$p=\{\varphi(x,\vec{b}):M\models\varphi(x,\vec{a})\}=\{\varphi(x,\vec{b}):\ulcorner\varphi\urcorner\in X\}$$

是 N 上的型; 故由命题 3.3.2 知, 存在 $b_n\in N$ 满足 p. 从而

$$(M;a_0,\ldots,a_{n-1},a_n)\equiv(N;b_0,\ldots,b_{n-1},b_n).$$

如此便可找到 $b_0,b_1,\ldots$ 使得 $a_n\mapsto b_n$ 是一个从 M 到 N 的初等嵌入. □

3.4 不可数的 Scott 集

定理 3.4.1 (Knight, Nadel)**.** *任意基数* $\leq\aleph_1$ *的 Scott 集都是某个* M *的* $\mathrm{SSy}(M)$.

Knight-Nadel 定理有若干已知的证明, 其中一个比较新的证明要用可计算饱和性质和 Friedman 嵌入定理.

证明. 这是 Dolich 等 [2] 给出的证明.

设 $\mathcal{S}$ 是 Scott 集且 $|\mathcal{S}|=\aleph_1$. 类似引理 3.2.3 的证明, 取 PA 的完备化 Γ (即 $\mathrm{PA}\subset\Gamma$ 且 Γ 是极大协调的 $\mathcal{L}_A$-理论), 使 $\Gamma\in\mathcal{S}$. 再取一族 $(\mathcal{S}_\alpha:\alpha<\aleph_1)$ 使得

- $\Gamma\in\mathcal{S}_0$;

- 每个 $\mathcal{S}_\alpha$ 都是可数的;
- 当 $\alpha < \beta < \aleph_1$ 时 $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{S}_\beta$;
- $\bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}$.

由定理 3.3.3, 取可数的、可计算地饱和的 $M_\alpha \models \Gamma$ 使 $\mathrm{SSy}(M_\alpha) = \mathcal{S}_\alpha$. 由 Friedman 嵌入定理, 当 $\alpha < \beta < \aleph_1$ 时, 存在初等嵌入 $f_{\alpha\beta} : M_\alpha \to M_\beta$. 我们还可以保证, 当 $\alpha < \beta < \gamma < \aleph_1$ 时,

$$f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}.$$

如此, 当 $\alpha < \beta < \aleph_1$ 时, 便可将 M_α 等同于 M_β 的子模型, $f_{\alpha\beta}$ 等同于包含映射. 这时

$$M = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} M_\alpha$$

就是满足结论的模型. □

还有一种方法是利用 Ehrenfeucht 引理.

引理 3.4.2 (Ehrenfeucht)**.** *设 $\mathcal{S}$ 是 Scott 集, $X \in \mathcal{S}$, $M \models \mathrm{PA}$ 是可数的且 $\mathrm{SSy}(M) \subseteq \mathcal{S}$, 则存在 M 的初等扩张 N 使 $X \in \mathrm{SSy}(N) \subseteq \mathcal{S}$.*

容易看到, Nadel-Knight 定理是 Ehrenfeucht 引理的直接推论. Ehrenfeucht 引理也有几个不同的证明. 这里我们介绍一个比较直接的构造性证明.

证明 Ehrenfeucht 引理. 设 $\mathcal{S}, X, M$ 如引理所述. 取 $b \in M - \mathbb{N}$, 我们将构造一个以 b 为上界的 $q \in S_1^M$, 使得若 $N = M(c)$ 是 M 的 q-扩张, $\mathrm{tp}^N(c/M) = q$, 则 $X \in \mathrm{SSy}(N) \subseteq \mathcal{S}$; 为此我们要保证, 若 $f : b \to M$ 是 M-有穷的, 则

$$\{i \in \mathbb{N} : (f(c))_i = 1\} \in \mathcal{S}.$$

列举所有的 M-有穷 $f : b \to M$ 如下

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$$

不妨设 $f_0 : b \to b$ 是恒等函数.

首先, 令

$$p = \{x < b\} \cup \{(x)_i = X(i) : i \in \mathbb{N}\} =$$

则 p 是 M-上的 1-型, 且若 $N = M(c)$ 而 $c \models p$, 则

$$X = \{i \in \mathbb{N} : (c)_i = 1\} \in \mathrm{SSy}(N).$$

引入一个临时记号: 设 $0 < k \in \mathbb{N}$, 令

$$\left[2^{<\mathbb{N}}\right]^k = \{(\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}) \in (2^{<\mathbb{N}})^k : |\sigma_0| = \ldots = |\sigma_{k-1}|\}.$$

再令

$$T_0 = \left\{(\sigma_0, \sigma_1) \in \left[2^{<\mathbb{N}}\right]^2 : M \models \exists x < b \forall i < \mathrm{len}(\sigma_0)\big((x)_i = \sigma_0(i) \wedge (f_0(x))_i = \sigma_1(i)\big)\right\}.$$

则 $T_0 \in \mathrm{SSy}(M)$ 是一棵无穷 4-叉树; $X \oplus T_0$ 可计算一棵无穷二叉树

$$T_0^X = \{\sigma_1 \in 2^{<\mathbb{N}} : \text{ 存在}\sigma_0 \text{ 使得}\sigma_0 \prec X \text{ 且}(\sigma_0, \sigma_1) \in T_0\}.$$

故 $T_0^X \in \mathcal{S}$, 从而有 $X_0 \in \mathcal{S} \cap [T_0^X]$. 令

$$p_0 = p \cup \{(f_0(x))_i = X_0(i) : i \in \mathbb{N}\},$$

则 p_0 是 M 上的 1-型. 若 $N = M(c)$ 且 $c \models p_0$ 则

$$X = \{i \in \mathbb{N} : (c)_i = 1\}, X_0 = \{i \in \mathbb{N} : (f_0(c))_i = 1\} \in \mathrm{SSy}(N) \cap \mathcal{S}.$$

设已定义 $X_0, \ldots, X_{k-1} \in \mathcal{S}$ 使得

$$p_{k-1} = p \cup \bigcup_{j<k} \{(f_j(x))_i = X_j(i) : i \in \mathbb{N}\}$$

是 M 上的 1-型. 令

$$T_k = \left\{\vec{\sigma} \in \left[2^{<\mathbb{N}}\right]^{k+2} : M \models \exists x < b \forall i < \mathrm{len}(\sigma_0)\big((x)_i = \sigma_0(i) \wedge \bigwedge_{j<k+1} (f_j(x))_i = \sigma_{j+1}(i)\big)\right\}.$$

则 $T_k \in \mathrm{SSy}(M)$. $X \oplus \bigoplus_{j<k} X_j \oplus T_k$ 可计算一棵无穷二叉树

$$T_k^{X \oplus \bigoplus_{j<k} X_j} = \{\sigma_{k+1} \in 2^{<\mathbb{N}} : \text{ 存在}\sigma_0, \ldots, \sigma_k \text{ 使得}\sigma_0 \prec X, \sigma_{j+1} \prec X_j (j < k), \vec{\sigma} \in T_k\}.$$

故有 $X_k \in \mathcal{S}$ 是 $T_k^{X \oplus \bigoplus_{j<k} X_j}$ 的无穷分支. 令

$$p_k = p_{k-1} \cup \{(f_k(x))_i = X_k(i) : i \in \mathbb{N}\}.$$

最后, 令 q 是 $\bigcup_k p_k$ 的一个完全扩张. □

问题 3.4.3. *是否任意 Scott 集都是某个算术模型的标准系统?*

第四章　PA 的片段

在这一章中, n 总是指某个标准自然数.

这一章将需要一个略微精细的 Tarski 判别准则.

定理 4.0.1 (Tarski 判别准则)**.** *设 Γ 是一个对子公式封闭的公式集合 (即任意 $\varphi \in \Gamma$, φ 的任意子公式也属于 Γ), M 是 N 的子模型, 则以下两个命题等价*

(1) $M \preceq_\Gamma N$;

(2) 任意 $\varphi(x, \vec{y}) \in \Gamma$ 和 $\vec{a} \in M^{|\vec{y}|}$, 若 $\varphi(N, \vec{a})$ 非空则 $\varphi(N, \vec{a}) \cap M$ 非空.

算术层次中的 Σ_n, Π_n 都是对子公式封闭的公式集合.

4.1　算术化一阶算术

读者应该已经通过哥德尔不完全性定理的证明了解如何编码 $\mathcal{L}_A$ 的语法元素. 我们指定 $\mathcal{L}_A$ 基本符号的哥德尔数如下:

$$\begin{aligned}&\ulcorner(\urcorner = 0,\ \ulcorner)\urcorner = 1,\ \ulcorner\neg\urcorner = 2,\ \ulcorner\wedge\urcorner = 3,\ \ulcorner\vee\urcorner = 4,\ \ulcorner\rightarrow\urcorner = 5,\\ &\qquad\ulcorner\forall\urcorner = 6,\ \ulcorner\exists\urcorner = 7,\ \ulcorner=\urcorner = 8,\ \ulcorner+\urcorner = 9,\ \ulcorner\times\urcorner = 10,\ \ulcorner<\urcorner = 11,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\ulcorner 0\urcorner = 12,\ \ulcorner 1\urcorner = 13,\ \ulcorner x_i\urcorner = \langle 14, i\rangle.\end{aligned}$$

由 $\mathcal{L}_A$ 基本符号构成的有穷串 s (称为 $\mathcal{L}_A$-符号串) 是一个定义域为某个自然数 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 的函数, 这样就可以定义 s 的哥德尔数为

$$\ulcorner s\urcorner = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\langle i, \ulcorner s(i)\urcorner\rangle} + 2^{m+1},$$

其中 $m = \max\{\langle i, \ulcorner s(i)\urcorner\rangle : i < n\}$.

令 $\mathrm{Var}(x)$ 记以下 $\Sigma_0(I\Sigma_0)$ 公式

$$\exists x_i < x(x = \langle 14, x_i\rangle),$$

令 $\mathrm{TermAdd}(x,y,z)$ 记以下 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$ 公式

$$\begin{aligned}\exists x_n < x, y_n < y\Big(&\mathrm{Func}(x,x_n)\wedge \mathrm{Func}(y,y_n)\wedge \mathrm{Func}(z,x_n+y_n+3)\wedge\\ &\forall u < x_n(x(u)=z(u))\wedge \forall u<y_n(y(u)=z(x_n+u))\wedge\\ &z(0)=0\wedge z(x_n+1)=9\wedge z(x_n+y_n+2)=1\Big).\end{aligned}$$

$\mathrm{TermAdd}(x,y,z)$ 的直观含义是在 x, y 编码的符号串中间插入 $+$、两边加上括号得到 z 所编码的符号串. 类似可定义 $\mathrm{TermMul}(x,y,z)$.

令 $\mathrm{TermAtm}(x,y)$ 记以下 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$ 公式

$$\mathrm{Func}(x,1)\wedge x(0)=y\wedge(y=\ulcorner 0\urcorner \vee y=\ulcorner 1\urcorner\vee \mathrm{Var}(y)),$$

令 $\mathrm{Tseq}(x,x_s,y)$ 记以下 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$ 公式

$$\begin{aligned}&(x=0\vee x\neq \mathrm{len}(x_s)\to y=1)\wedge\\ &\Big(x>0\wedge x=\mathrm{len}(x_s)\to \exists z<2\Big(y=x_s-2^x+z2^x+2^{x+1}\wedge\\ &\big(z=1\leftrightarrow \exists w<x\,\mathrm{TermAtm}(x,w)\vee\\ &\exists u<x, v<x\big((x_s)_u=1\wedge (x_s)_v=1\wedge(\mathrm{TermAdd}(u,v,x)\vee \mathrm{TermMul}(u,v,x))\big)\big)\Big)\Big).\end{aligned}$$

则 $I\Sigma_1$ 可证明 $\mathrm{Tseq}(x,x_s,y)$ 定义了一个二元函数, 记为 $H_{\mathrm{Tseq}}(x,x_s)=y$. 由递归定理知, 存在 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$-公式定义一个满足以下条件的一元函数 $\mathrm{Termseq}(x)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Termseq}(0)&=1,\\ \mathrm{Termseq}(x+1)&=H_{\mathrm{Tseq}}(x,\mathrm{Termseq}(x)).\end{aligned}$$

$y=\mathrm{Termseq}(x+1)$ 的直观含义是: y 的二进制展开形式编码了一个长度为 $x+1$ 的 01-序列, 其第 i-位 $(y)_i=1$ 当且仅当 i 是一个项的哥德尔数.

再令 $\mathrm{Term}(x)$ 记以下公式

$$\exists y(y=\mathrm{Termseq}(x+1)\wedge (y)_x=1).$$

可以证明 $\mathrm{Term}(x)$ 是 $\Delta_1(I\Sigma_1)$-公式; 且对 $n\in\mathbb{N}$, n 是一个 $\mathcal{L}_A$-项的哥德尔数, 当且仅当 $\mathbb{N}\models \mathrm{Term}(n)$.

命题 4.1.1. *设 $M \models I\Sigma_1$, $n \in \mathbb{N}$.*

(1) n 是一个 $\mathcal{L}_A$-项的哥德尔数, 当且仅当 $M \models \mathrm{Term}(n)$.

(2) 算术化的项唯一可读性在 M 中成立, 即 M 满足以下公式的全称概括

$$\begin{aligned}&\mathrm{Term}(x) \to \mathrm{TermAtm}(x) \vee \\ &\qquad \exists! x_0 < x, x_1 < x\big(\mathrm{Term}(x_0) \wedge \mathrm{Term}(x_1) \wedge \\ &\qquad\qquad (\mathrm{TermAdd}(x_0, x_1, x) \vee \mathrm{TermMul}(x_0, x_1, x))\big).\end{aligned}$$

以下我们将采用不那么形式化的方法讨论一阶算术中其它语法、语义概念的算术化.

令 $y = \mathrm{Vseq}(x, x_A, x_s)$ 记满足以下条件的 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$-函数

- 若 $x = 0$ 或 $\neg\,\mathrm{Term}(x)$ 或 x_A 不编码一个函数或 x_s 不编码一个以 x (即所有小于 $x-1$ 的 "自然数") 为定义域的函数, 则 $y = 1$ (编码了空串);
- 若 $x > 0$, $\mathrm{Term}(x-1)$ 且 x_s 编码一个以 $x-1$ 为定义域的函数, 则 y 编码一个以 x 为定义域的函数且满足下面条件
  - 任意 $u < x-1$, $y(u) = x_s(u)$;
  - 若 $x-1$ 是常元项 0 的哥德尔数, 则 $y(x-1) = 1$;
  - 若 $x-1$ 是常元项 1 的哥德尔数, 则 $y(x-1) = 2$;
  - 若 $x-1$ 是变元项 x_i 的哥德尔数且 $\ulcorner x_i \urcorner = \langle 14, i\rangle$ 在 x_A (编码的函数的) 定义域中, 则 $y(x-1) = x_A(\langle 14, i\rangle) + 1$;
  - 若存在 $u < x-1, v < x-1$, $\mathrm{Term}(u) \wedge \mathrm{Term}(v) \wedge \mathrm{TermAdd}(u, v, x-1)$, 且 $x_s(u) > 0$, $x_s(v) > 0$ 则 $y(x-1) = x_s(u) + x_s(v) - 1$;
  - 若存在 $u < x-1, v < x-1$, $\mathrm{Term}(u) \wedge \mathrm{Term}(v) \wedge \mathrm{TermMul}(u, v, x-1)$, 且 $x_s(u) > 0$, $x_s(v) > 0$ 则 $y(x-1) = (x_s(u)-1) \times (x_s(v)-1) + 1$;
  - 若以上情况都不成立, 则 $y(x-1) = 0$.

由递归定理知, 存在 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$ 可定义函数 $y = \mathrm{Valseq}(x, x_A)$ 满足以下递归定义

$$\begin{aligned}\mathrm{Valseq}(0, x_A) &= 1,\\ \mathrm{Valseq}(x+1, x_A) &= \mathrm{Vseq}(x+1, x_A, \mathrm{Valseq}(x, x_A)).\end{aligned}$$

$y = \mathrm{Valseq}(x, x_A)$ 的直观含义是: 若 x_A 编码一个 “有穷” 指派 (即定义域是 “有穷” 多个变元符号的指派), 则 y 编码了所有哥德尔数 $< x$ 的项在此指派下的取值 $+1$; 若某个 $u < x$ 不是项的哥德尔数或其编码的项包含不在 x_A 定义域中的变元符号, 则 $y(u) = 0$.

再令 $\mathrm{Val}(x_t, x_A, x_v)$ 记以下 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$ 公式

$$\exists y(y = \mathrm{Valseq}(x_t + 1, x_A) \wedge x_v = y(x_t)).$$

命题 4.1.2. *(1) $I\Sigma_1 \vdash \forall x_t, x_A \exists! x_v \, \mathrm{Val}(x_t, x_A, x_v)$, 即 Val 定义了一个 Δ_1-二元函数.*

(2) 设 $M \models I\Sigma_1$, t 是一个 $\mathcal{L}_A$-项, σ 是一个定义域包含 t 中所有变元符号的有穷 M-指派, $b = t^{M,\sigma}$. 再设 $\ulcorner t \urcorner$ 是 t 的哥德尔数, $f \in M$ 是 M-有穷函数且任意变元符号 $x_i \in \mathrm{dom}\,\sigma$, $f(\ulcorner x_i \urcorner) = \sigma(x_i)$. 则

$$M \models \mathrm{Val}(\ulcorner t \urcorner, f, b+1).$$

证明. 习题. □

类似项概念的算术化, 我们有 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$ 公式: $\mathrm{FmlEq}(x,y,z)$, $\mathrm{FmlLess}(x,y,z)$, $\mathrm{FmlNeg}(x,y)$, $\mathrm{FmlCnj}(x,y,z)$, $\mathrm{FmlDsj}(x,y,z)$, $\mathrm{FmlImp}(x,y,z)$, $\mathrm{FmlBU}(u,v,x,y)$, $\mathrm{FmlBE}(u,v,x,y)$, $\mathrm{FmlU}(x,y,z)$, $\mathrm{FmlE}(x,y,z)$. 并且, 若 $M \models I\Sigma_1$, 则对 $\mathcal{L}_A$-项 t_0 和 t_1,

- $M \models \mathrm{FmlEq}(\ulcorner t_0 \urcorner, \ulcorner t_1 \urcorner, a)$, 当且仅当 $a = \ulcorner (t_0 = t_1) \urcorner$;
- $M \models \mathrm{FmlLess}(\ulcorner t_0 \urcorner, \ulcorner t_1 \urcorner, a)$, 当且仅当 $a = \ulcorner (t_0 < t_1) \urcorner$;

对 $\mathcal{L}_A$-公式 φ, ψ 和变元符号 x_i, x_j, 对 M 中 $a = \ulcorner \varphi \urcorner$, $b = \ulcorner \psi \urcorner$,

- $M \models \mathrm{FmlNeg}(a, c)$ 当且仅当 $c = \ulcorner (\neg \varphi) \urcorner$;
- $M \models \mathrm{FmlCnj}(a, b, c)$ 当且仅当 $c = \ulcorner (\varphi \wedge \psi) \urcorner$;
- $M \models \mathrm{FmlDsj}(a, b, c)$ 当且仅当 $c = \ulcorner (\varphi \vee \psi) \urcorner$;
- $M \models \mathrm{FmlImp}(a, b, c)$ 当且仅当 $c = \ulcorner (\varphi \to \psi) \urcorner$;
- $M \models \mathrm{FmlBU}(\ulcorner x_i \urcorner, \ulcorner x_j \urcorner, a, c)$ 当且仅当 $c = \ulcorner (\forall x_i < x_j \varphi) \urcorner$;
- $M \models \mathrm{FmlBE}(\ulcorner x_i \urcorner, \ulcorner x_j \urcorner, a, c)$ 当且仅当 $c = \ulcorner (\exists x_i < x_j \varphi) \urcorner$;

- $M \models \mathrm{FmlU}(\ulcorner x_i \urcorner, a, c)$ 当且仅当 $c = \ulcorner(\forall x_i \varphi)\urcorner$;
- $M \models \mathrm{FmlE}(\ulcorner x_i \urcorner, a, c)$ 当且仅当 $c = \ulcorner(\exists x_i \varphi)\urcorner$.

我们还可以构造 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$-函数 $x_s = \mathrm{Fmlseq}(x)$ 使得: 任意 $M \models I\Sigma_1$, $M \models s = \mathrm{Fmlseq}(a)$ 当且仅当

- s 编码一个长度为 a 的 M-有穷 01-序列;
- 对任意 $i < a$, $(s)_i = 1$ 当且仅当以下条件之一成立
  - 存在 $b < i, c < i$ 使
    $$M \models \mathrm{Term}(b) \wedge \mathrm{Term}(c) \wedge (\mathrm{FmlEq}(b, c, i) \vee \mathrm{FmlLess}(b, c, i));$$
  - 存在 $j < i$ 使 $M \models (s)_j = 1 \wedge \mathrm{FmlNeg}(j, i)$;
  - 存在 $j < i, k < i$ 使 $(s)_j = (s)_k = 1$ 且
    $$M \models \mathrm{FmlCnj}(j, i) \vee \mathrm{FmlDsj}(j, k, i) \vee \mathrm{FmlImp}(j, k, i);$$
  - 存在 $j < i, k < i, \ell < j$ 使 $(s)_\ell = 1$ 且
    $$M \models \mathrm{FmlBU}(\ulcorner x_j \urcorner, \ulcorner x_k \urcorner, \ell, i) \vee \mathrm{FmlBE}(\ulcorner x_j \urcorner, \ulcorner x_k \urcorner, \ell, i);$$
  - 存在 $j < i, \ell < j$ 使 $(s)_\ell = 1$ 且
    $$M \models \mathrm{FmlU}(\ulcorner x_j \urcorner, \ell, i) \vee \mathrm{FmlE}(\ulcorner x_j \urcorner, \ell, i).$$

令 $\mathrm{Fml}(x)$ 记以下 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$ 公式

$$\exists x_s(x_s = \mathrm{Fmlseq}(x+1) \wedge (x_s)_x = 1).$$

命题 4.1.3. $\mathrm{Fml} \in \Delta_1(I\Sigma_1)$, 且 $I\Sigma_1$ 可证明算术化的公式唯一可读性.

我们还可以构造一系列 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$ 公式 Fml_{Σ_n} 和 Fml_{Π_n}, 使得对任意 $\varphi \in \mathcal{L}_A$ 和 $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi \in \Sigma_n \;\Leftrightarrow\; I\Sigma_1 \vdash \mathrm{Fml}_{\Sigma_n}(\ulcorner \varphi \urcorner), \quad \varphi \in \Pi_n \;\Leftrightarrow\; I\Sigma_1 \vdash \mathrm{Fml}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

要算术化满足关系, 我们需要算术化对指派的一个操作. 令 $y = x_A(x_u|x_v)$ 记一个表达以下含义的 $\Sigma_0(I\Sigma_1)$ 公式

- x_A 和 y 编码两个定义域相同的函数, $y(x_u) = x_v$, 对定义域中的 $z \neq x_u$, $y(z) = x_A(z)$.

设 $M \models I\Sigma_1$ 且 $M \models f' = f(b|c)$, 则 f, f' 都是 M-有穷函数, 且

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & b \neq e \in \mathrm{dom}(f) \\ c & e = b \in \mathrm{dom}(f). \end{cases}$$

再设 $m \in M$, $f : m+1 \to m+1$ 是一个 M-有穷函数, 由于

$$2^{\langle 0,m\rangle} + \cdots + 2^{\langle m,m\rangle} + 2^{\langle m,m\rangle+1} < (m+3)2^{2m(m+1)} < 2^{2(m+2)^2},$$

M 中存在 $a < 2^{2(m+2)^2}$ 编码 f.

令 $y = \mathrm{Smatrix}_{\Sigma_0}(x, x_m, x_s)$ 记满足以下条件的 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$ 公式: 设 $M \models I\Sigma_1$ 且 $M \models s = \mathrm{Smatrix}_{\Sigma_0}(a, m, s')$, 若 s' 不编码一个以 $D' = \{\langle i, g\rangle : i < a, g \text{ 是} M\text{-有穷函数且其编码} < 2^{2(m+2)^2}\}$ 为定义域的 M-有穷函数, 则 $s = 1$ (编码空集). 若 s' 编码一个以 D' 为定义域的 M-有穷函数 f', 则 s 编码一个 M-有穷函数 f,

$$\mathrm{dom}\, f = D = \{\langle i, g\rangle : i \leq a, g \text{ 是} M\text{-有穷函数且其编码} < 2^{2(m+2)^2}\},$$

$f \restriction D' = f'$, 且对 $\langle a, g\rangle \in D$, $f(\langle a, g\rangle)$ 由以下规则确定

- 若 $M \models \neg\mathrm{Fml}_{\Sigma_0}(a)$ 则 $f(\langle a, g\rangle) = 2$;

- 若存在 $c_0 < a, c_1 < a$ 使 $M \models \mathrm{Term}(c_0) \wedge \mathrm{Term}(c_1)$ 且 $M \models \mathrm{FmlEq}(c_0, c_1, a)$, 则存在 d_0, d_1 使 $M \models \mathrm{Val}(c_i, g, d_i)$ $(i = 0, 1)$, 则

$$f(\langle a, g\rangle) = \begin{cases} 1 & d_0 = d_1 > 0 \\ 0 & d_0 > 0, d_1 > 0, d_0 \neq d_1 \\ 2 & \text{否则}; \end{cases}$$

- 若存在 $c_0 < a, c_1 < a$ 使 $M \models \mathrm{Term}(c_0) \wedge \mathrm{Term}(c_1)$ 且 $M \models \mathrm{FmlLess}(c_0, c_1, a)$, 则存在 d_0, d_1 使 $M \models \mathrm{Val}(c_i, g, d_i)$ $(i = 0, 1)$, 则

$$f(\langle a, g\rangle) = \begin{cases} 1 & d_1 > d_1 > 0 \\ 0 & d_0 \geq d_1 > 0 \\ 2 & \text{否则}; \end{cases}$$

- 若存在 $c < a$ 使 $M \models \mathrm{FmlNeg}(c, a)$, 则

$$f(\langle a, g\rangle) = \begin{cases} 1 - f'(\langle c, g\rangle) & f'(\langle c, g\rangle) < 2 \\ f'(\langle c, g\rangle) & f'(\langle c, g\rangle) \geq 2; \end{cases}$$

- 若存在 $c_0 < a, c_1 < a$ 使 $M \models \mathrm{FmlCnj}(c_0, c_1, a)$, 则

$$f(\langle a, g\rangle) = \begin{cases} 1 & f'(\langle c_0, g\rangle) = f'(\langle c_1, g\rangle) = 1 \\ 0 & f'(\langle c_0, g\rangle) = 0 \text{ 或} f'(\langle c_1, g\rangle) = 0 \\ 2 & \text{否则}; \end{cases}$$

- 若存在 $c_0 < a, c_1 < a$ 使 $M \models \mathrm{FmlDsj}(c_0, c_1, a)$, 则

$$f(\langle a, g\rangle) = \begin{cases} 1 & f'(\langle c_0, g\rangle) = 1 \text{ 或} f'(\langle c_1, g\rangle) = 1 \\ 0 & f'(\langle c_0, g\rangle) = f'(\langle c_1, g\rangle) = 0 \\ 2 & \text{否则}; \end{cases}$$

- 若存在 $c_0 < a, c_1 < a$ 使 $M \models \mathrm{FmlImp}(c_0, c_1, a)$, 则

$$f(\langle a, g\rangle) = \begin{cases} 1 & f'(\langle c_0, g\rangle) = 0 \text{ 或} f'(\langle c_1, g\rangle) = 1 \\ 0 & f'(\langle c_0, g\rangle) = 1 \text{ 且} f'(\langle c_1, g\rangle) = 0 \\ 2 & \text{否则}; \end{cases}$$

- 设存在 $c_0 < a, c_1 < a, a' < a$ 使 $M \models \mathrm{FmlBU}(c_0, c_1, a', a)$, 若 $c_1 \notin \operatorname{dom} g$ 则 $f(\langle a, g\rangle) = 2$, 若 $c_1 \in \operatorname{dom} g$ 则 $f(\langle a, g\rangle) < 2$, 且

$$\begin{aligned} &M \models f(\langle a, g\rangle) = 1 \leftrightarrow \\ &\qquad \forall \langle a', g'\rangle \in D' \big(\exists y < g(c_1) g' = g(c_0|y) \to f'(\langle a', g'\rangle) = 1\big); \end{aligned}$$

- 设存在 $c_0 < a, c_1 < a, a' < a$ 使 $M \models \mathrm{FmlBE}(c_0, c_1, a', a)$, 若 $c_1 \notin \operatorname{dom} g$ 则 $f(\langle a, g\rangle) = 2$, 若 $c_1 \in \operatorname{dom} g$ 的定义域中则 $f(\langle a, g\rangle) < 2$, 且

$$\begin{aligned} &M \models f(\langle a, g\rangle) = 1 \leftrightarrow \\ &\qquad \exists \langle a', g'\rangle \in D' \big(\exists y < g(c_1) g' = g(c_0|y) \wedge f'(\langle a', b'\rangle) = 1\big). \end{aligned}$$

再取 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$ 公式 $x_s = \text{Satmatrix}_{\Sigma_0}(x, x_m)$ 使之定义一个满足以下递归条件的二元函数

$$\text{Satmatrix}_{\Sigma_0}(0, x_m) = 1,$$
$$\text{Satmatrix}_{\Sigma_0}(x+1, x_m) = \text{Smatrix}_{\Sigma_0}(x, x_m, \text{Satmatrix}_{\Sigma_0}(x, x_m)).$$

令 $\text{Sat}_{\Sigma_0}(x, x_A)$ 记以下 $\Sigma_1(I\Sigma_1)$ 公式

$$\text{Fml}_{\Sigma_0}(x) \wedge \exists x_m, x_s(x_s = \text{Satmatrix}_{\Sigma_0}(x, x_m) \wedge x_s(\langle x, x_A\rangle) = 1).$$

我们也用 Sat_{Π_0} 记 Sat_{Σ_0}.

为了方便使用 Sat_{Σ_0} 和后面的 Sat_{Σ_n} 等, 我们引入一点记号约定. 设 $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{L}_A$, $M \models I\Sigma_1$, $\vec{a} \in M^{|\vec{x}|}$, 我们将用 $\vec{a}$ 同时表示将 $\vec{x}$ 的各变元映射为 $\vec{a}$ 对应分量的 M-有穷指派 (的编码), 这样就可以采用如下记号

$$M \models \text{Sat}_{\Sigma_0}(\ulcorner\varphi\urcorner, \vec{a}).$$

当 $\vec{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, 我们将用 $[a_1, \ldots, a_n]$ 记上述意义上的 $\vec{a}$, 即一个将 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ 分别映射为 $a_1, \ldots, a_n$ 的有穷指派, 故我们也会采用如下记号

$$M \models \text{Sat}_{\Sigma_0}(\ulcorner\varphi\urcorner, [a_1, \ldots, a_n]).$$

命题 4.1.4. *(1)* $\text{Sat}_{\Sigma_0} \in \Delta_1(I\Sigma_1)$.

(2) 设 $M \models I\Sigma_1$, $\varphi(\vec{x})$ 是 Σ_0-公式, $\vec{a} \in M^{|\vec{x}|}$, 则

$$M \models \text{Sat}_{\Sigma_0}(\ulcorner\varphi\urcorner, \vec{a}) \;\Leftrightarrow\; M \models \varphi(\vec{a}).$$

我们可以递归地定义 $\text{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(x, x_A)$ 使之表达如下命题

- 存在定义域 $< x$、取值不大于 x 的函数 x_{fs} 使得 $x_{fs}(0)$ 是一个 Π_n-公式的哥德尔数, 每个 $x_{fs}(i+1)$ 编码一个由 $x_{fs}(i)$ 编码的公式加上存在量词所得的公式, $x_{fs}(x_n - 1) = x$,
- 同时存在一个函数 x_B, x_B 和 x_A 在 x 编码的公式的自由变元的哥德尔数上取值一致, 且 $\text{Sat}_{\Pi_n}(x_{fs}(0), x_B)$;

同时可递归地定义 $\text{Sat}_{\Pi_{n+1}}(x, x_A)$ 使之表达如下命题

- 存在定义域 $< x$、取值不大于 x 的函数 x_{fs} 使得 $x_{fs}(0)$ 是一个 Σ_n-公式的哥德尔数, 每个 $x_{fs}(i+1)$ 编码一个由 $x_{fs}(i)$ 编码的公式加上全称量词所得的公式, $x_{fs}(x_n - 1) = x$,

- 同时对任意函数 x_B, 若 x_B 和 x_A 在 x 编码的公式的自由变元的哥德尔数上取值一致且在 x 所编码的公式中出现的所有变元符号有定义, 则 $\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(x_{fs}(0), x_B)$.

注意: 当 x 指代 Σ_{n+1} 公式的哥德尔数时, 此公式可以由一个 Π_n 公式加若干次存在量词获得, 而加量词的次数当然小于公式的长度, 也就小于其哥德尔数, 而且此公式所有子公式的哥德尔数总是小于 x, 故这时存在 x_{fs} 指代的 "有穷函数"; 而上述约束条件又保证 "存在如此的 x_{fs}" 接近一个有界量词.

命题 4.1.5. 设 $n > 0$, $M \models I\Sigma_1$, $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{L}_A$, $\vec{a} \in M^{|\vec{x}|}$.

(1) $\mathrm{Sat}_{\Sigma_n} \in \Sigma_n(I\Sigma_1)$, $\mathrm{Sat}_{\Pi_n} \in \Pi_n(I\Sigma_1)$.

(2) *若* $\varphi(\vec{x})$ *是* Σ_n*-公式, 则*

$$M \models \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(\ulcorner\varphi\urcorner, \vec{a}) \;\Leftrightarrow\; M \models \varphi(\vec{a}).$$

(3) *若* $\varphi(\vec{x})$ *是* Π_n*-公式, 则*

$$M \models \mathrm{Sat}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi\urcorner, \vec{a}) \;\Leftrightarrow\; M \models \varphi(\vec{a}).$$

Sat_{Σ_n} 让我们看到算术分层是严格的.

定理 4.1.6 (Kleene)**.** *(1)* $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(\mathbb{N}) \notin \Sigma_n(\mathbb{N}) \cup \Pi_n(\mathbb{N})$, $\mathrm{Sat}_{\Pi_{n+1}}(\mathbb{N}) \notin \Sigma_n(\mathbb{N}) \cup \Pi_n(\mathbb{N})$*;*

(2) $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}} \notin \Sigma_n(\mathrm{PA}) \cup \Pi_n(\mathrm{PA})$, $\mathrm{Sat}_{\Pi_{n+1}} \notin \Sigma_n(\mathrm{PA}) \cup \Pi_n(\mathrm{PA})$.

证明. (1) 假设 $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}} \in \Sigma_n(\mathrm{PA})$, 则在 $\mathbb{N}$ 中可定义如下 Σ_{n+1}-子集

$$X = \{i \in \mathbb{N}:\ \text{存在}\varphi(x) \in \Sigma_{n+1}\ \text{使得} i = \ulcorner\varphi\urcorner,\ \mathbb{N} \models \neg\,\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(i, [i])\}.$$

设 $\theta(x) \in \Sigma_{n+1}$ 使 $X = \theta(\mathbb{N})$, 再设 $e = \ulcorner\theta\urcorner$. 则

$$\mathbb{N} \models \theta(e) \Leftrightarrow e \in X \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \neg\,\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(e, [e]) \Leftrightarrow \mathbb{N} \not\models \theta(e),$$

此矛盾说明 $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}} \notin \Sigma_n(\mathrm{PA})$.

类似可证明 (1) 的其它结论.

(2) 是 (1) 的简单推论. □

我们还可以得到 Tarski 关于“真”不可以定义的结论.

定理 4.1.7 (Tarski)**.** *$\{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in \mathcal{L}_A$ 是闭公式, $\mathbb{N} \models \varphi\}$ 不是 $\mathbb{N}$-上可定义的.*

最后, 需要注意一阶算术算术化中的一点微妙之处. 设 $M \models I\Sigma_1$, $a \in M$ 且 $M \models \mathrm{Term}(a)$.

- 若 $a \in \mathbb{N}$, 这时存在 $\mathcal{L}_A$-项 t 使 $a = \ulcorner t \urcorner$;
- 若 $a \notin \mathbb{N}$, 这时 M “认为” a 是某个“项”的哥德尔数, 但在我们看来, 此“项”是一个非标准长度的序列、其中可能有非标准的变元符号, M 的“看法” ($M \models \mathrm{Term}(a)$) 没有“现实”意义.

类似地, 在一阶算术的算术化中, 通常我们只关心 (至少在本周的课上) 算术化所得的公式在“现实”的语法元素上应该有的语义如何, 比如满足关系的算术化得到 Sat_{Σ_n}, 我们只感兴趣

- 若 $\varphi(\vec{x})$ 是 Σ_n-公式, 则

$$M \models \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(\ulcorner\varphi\urcorner, \vec{a}) \;\Leftrightarrow\; M \models \varphi(\vec{a});$$

当 $c \in M - \mathbb{N}$ 时, $M \models \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(\ulcorner\varphi\urcorner, \vec{a})$ 没有实际意义.

4.2 受限可定义闭包

设 $M \models I\Sigma_1$, $A \subseteq M$, 称 M 的元素 b 是 $\Sigma_n^M(A)$ **可定义的**, 当且仅当存在 $\varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_n$ 和 $\vec{a} \in A^{|\vec{y}|}$ 使得 $\{b\} = \varphi(M, \vec{a})$, 即

$$M \models \varphi(b, \vec{a}) \wedge \exists! x \varphi(x, \vec{a}).$$

M-中 A **的 Σ_n-可定义闭包**是以下集合

$$K_n^M(A) = \mathrm{dcl}_{\Sigma_n}^M(A) = \{b \in M : b \text{ 是} \Sigma_n(A) \text{ 可定义的}\}.$$

一个 $\mathcal{L}_A(A)$-公式 $\varphi(\vec{x}, y)$ 定义了一个 M-上的 **部分函数**, 当且仅当

$$M \models \forall \vec{x}, y, y'(\varphi(\vec{x}, y) \wedge \varphi(\vec{x}, y') \rightarrow y = y').$$

这时可记

$$F :\subseteq M^{|\vec{x}|} \rightarrow M, \quad F(\vec{b}) = c \;\Leftrightarrow\; M \models \varphi(\vec{b}, c),$$

F 的定义域为

$$\operatorname{dom} F = \{\vec{b} \in M^{|\vec{x}|} : M \models \exists y \varphi(\vec{b}, y)\}.$$

当 $\varphi \in \Sigma_n(A)$ 时, 称 F 为一个 $\Sigma_n^M(A)$**-部分函数**或 $\Sigma_n(A)$**-部分函数** (当如此省略不会引起歧义时); 同理可定义 $\Pi_n(A)$-部分函数. Σ_n-部分函数指 $\Sigma_n(\emptyset)$-部分函数, 等等.

若 F 是 Σ_n^M-部分 k-元函数且 $\operatorname{dom} F = M^k$, 则 F 是 Σ_n^M**-全函数**. 当然部分函数和全函数都是一般意义上的函数, 引入部分函数的概念只是为了区分函数的定义域是否整个 M^k. 当 $n > 0$ 时, Σ_n-部分函数的复合还是 Σ_n-部分函数.

下面我们将常常用到一类特殊的 Σ_{n+1}-部分函数. 设 $M \models I\Sigma_n$, $\varphi(x, \vec{y}) \in \Sigma_n$ 或 Π_n. 由 $I\Sigma_n \vdash L\Sigma_n$ 和 $I\Sigma_n \vdash L\Pi_n$ 知, 可定义 M 上的部分函数如下

$$\mathrm{Sk}_\varphi^M : M^{|\vec{y}|} \to M, \quad \mathrm{Sk}_\varphi^M(\vec{a}) = \min \varphi(M, \vec{a}).$$

则 $b = \mathrm{Sk}_\varphi^M(\vec{a})$ 当且仅当

$$M \models \varphi(b, \vec{a}) \wedge \forall x < b\ \neg\varphi(x, \vec{a}).$$

故 Sk_φ^M 是 Σ_{n+1}^M-部分函数, 且

$$\operatorname{dom} \mathrm{Sk}_\varphi^M = \{\vec{a} : \varphi(M, \vec{a}) \neq \emptyset\}.$$

暂且称 Sk_φ^M 为 M 上 φ 的 **标准 Skolem 函数**, 当不会引起误解时记之为 Sk_φ.

命题 4.2.1. 设 $A \subseteq M \models I\Sigma_n$, 则

$$\begin{aligned} K_{n+1}^M(A) &= \{F(\vec{a}) : F \text{ 是} \Sigma_{n+1}^M \text{ 部分函数且} \vec{a} \in \operatorname{dom} F \cap A^{|\vec{a}|}\} \\ &= \{\pi_1 \circ \mathrm{Sk}_\psi(\vec{a}) : \psi(\vec{x}, y) \in \Pi_n, \vec{a} \in A^{|\vec{x}|}\}. \end{aligned}$$

故 $K_{n+1}^M(A)$ 对 Σ_{n+1}^M-部分函数封闭, 即任意 $b_0, \ldots, b_{m-1} \in K_{n+1}^M(A)$ 和任意 Σ_{n+1}^M-部分函数 F, 若 $\vec{b} \in \operatorname{dom} F$ 则 $F(\vec{b}) \in K_{n+1}^M(A)$.

证明. 容易证明

$$\begin{aligned} K_{n+1}^M(A) &\supseteq \{F(\vec{a}) : F \text{ 是} \Sigma_{n+1}^M \text{ 部分函数且} \vec{a} \in \operatorname{dom} F \cap A^{|\vec{a}|}\} \\ &\supseteq \{\pi_1 \circ \mathrm{Sk}_\psi(\vec{a}) : \psi(\vec{x}, y) \in \Pi_n, \vec{a} \in A^{|\vec{x}|}\}. \end{aligned}$$

现在只要证明

$$K_{n+1}^M(A) \subseteq \{\pi_1 \circ \mathrm{Sk}_\psi(\vec{a}) : \psi(\vec{x}, y) \in \Pi_n, \vec{a} \in A^{|\vec{x}|}\}.$$

任取 $b \in K_{n+1}^M(A)$, 则有 $\varphi(\vec{x}, y) \in \Sigma_{n+1}$ 和 $\vec{a} \in A^{|\vec{x}|}$ 使 b 是 $\varphi(\vec{a}, M)$ 的唯一元素. 再设 $\psi(w, \vec{x}, y) \in \Pi_n$, $\varphi = \exists w\psi$. 令 $\theta(\vec{x}, u)$ 记以下 Π_n-公式

$$\exists w < u, y < u(u = \langle w, y\rangle \wedge \psi(w, \vec{x}, y)).$$

则

$$b = \pi_1 \circ \mathrm{Sk}_\theta(\vec{a}) \in \{\pi_1 \circ \mathrm{Sk}_\psi(\vec{a}) : \psi(\vec{x}, y) \in \Pi_n, \vec{a} \in A^{|\vec{x}|}\}.$$

□

定理 4.2.2. 设 $A \subseteq M \models I\Sigma_n$, 则 $K_{n+1}^M(A) \preceq_{\Sigma_{n+1}} M$.

证明. 注意 Σ_{n+1}-可定义闭包对 Cantor 配对封闭, 即: 若 $b_0, b_1 \in K_{n+1}^M(A)$, 则 $\langle b_0, b_1\rangle \in K_{n+1}^M(A)$. 根据推论 1.2.4 和 Tarski 判别准则, 只要证明: 若 $\varphi(x, y) \in \Sigma_{n+1}$, $b \in K_{n+1}^M(A)$ 且 $\varphi(M, b)$ 非空, 则 $\varphi(M, b) \cap K_{n+1}^M(A)$ 非空.

由 $b \in K_{n+1}^M(A)$ 知, 存在 Σ_{n+1}-部分 k-元函数 F 和 $\vec{a} \in A^k$ 和使 $b = F(\vec{a})$.

设 $\varphi(x, y) = \exists w\psi(w, x, y)$, $\psi \in \Pi_n$. 令 $\theta(u, y)$ 记以下 Π_n 公式

$$\exists w < u, x < u(u = \langle w, x\rangle \wedge \psi(w, x, y)).$$

由 $\varphi(M, b)$ 非空知, $b \in \mathrm{dom}\,\mathrm{Sk}_\theta$. 故存在

$$\langle c, d\rangle = \mathrm{Sk}_\theta(b) = \mathrm{Sk}_\theta \circ F(\vec{a}) \in K_{n+1}^M(A).$$

由 θ 的定义知 $d \in \varphi(M, b)$; 故

$$d = \pi_1 \circ \mathrm{Sk}_\theta \circ F(\vec{a}) \in K_{n+1}^M(A) \cap \varphi(M, b).$$

□

一阶理论 Γ 是 **可有穷公理化的**, 当且仅当存在有穷一阶理论 Δ 使得

$$\Gamma \vdash \Delta, \quad \Delta \vdash \Gamma.$$

定理 4.2.3 (Ryll-Nardzewski, 1952)**.** PA 不可有穷公理化.

证明. 假设存在有穷的 Γ 使得

$$\Gamma \vdash \mathrm{PA}, \quad \mathrm{PA} \vdash \Gamma.$$

取 $n > 0$ 使 $\Gamma \subset \Sigma_n$, 再取 PA 的非标准模型 M 和 $a \in M - \mathbb{N}$. 令

$$N = K_n^M(a).$$

由定理 4.2.2 知 $N \preceq_{\Sigma_n} M$. 由 $\mathrm{PA} \vdash \Gamma$, $M \models \mathrm{PA}$ 及 $\Gamma \subset \Sigma_n$ 知, $N \models \Gamma$. 再由 $\Gamma \vdash \mathrm{PA}$ 知, $N \models \mathrm{PA}$.

由 $N = K_n^M(a)$ 知, $a \in N - \mathbb{N}$, 且对任意 $b \in N$, 存在 $\varphi(x,y) \in \Sigma_n$ 使得

$$M \models \forall x(\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(\ulcorner\varphi\urcorner, [x,a]) \to x = b).$$

以上满足关系右边是 Π_n-公式, 由 $N \preceq_{\Sigma_n} M$ 知

$$N \models \forall x(\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(\ulcorner\varphi\urcorner, [x,a]) \to x = b).$$

注意 $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{N}$. 因此对任意 $c \in N - \mathbb{N}$,

$$N \models \forall z \exists w < c\ \forall x(\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(w, [x,a]) \to x = z).$$

由渗入知, 存在 $c \in \mathbb{N}$ 满足以上条件. 但这意味着 N 的元素都是由 $\leq c$ 个公式和 a 定义的, 故 $|N| \leq c$, 与 $N \models \mathrm{PA}$ 矛盾. □

由定理 4.2.2 可知, 当 $M \models I\Sigma_0$ 时, $K_n^M(A) \models \mathrm{PA}^-$; 而 Ryll-Nardzewski 定理的证明却告诉我们, 通常 $K_n^M(A) \not\models \mathrm{PA}$. 那么 $K_n^M(A)$ 能满足 PA 的哪些片段?

定理 4.2.4. 设 $A \subseteq M \models I\Sigma_n$. 则 $K_{n+1}^M(A) \models I\Sigma_n$.

证明. 不妨设 A 对配对函数封闭. 令 $N = K_{n+1}^M(A)$, 则由定理 4.2.2 知

$$N \preceq_{\Sigma_{n+1}} M.$$

任取 $b \in N$, 设 $\varphi(x,y) \in \Sigma_n$ 且 $\varphi(N,b) \neq \emptyset$. 则有 Σ_{n+1}^M-部分函数 F 及 $a \in A$ 使 $b = F(a)$, 且 $N \models \exists x \varphi(x,b)$. 故 $M \models \exists x \varphi(x,b)$. 由 $\varphi(M,b)$ 非空知, $b \in \mathrm{dom}\,\mathrm{Sk}_\varphi$, 故

$$d = \mathrm{Sk}_\varphi(b) = \mathrm{Sk}_\varphi \circ F(a) \in N.$$

由 Sk_φ 的定义知

$$M \models \varphi(d,b) \wedge \forall x < d\ \neg\varphi(x,b),$$

从而

$$N \models \varphi(d,b) \wedge \forall x < d\ \neg\varphi(x,b),$$

即 $d = \min\varphi(N,b)$. 这就证明 $N \models L\Sigma_n$, 故 $N \models I\Sigma_n$. □

定理 4.2.5 (Parsons)**.** 设 $n > 0$, $M \models I\Sigma_n$, $a \in M - \mathbb{N}$. 则 $K^M_{n+1}(a) \not\models B\Sigma_{n+1}$.

证明. 这里要用到 $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}$. 由 $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}} \in \Sigma_{n+1}(I\Sigma_1)$ 知, 存在 Π_n-公式 $\theta(w,x,y)$ 使得

$$I\Sigma_1 \vdash \forall x_f, y(\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(x_f,y) \leftrightarrow \exists w\theta(w,x_f,y)).$$

设 $N = K^M_{n+1}(a)$. 则任意 $b \in N$ 都有 Σ_{n+1}-公式 $\varphi(x,y)$ 使得 $\{b\} = \varphi(M,a)$. 故

$$M \models \exists u\ \theta(u,\ulcorner\varphi\urcorner,[b,a]) \wedge \forall u,v(\theta(u,\ulcorner\varphi\urcorner,[v,a]) \to v = b).$$

由定理 4.2.2 知, $N \preceq_{\Sigma_{n+1}} M$, 故

$$N \models \exists u\ \theta(u,\ulcorner\varphi\urcorner,[b,a]) \wedge \forall u,v(\theta(u,\ulcorner\varphi\urcorner,[v,a]) \to v = b).$$

令 $\psi(w,x_f,z)$ 记以下 $\mathcal{L}_A(a)$-公式

$$\begin{aligned} &w > a+1 \wedge \exists u < w\ \theta(u,x_f,[z,a])\wedge \\ &\qquad\qquad\qquad \forall u < w, v < w(\theta(u,x_f,[v,a]) \to v = z). \end{aligned}$$

则 $\psi \in \Sigma_{n+1}(B\Sigma_n)$, 且

$$N \models \forall z\exists x_f < a\exists w\ \psi(z,x_f,w).$$

不妨设 $\psi = \exists v\ \psi_0(v,w,x_f,z)$, $\psi_0 \in \Pi_n$. 假设 $N \models B\Sigma_{n+1}$, 则存在 $c \in N$ 使

$$N \models \forall z < a+1\exists x_f < a\exists v < c, w < c\ \psi_0(v,w,x_f,z).$$

令

$$X = \{\langle b,e\rangle \in N : b < a+1, e < a, N \models \exists v < c, w < c\ \psi_0(v,w,e,b)\},$$

则 X 是 N 的有界 Π_n-子集, 故 X 是 M-有穷的. 由 ψ 的选取可知, 任意 $b<c+1$ 都有 $e<c$ 使 $\langle b,e\rangle\in X$. 故有 M-有穷函数

$$f:a+1\to a,\quad f(b)=\min\{e<a:\langle b,e\rangle\in X\}.$$

由 ψ 的选取还可知, f 是单射, 但这是不可能的. □

由以上定理可得到如下推论.

推论 4.2.6. *设 $n>0$, 则 $I\Sigma_n\nvdash B\Sigma_{n+1}$.*

我们还可以得到 Ryll-Nardzewski 定理 4.2.3 的另一个证明.

Ryll-Nardzewski 定理的第二个证明. 设 Δ 是有穷的一阶理论且 $\mathrm{PA}\vdash\Delta$. 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $I\Sigma_n\vdash\Delta$, 不妨设 $n>0$. 由 Parsons 定理知 $\Delta\nvdash B\Sigma_{n+1}$, 故 $\Delta\nvdash\mathrm{PA}$. □

4.3 受限可定义闭包生成的前截

这一节的主要目标是证明 $B\Sigma_n$ 严格弱于 $I\Sigma_n$, 为此我们将借助 K_n^M 构造另一类子模型.

设 $X\subseteq M\models\mathrm{PA}^-$, 令

$$\sup\nolimits^M(X)=\{a\in M:\exists b\in X(a\le b)\}=\bigcup_{b\in X}[0,b]^M.$$

当 $n\in\mathbb{N}$, $A\subseteq M\models I\Sigma_1$ 时, 令

$$I_n^M(A)=\sup\nolimits^M(K_n^M(A)).$$

通过上一节可知, $I_n^M(A)$ 总是 M 的前截.

定理 4.3.1 (Paris and Kirby; Lessan)**.** *设 $n\in\mathbb{N}$, $M\models I\Sigma_{n+1}$, $a\in M-\mathbb{N}$. 则 $I_{n+1}^M(a)\models B\Sigma_{n+1}$ 但 $I_{n+1}^M(a)\not\models I\Sigma_{n+1}$. 因此 $B\Sigma_{n+1}\nvdash I\Sigma_{n+1}$.*

定理 4.3.2. *设 $n\in\mathbb{N}$, $A\subseteq M\models I\Sigma_n$. 则 $I_{n+1}^M(A)\preceq_{\Sigma_n}M$.*

证明. 设 $c<b\in K_{n+1}^M(A)$; 再设 $\varphi(u,v)\in\Sigma_n$ 且 $\varphi(M,c)$ 非空.

由习题 1.4.10 知,

$$M\models\exists x\forall v<b(\exists u\ \varphi(u,v)\to\exists u<x\ \varphi(u,v)).$$

以上 $\forall v < y(\exists u\ \varphi(u,v) \to \exists u < x\ \varphi(u,v))$ 是 $\Sigma_{n+1}(B\Sigma_n)$-公式. 故有 $\psi(w,x,y) \in \Pi_n$ 使得

$$M \models \forall x, y\Big(\exists w \psi(w,x,y) \leftrightarrow \forall v < y\big(\exists u\ \varphi(u,v) \to \exists u < x\ \varphi(u,v)\big)\Big).$$

令 $\theta(z,y)$ 记 $\exists w < z, x < z(z = \langle w,x\rangle \wedge \psi(w,x,y))$, 取 M 上 θ 的标准 Skolem 函数 Sk_θ. 则 $e = \mathrm{Sk}_\theta(b) \in K^M_{n+1}(A)$, $e = \langle e_0, e_1\rangle > e_1$ 且

$$M \models \forall v < b(\exists u\ \varphi(u,v) \to \exists u < e_1\ \varphi(u,v)).$$

从而 $\varphi(M,c) \cap I^M_n(A) \supseteq \varphi(M,c) \cap [0,e_1]^M$ 非空. $\square$

运用定理 4.3.2, 可得到 Paris-Kirby-Lessan 定理 4.3.1 的一半. 我们先证明以下引理.

引理 4.3.3. 设 $M \models I\Sigma_n$. 若 I 是 M 的真前截且 $I \prec_{\Sigma_n} M$ 则 $I \models B\Sigma_{n+1}$.

证明. 设 $a \in I$, $\varphi(x,y) \in \Pi_n(I)$ 且

$$I \models \forall x < a \exists y\ \varphi(x,y).$$

由 $I \prec_{\Sigma_n,\mathrm{end}} M$ 知,

$$M - I \subseteq J = \{b \in M : M \models \forall x < a \exists y < b\ \varphi(x,y)\}.$$

而 J 是 M 的 Π_n-子集. 由渗入知, 存在 $b \in I \cap J$. 再由 $I \prec_{\Sigma_n} M$ 知,

$$I \models \forall x < a \exists y < b\ \varphi(x,y).$$

这就证明 $I \models B\Pi_n$. $\square$

引理 4.3.4. 设 $M \models I\Sigma_{n+1}$, $a \in M - \mathbb{N}$. 则 $I^M_{n+1}(a) \models B\Sigma_{n+1}$.

证明. 先证明 $I^M_{n+1}(a)$ 是 M 的真前截, 为此只需要证明 $K^M_{n+1}(a)$ 在 M 中有上界. 任意 $b \in K^M_{n+1}(a)$, 有 $\varphi(x,y) \in \Sigma_{n+1}$ 使得 $\{b\} = \varphi(M,a)$, 故

$$M \models \mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(\ulcorner\varphi\urcorner, [b,a]).$$

由 $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}} \in \Sigma_{n+1}(I\Sigma_1)$、习题 1.4.10 及 $M \models I\Sigma_{n+1}$ 知, 存在 $c \in M$ 使得

$$M \models \forall w < a\big(\exists x\ \mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(w,[x,a]) \to \exists x < c\ \mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(w,[x,a])\big).$$

故以上 $b < c$, 从而 $K^M_{n+1}(a) < c$.

由定理 4.3.2 知, $I^M_{n+1}(a) \prec_{\Sigma_n} M$; 再由以上引理知 $I^M_{n+1}(a) \models B\Sigma_{n+1}$. $\square$

为了证明 Paris-Kirby-Lessan 定理的另一半, 先证明 $I^M_{n+1}(A)$ 的一个有趣的性质.

引理 4.3.5. 设 $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq M \models I\Sigma_n$, $N = I^M_{n+1}(A)$. 则 $K^M_{n+1}(A) = K^N_{n+1}(A)$.

证明. 不妨设 A 对 Cantor 配对封闭. 由定理 4.3.2 知, $N \preceq_{\Sigma_n} M$. 由此可知, 当 $\varphi(x,y) \in \Sigma_{n+1}$ 且 $a \in A$ 时, $\varphi(N,a) \subseteq \varphi(M,a)$.

对任意 $b \in K^M_{n+1}(A)$, 有 $a \in A$, Π_n-公式 $\psi(w,x,y)$ 和 Σ_{n+1}-公式 $\varphi(x,y) = \exists w \psi$ 使 $\{b\} = \varphi(M,a)$. 令

$$\theta(u,y) = \exists w < u, x < u(u = \langle w,x \rangle \wedge \psi(w,x,y)).$$

则 $\theta \in \Pi_n(B\Sigma_n)$. 故 Sk_θ 是 Σ^M_{n+1}-部分函数, $c = \mathrm{Sk}_\theta(a) \in K^M_{n+1}(a)$. 由 b 和 ψ 的选取知, 有 $d \in K^M_{n+1}(a) \subseteq N$ 使 $c = \langle d,g \rangle$. 由 $N \preceq_{\Sigma_n} M$ 知,

$$N \models \psi(d,b,a).$$

故 $b \in \varphi(N,a)$. 结合上一段及 $\varphi(M,a) = \{b\}$ 知, $\varphi(N,a) = \{b\}$. 这就证明 $K^M_{n+1}(A) \subseteq K^N_{n+1}(A)$

再证另一个包含关系. 设 $b \in K^N_{n+1}(A)$. 取 $a \in A$, $\psi(w,x,y) \in \Pi_n$ 和 $\varphi(x,y) = \exists w \psi$ 使 $\{b\} = \varphi(N,a)$. 则 $b \in \varphi(M,a)$. 如上, 令

$$\theta(u,y) = \exists w < u, x < u(u = \langle w,x \rangle \wedge \psi(w,x,y)).$$

则 Sk_θ 是 Σ^M_{n+1}-部分函数. 由 $\varphi(M,a)$ 非空知, 存在 $c = \mathrm{Sk}_\theta(a) \in K^M_{n+1}(A)$. 设 $c = \langle d,e \rangle$, 则 $M \models \psi(d,e,a)$ 且 $d,e \in N$. 由 $N \preceq_{\Sigma_n} M$ 知 $N \models \psi(d,e,a)$, 从而 $e \in \varphi(N,a)$. 故

$$b = e = \pi_1(c) = \pi_1 \circ \mathrm{Sk}_\theta(a) \in K^M_{n+1}(A).$$

因此 $K^N_{n+1}(A) \subseteq K^M_{n+1}(A)$. □

证明定理 *4.3.1.* 设 $M \models I\Sigma_{n+1}$, $a \in M - \mathbb{N}$, $N = I^M_{n+1}(a)$. 以上已知 $N \models B\Sigma_{n+1}$. 我们只要证明 $N \not\models I\Sigma_{n+1}$.

假设 $N \models I\Sigma_{n+1}$. 由习题 1.4.10 知, 存在 $b \in N$ 使得

$$N \models \forall x_f < a\big(\exists y \ \mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(x_f,[y,a]) \to \exists y < b \ \mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(x_f,[y,a])\big).$$

由 $a > \mathbb{N}$ 知, $K^N_{n+1}(a) < b$. 但由引理 4.3.5 及 N 的定义知, $K^N_{n+1}(a)$ 在 N 中无界. □

4.4 前截的迭代

通过第一章和前两节, 我们知道 $B\Sigma_n, I\Sigma_n$ 形成一个严格的层次

$$\ldots \Leftarrow I\Sigma_n \Leftarrow B\Sigma_{n+1} \Leftarrow I\Sigma_{n+1} \Leftarrow \ldots$$

在这一节, 我们将介绍 PA 的另一类片段及其与 $B\Sigma_n, I\Sigma_n$ 的关系.

设 $\varphi(x,y,z) \in \mathcal{L}_A$, $\mathrm{Pfun}(\varphi, z)$ 是以下公式

$$\forall x, y, y'(\varphi(x,y,z) \wedge \varphi(x,y',z) \rightarrow y = y').$$

$\mathrm{Pfun}(\varphi, z)$ 的直观含义是: 参数 z 通过 φ 定义了一个部分函数. 若 $\varphi \in \Sigma_n$ (或 Π_n) 则 $\mathrm{Pfun}(\varphi, z) \in \Pi_n$ (或 Σ_n).

设在模型 M 上, $\varphi(M, a)$ 定义了一个部分函数 F, 则

$$M \models \mathrm{Pfun}(\varphi, a).$$

这时, M-有穷函数 f 是一个长度为 b 的 **F-逼近**, 当且仅当任意 $i < b$

$$M \models i+1 < b \rightarrow \forall x, y(x \leq f(i) \wedge \varphi(x,y,a) \rightarrow y \leq f(i+1)).$$

再令 $\mathrm{Apx}(\varphi, x_a, x_b, x_f)$ 记以下公式

$$\mathrm{Func}(x_f, x_b) \wedge \forall x_i < x_b, x < x_f, y\big(x_i + 1 < x_b \wedge x \leq x_f(x_i) \wedge \varphi(x,y,x_a) \rightarrow y \leq x_f(x_i+1)\big).$$

则 $f \in M$ 是一个长度为 b 的 F-逼近, 当且仅当 $M \models \mathrm{Apx}(\varphi, a, b, f)$. 若 $\varphi \in \Sigma_n$ (或 Π_n) 则 $\mathrm{Apx}(\varphi, z) \in \Pi_n$ (或 $\Sigma_n(B\Sigma_n)$).

F-逼近有如下简单性质.

命题 4.4.1. *设 $M \models I\Sigma_0$, $\varphi(x,y,a)$ 和 $\psi(x,y,b)$ 分别定义了两个部分函数 F 和 G.*

(1) 若存在 M 中长为 d 的 F-逼近且 $d > c$, 则也存在 M 中长为 c 的 F-逼近;

(2) 若对任意 d 总有 $F(d) \geq G(d)$, 则 M 中长为 c 的 F-逼近也是长为 c 的 G-逼近.

证明. 习题. □

令 $P\varphi$ 记以下语句

$$\forall x_a(\mathrm{Pfun}(\varphi, x_a) \to \forall x_b \exists x_f\ \ \mathrm{Apx}(\varphi, x_a, x_b, x_f)).$$

若 $\varphi \in \Sigma_n$ 则 $P\varphi \in \Pi_{n+2}$.

令

$$P\Sigma_n = I\Sigma_0 + \{P\varphi : \varphi \in \Sigma_n\}.$$

命题 4.4.2. 设 $n > 0$.

$$I\Sigma_{n+1} \vdash P\Sigma_n, \quad P\Sigma_n \vdash I\Sigma_n.$$

证明. 习题, 利用 $I\Sigma_n$ 与 $B^+\Sigma_n$ 的等价性. □

定理 4.4.3. 设 $n > 0$, 则 $P\Sigma_n \nvdash B\Sigma_{n+1}$.

证明. 设 $M \models I\Sigma_{n+1}$ 是非标准模型, 从而 $M \models P\Sigma_n$. 取 $a \in M - \mathbb{N}$. 由定理 4.2.4 知, $K^M_{n+1}(a) \models I\Sigma_n$; 由定理 4.2.2 及以上对 $P\varphi$ 复杂性的分析知, $K^M_{n+1}(a) \models P\Sigma_n$. 又由 Parsons 定理 4.2.5 知, $K^M_{n+1}(a) \not\models B\Sigma_{n+1}$. □

定理 4.4.4. 设 $n > 0$, 则 $P\Sigma_n + B\Sigma_{n+1} \nvdash I\Sigma_{n+1}$.

设 $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_A$, 一个模型 M 的 Γ-理论是以下集合

$$\mathrm{Th}_\Gamma(M) = \{\varphi \in \Gamma : \varphi \text{ 是闭公式且} M \models \varphi\}.$$

引理 4.4.5. 设 $A \subseteq M \models I\Sigma_{n+1}$, 则 $I^M_{n+1}(A) \models \mathrm{Th}_{\Pi_{n+2}}(M)$.

证明. 设 $\varphi(x, y) \in \Pi_n$, $M \models \forall x \exists y \varphi$. 再设 $b \in I^M_{n+1}(A)$, 取 $\bar{b} \in K^M_{n+1}(A)$ 使 $b < \bar{b}$. 由 $M \models I\Sigma_{n+1}$ 知, 存在

$$\bar{c} = \min\{c \in M : M \models \forall x < \bar{b} \exists y < c\ \varphi\}.$$

以上 $\forall x < x_b \exists y < x_c\ \varphi$ 是 $\Pi_n(B\Sigma_{n+1})$-公式, 故 $\bar{c} \in K^M_{n+1}(A)$ 且

$$M \models \forall x < \bar{b} \exists y < \bar{c}\ \varphi.$$

由定理 4.3.2 知, $I^M_{n+1}(A) \preceq_{\Sigma_n} M$. 故

$$I^M_{n+1}(A) \models \forall x < \bar{b} \exists y < \bar{c}\ \varphi,$$

特别地, $I^M_{n+1}(A) \models \exists y \varphi(b, y)$. 这就证明 $I^M_{n+1}(A) \models \forall x \exists y \varphi$. □

证明定理 *4.4.4*. 设 $M \models I\Sigma_{n+1}$, $a \in M - \mathbb{N}$. 令 $N = I^M_{n+1}(a)$, 则由上一节知 $N \models B\Sigma_{n+1}$, 但 $N \not\models I\Sigma_{n+1}$; 由以上引理及 $I\Sigma_{n+1} \vdash P\Sigma_n$ 知, $N \models P\Sigma_n$. □

在本节的最后, 我们证明下面定理.

定理 4.4.6. 设 $n > 0$, 则 $B\Sigma_{n+1} \not\vdash P\Sigma_n$.

为此, 我们需要通过迭代 I^M_n 构造另一类子模型. 设 $A \subseteq M \models I\Sigma_1$. 对 $n, k \in \mathbb{N}$, 令

$$H^M_{n,0}(A) = I^M_n(A), \quad H^M_{n,k+1}(A) = I^M_n(H^M_{n,k}(A)),$$

并令 $H^M_n(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H^M_{n,k}(A)$.

引理 4.4.7. 设 $A \subseteq M \models I\Sigma_n$, 则 $H^M_n(A) \preceq_{\Sigma_n} M$.

证明. 若 $n = 0$, 由 $H^M_n(A) \subseteq_{\text{end}} M$ 知 $H^M_n(A) \preceq_{\Sigma_n} M$.

设 $n > 0$. 任取 $b \in H^M_{n,k}(A)$, $\varphi(x, y) \in \Sigma_n$, 且 $\varphi(M, b)$ 非空. 由定理 4.2.2 知,

$$H^M_{n,k+1}(A) = K^M_n(H^M_{n,k}(A)) \preceq_{\Sigma_n} M,$$

从而

$$\varphi(M, b) \cap H^M_n(A) \supseteq \varphi(M, b) \cap H^M_{n,k+1}(A) \neq \emptyset.$$

这就证明 $H^M_n(A) \preceq_{\Sigma_n} M$. □

定理 4.4.8. 设 $n > 0$, $M \models I\Sigma_{n+1}$, $a \in M - \mathbb{N}$. 则 $H^M_n(a) \models B\Sigma_{n+1}$ 但 $H^M_n(a) \not\models P\Sigma_n$.

证明. 令 $N = H^M_n(a)$. 由以上引理知 $N \preceq_{\Sigma_n} M$.

先证明 $N \not\models P\Sigma_n$. 令 $\theta(x_\psi) \in \Sigma_0$ 使得: 任意 $c \in M$, $c \in \theta(M)$ 当且仅当 c 是一个 "Σ_n-公式" ψ 的哥德尔数且 ψ 定义了某个 "Π_{n-1}-公式" $\varphi(v, y)$ 对应的 $\pi_1 \circ \mathrm{Sk}_\varphi$. 令 $\lambda(x, y, z)$ 记以下公式

$$(x = 0 \wedge y = z) \vee \exists x_\psi < x, v < x(x = \langle x_\psi, v\rangle > 0 \wedge \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(x_\psi, [v, y])).$$

容易证明 λ 定义了 M 上的一个 Σ_n-部分函数. 则 $M \models \mathrm{Pfun}(\lambda, a)$, 从而 $N \models \mathrm{Pfun}(\lambda, a)$. 记 $\lambda(x, y, a)$ 在 N 和 M 中定义的部分函数分别为 F^N_a 和 F^M_a. 则由 $N \preceq_{\Sigma_n} M$ 知 $F^N_a = F^M_a \upharpoonright N$, 即任意 $b \in N$, $F^N_a(b) = F^M_a(b)$.

假设 $N \models P\Sigma_n$, 则 N 中有长为 a 的 F_a^N-逼近, 设为 f. 故 $N \models \mathrm{Apx}(\lambda, a, a, f)$, 从而 $M \models \mathrm{Apx}(\lambda, a, a, f)$, 即在 M 中 f 是 F_a^M 的长为 a 的逼近. 但对 $k \in \mathbb{N}$ 用归纳法可以证明 $H_{n,k}^M(a) < f(k+1)$, 这与 $f \in N$ 矛盾.

以上证明 $N \not\models P\Sigma_n$, 故 $N \not\models I\Sigma_{n+1}$. 从而 $N \neq M$, $N \prec_{\Sigma_n,\mathrm{end}} M$. 由引理 4.3.3 知 $N \models B\Sigma_{n+1}$. □

4.5 保守性

设 $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_A$. 一阶理论 T_1 相对 T_0 是 **Γ-保守的** (Γ-conservative), 当且仅当

$$\{\varphi \in \Gamma : \varphi \text{ 是闭公式且} T_0 + T_1 \vdash \varphi\} = \{\varphi \in \Gamma : \varphi \text{ 是闭公式且} T_0 \vdash \varphi\}.$$

利用紧致性定理和定理 4.3.2, 可得到以下保守性.

定理 4.5.1 (Paris, Harvey Friedman). *$B\Sigma_{n+1}$ 相对 $I\Sigma_n$ 是 Π_{n+2}-保守的.*

证明. 设 $\varphi(x,y) \in \Pi_n$, $I\Sigma_n \nvdash \forall x \exists y \varphi$, 则存在 $M \models I\Sigma_n$ 和 $a \in M$ 使得 $M \models \forall y \neg\varphi(a,y)$.

设 $\mathcal{L}_A(M)'$ 是 $\mathcal{L}_A(M)$ 加入一个新常元符号 c 所得的语言. 令

$$T = \mathrm{Diag_e}(M) \cup \{\exists y \psi(a,y) \to \exists y < c\ \psi(a,y) : \psi \in \Sigma_{n+1}\}.$$

则 T 是有穷可满足的, 由紧致性定理知 T 是可满足的. 故 T 有模型 N.

由 T 的定义知, $I = I_{n+1}^N(a) < c$; 由定理 4.3.2 知, $I \prec_{\Sigma_n} N$; 故由引理 4.3.3 知, $I \models B\Sigma_{n+1}$. 另一方面, $N \models \forall y \neg\varphi(a,y)$, 其中 $\varphi \in \Pi_n$; 由 $a \in I$ 知, $I \models \forall y \neg\varphi(a,y)$, 故 $I \models \neg\forall x \exists y \varphi$.

这就证明 $B\Sigma_{n+1} \nvdash \forall x \exists y \varphi$. □

据说以上是 Harvey Friedman 的一个未发表的证明. [1] Paris [8] 独立地运用型扩张的方法得到另一个证明, 其结论略有不同.

定理 4.5.2 (Paris). *设 $n > 0$, 则 $B\Sigma_{n+1}$ 相对 $I\Sigma_n$ 和 $P\Sigma_n$ 分别都是 Π_{n+2}-保守的.*

设 $M \models I\Sigma_n$, 一个 **M-有穷型**是一个满足以下条件的、M-有穷集合构成的集合族 p:

[1] 见 [4, 第 230 页]

(1) $\emptyset \notin p \neq \emptyset$;

(2) 任意 $X, Y \in p$, $X \cap Y \in p$.

这样的 p 是 **相对完全的**, 当且仅当 p 还满足:

(3) 任意 M-有穷 X, $X \in p$ 或 $b - X \in p$.

相对完全性意味着 p 是 M-有穷集合构成的布尔代数的超滤. 不过, 模型论中一般的完全型是指可定义子集构成的布尔代数的超滤. 在第二章中, 我们知道当 p 有上界 b 且 $M \models \mathrm{PA}$ 时, p 是完全型当且仅当 p 是相对完全型. 然而, 当 $M \not\models \mathrm{PA}$ 时, 即使上述 p 是相对完全的且有上界 b, p 也未必是完全型, 因为可能存在可定义的但不是 M-有穷的 $X \subset [0, b-1]^M$.

命题 4.5.3. *每一个 M-有穷型 p 都可扩张为一个有上界的相对完全 M-有穷型 q, 即 $p \subseteq q$.*

证明. 习题. □

设 p 是 M-有穷型. 由紧致性定理知, 存在 M 的初等扩张 N 和 $c \in N$ 满足 p, 即任意 $X \in p$, $N \models c \in X$. 我们可构造 N 的子模型如下

$$M(c)^N = \{f(c) : f \text{ 是}M\text{-有穷一元函数且}N \models c \in \operatorname{dom} f\}.$$

命题 4.5.4. *设 $n > 0$, $M \models I\Sigma_n$, p, N, c 如上.*

(1) (Łos 定理) 若 p 是相对完全的, $\varphi(x_0, \ldots, x_{k-1}) \in \Sigma_n$, $f_0, \ldots, f_{k-1}$ 是 M-有穷函数且 $N \models c \in \operatorname{dom} f_i$ $(i < k)$, 则

$$\begin{aligned} &N \models \varphi(f_0(c), \ldots, f_{k-1}(c)) \iff \\ &\qquad \{a \in M : M \models \bigwedge_{i<k} a \in \operatorname{dom} f_i \wedge \varphi(f_0(a), \ldots, f_{k-1}(a))\} \in p. \end{aligned}$$

(2) $M \preceq_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} M(c)^N \preceq_{\Sigma_n} N$;

(3) 若 p 是相对完全的, N' 也是 M 的初等扩张且 $c' \in N'$ 也满足 p, 则 $M(c)^N \cong M(c')^{N'}$.

证明. 习题. □

由命题 4.5.4 (3), 当 p 相对完全时, 我们记以上 $M(c)^N$ 为 $M(c)$, 并称其为 M 的 p-扩张.

Paris 的定理 4.5.2 可通过以下模型扩张定理得到证明.

定理 4.5.5. *设 $n > 0$, $M \models I\Sigma_n$ 是可数的, 则存在 N 使得 $M \prec_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N \models B\Sigma_{n+1}$.*

由定理 4.5.5 证明 4.5.2. 设 $\varphi(x,y) \in \Pi_n$ 且 $I\Sigma_n \not\vdash \forall x\exists y\varphi$. 取可数模型 $M \models I\Sigma_n$ 和 $a \in M$ 使 $M \models \forall y\neg\varphi(a,y)$. 由定理 4.5.5, 取 N 使得 $M \prec_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N \models B\Sigma_{n+1}$. 则 $N \models \forall y\neg\varphi(a,y)$. 故 $B\Sigma_{n+1} \not\vdash \forall x\exists y\varphi$.

若 $P\Sigma_n \not\vdash \forall x\exists y\varphi$, 如上取 M, a 和 N, 但另外要求 $M \models P\Sigma_n$. 由上一段知, $N \not\models \forall x\exists y\varphi$. 故只需证明 $N \models P\Sigma_n$. 设 $\theta(x,y,b)$ 定义了一个 N 上的部分函数 G, $b \in N$; 再设 $\ell \in N$. 取 $\bar{b} \in M$ 使 $b > \max\{b,\ell\}$. 令

$$X = \{a \in M : a < b, M \models \mathrm{Pfun}(\theta, a)\}.$$

由 $\mathrm{Pfun} \in \Pi_n$ 知, X 是 M-有穷的. 定义 M 上的部分函数 $F :\subseteq M \to M$ 如下

$$F(0) = \langle \bar{b}, \bar{b}\rangle, \quad F(\langle a,d\rangle) = \langle a,e\rangle \Leftrightarrow M \models a \in X \wedge \theta(d,e,a).$$

则 F 是 M-上的 Σ_n-部分函数. 由 $M \models P\Sigma_n$ 知, M 中有长为 $\bar{b}$ 的 F-逼近 f. 由 $M \prec_{\Sigma_{n+1}} N$ 知, f 也是 N 中长为 $\bar{b}$ 的 F^N-逼近. 在 N 中定义

$$g(0) = 0, \quad g(i) = \max\{e \in N : \langle b,e\rangle \leq f(i)\} \ (i < \ell).$$

则容易验证 g 是 N 中长为 ℓ 的 G-逼近. □

设 M 如定理 4.5.5 的前提, 我们通过可数步的扩张构造 N.

引理 4.5.6. *设 $n > 0$, $M \models I\Sigma_n$, $\varphi(x,y) \in \Pi_n \cap \mathcal{L}_A(M)$, $a \in M$ 且*

$$M \models \forall x < a\exists y\varphi(x,y) \wedge \forall w\exists x < a\forall y < w\neg\varphi(x,y).$$

则存在 N 和 $c \in N$ 使得 $|M| = |N|$, $M \prec_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N$,

$$N \models c < a \wedge \forall y\neg\varphi(c,y).$$

证明. 对 $b \in M$, 令

$$X_b = \{i \in M : M \models i < a \wedge \forall y < b\neg\varphi(i,y)\}.$$

则 X_b 是 M 的有界 Σ_n-子集, 故是 M-有穷的; 易知, $X_0 = a$, 且任意 $X_{b_0} \cap X_{b_1}$ 非空. 故 $p = \{X_b : b \in M\}$ 是一个 M-有穷型, 设 $q \supseteq p$ 是其相对完全扩张.

令 $N = M(c)$ 是 M 的 q-扩张, 且 c 实现 q. 由命题 4.5.4 知, $M \preceq_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N$. 令 id 记 $[0, a-1]^M$ 上的恒等函数, 则 id 是 M-有穷的且 $N \models c = \mathrm{id}(c)$. 对任意 $b \in M$, 令 f 是在 $[0, a-1]^M$ 上恒取值 b 的 M-有穷函数. 由 p 的定义知

$$\{i \in M : i < a, M \models \forall y < b \neg\varphi(i, y)\} = \\ \{i \in M : i < a, M \models \forall y < f(i)\neg\varphi(\mathrm{id}(i), y)\} \in p.$$

由命题 4.5.4 知, $N \models \forall y < f(c)\neg\varphi(\mathrm{id}(c), y)$, 即

$$N \models \forall y < b\neg\varphi(c, y).$$

由 N 是 M 的内扩张知

$$N \models \forall y\neg\varphi(c, y).$$

□

我们还需要 Σ_{n+1}-初等内扩张的一个简单性质.

引理 4.5.7. 设 $n > 0$, $M \models I\Sigma_n$ 且 $M \prec_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N$. 则 $N \models I\Sigma_n$.

证明. 习题. □

证明定理 *4.5.5.* 设 $n > 0$, $M \models I\Sigma_n$ 是可数的. 由引理 4.5.6 知, 可构造模型序列 $N_0, N_1, \ldots$ 使之满足以下条件

(1) $M = N_0$;

(2) $N_k \prec_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N_{k+1}$;

(3) 任意 k, $\varphi(x, y) \in \Pi_n \cap \mathcal{L}_A(N_k)$ 和 $a \in N_k$, 若 $N_k \models \neg\exists w\forall x < a\exists y < w\varphi$, 则存在 j 和 $c \in N_{k+j}$ 使

$$N_{k+j} \models c < a \wedge \forall y\neg\varphi(c, y).$$

由引理 4.5.7 还可知 $N_k \models I\Sigma_n$.

令 $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$. 则所有 $N_k \prec_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N$, 结合引理 4.5.7 知 $N \models I\Sigma_n$. 假设 $N \not\models B\Sigma_{n+1}$, 则有 $\varphi(x,y) \in \Pi_n \cap \mathcal{L}_A(N)$, $a \in N$ 且

$$N \models \forall x < a \exists y \varphi \wedge \forall w \exists x < a \forall y < w \neg\varphi. \tag{4.5.1}$$

取 $k \in \mathbb{N}$ 使 $\varphi \in \mathcal{L}_A(N_k)$ 且 $a \in N_k$. 由 N_k, N 都是 $I\Sigma_n$ 的模型且 $N_k \prec_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N$ 知

$$N_k \models \forall w \exists x < a \forall y < w \neg\varphi.$$

故有 $j \in \mathbb{N}$ 和 $c \in N_{k+j}$ 使

$$N_{k+j} \models c < a \wedge \forall y \neg\varphi(c,y).$$

由 $N_{k+j} \prec_{\Sigma_{n+1},\mathrm{cf}} N$ 知

$$N \models c < a \wedge \forall y \neg\varphi(c,y),$$

这与 (4.5.1) 矛盾. □

4.6 习题

习题 4.6.1. 设 $a \in M \models I\Sigma_n$, $N = K^M_{n+1}(a)$. 证明*:* 存在 Σ^N_{n+1} 单射 $F : N \to \mathbb{N}$.

习题 4.6.2. 对 $\varphi(x,y,z)$, 令 $C\varphi$ 记以下公式

$$\forall z, w\big(\forall x \exists! y \varphi(x,y,z) \to \exists x, y(w < y \wedge \varphi(x,y,z)) \vee \\ \exists x, x', y(x \neq x' \wedge \varphi(x,y,z) \wedge \varphi(x',y,z))\big).$$

则 $M \models C\varphi$, 当且仅当任意 $a, b \in M$, $\varphi(M,a)$ 不是一个从 M 到 b 的单射.

令

$$C\Sigma_n = I\Sigma_0 + \{C\varphi : \varphi \in \Sigma_n\}.$$

证明*:*

(1) $B\Sigma_{n+1} \vdash C\Sigma_{n+1}$.

(2) $P\Sigma_n \not\vdash C\Sigma_{n+1}$.

第五章　一个组合定理的独立性

在这一章中, 我们将介绍一个独立于 PA 的有穷组合数学命题.

5.1　有穷染色的组合学

首先我们需要一些组合数学概念. 若 X 是一个集合, $0 < e \in \mathbb{N}$, $[X]^e$ 是来自 X 的严格递增 e-元组构成的集合, 即

$$[X]^e = \{(a_0, \ldots, a_{e-1}) : a_0 < \ldots < a_{e-1},\ a_i \in X\ (i < e)\}.$$

在组合数学中, 常常将一个映射称为一个 **染色**. 当 $0 < k \in \mathbb{N}$ 时, 一个 **k-染色**是一个定义域为 $k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ 的映射. 这里我们主要关心形如 $f : [X]^e \to k$ 的染色, 其中 X 通常是 $\mathbb{N}$ 的子集. 对 f 如上, X 的一个子集 H 称为 **f-同色的** (f-monochromatic, f-homogeneous), 当且仅当 $f \restriction [H]^e$ 是常值函数.

定理 5.1.1 (Ramsey). *对任意 $0 < e \in \mathbb{N}$, $0 < k \in \mathbb{N}$ 和任意 $f : [\mathbb{N}]^e \to k$, 都存在无穷的 f-同色集合 $H \subseteq \mathbb{N}$.*

推论 5.1.2 (有穷 Ramsey 定理). *对任意 $0 < e \in \mathbb{N}$, $0 < k \in \mathbb{N}$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$, 存在 $0 < r \in \mathbb{N}$, 使得任意 $f : [0, r-1]^e \to k$ 都有同色集合 H 使 $|H| \geq \ell$.*

有穷 Ramsey 定理也可以绕过 Ramsey 定理直接用归纳法证明. 为了表达更加紧凑, 我们引入 Erdös 记号, 用

$$m \to (\ell)^e_k$$

记以下命题:

任意 $f : [m]^e \to k$ 都有一个大小为 ℓ 的同色集合,

以上 $[m]^e = [\{0, 1, \ldots, m-1\}]^e$.

命题 5.1.3. $I\Sigma_1 \vdash \forall \ell, e, k \exists r(r \to (\ell)^e_k)$.

Paris 和 Harrington 在 1977 年左右提出有穷 Ramsey 定理的一个增强形式, 现在被称为 Paris-Harrington 定理. 称 $\mathbb{N}$ 的一个有穷子集 X 是 **相对大的**, 当且仅当 X 非空且 $|X| > \min X$. 若 $X \subset \mathbb{N}$, 用

$$X \xrightarrow{*} (\ell)^e_k$$

记以下命题:

任意 $f : [X]^e \to k$ 都有一个相对大的同色集合 H 且 $|H| \geq \ell$.

用 PH^e_k 记命题

$$\forall x, z \exists y([x, y] \xrightarrow{*} (z)^e_k),$$

PH^e 记 $\forall c\, \mathrm{PH}^e_k$, 而 PH 记 $\forall n\, \mathrm{PH}^e$. $\mathrm{PH}^e_k, \mathrm{PH}^e, \mathrm{PH}$ 都可以用 Π_2-闭公式表达.

命题 5.1.4. PH 成立, 即 $\mathbb{N} \models \mathrm{PH}$.

证明. 假设 PH 不成立, 则存在 e, k, a, ℓ, 使得以下集合是无穷集合

$$F = \{f :\ \text{存在} b > a \text{ 使得} f \text{ 是}[[a, b]]^e \text{ 的一个} k \text{ 染色且}$$
$$\text{没有相对大同色集合} H \text{ 使得} |H| \geq \ell\}.$$

定义 F 上的二元关系如下

$$f \lhd g \ \Leftrightarrow f \neq g \text{ 且} f = g \restriction \mathrm{dom}\, f.$$

显然

- $\lhd$ 是 F 上的偏序关系,
- 若 $g \in F$, $\mathrm{dom}\, g = [[a, b]]^e$ 且 $a \leq c < b$, 则 $g \restriction [[a, c]]^e \in F$,
- 若 $g \in F$, $\mathrm{dom}\, g = [[a, b]]^e$, 则

$$|\{h \in F : g \lhd h, \mathrm{dom}\, h = [[a, b+1]]^e\}| < c^{|[[a,b]]^{e-1}|}.$$

故 $T = (F, \lhd)$ 是一棵无穷的有穷分叉树. 因此 T 有无穷分支

$$f_0 \lhd f_1 \lhd \ldots \lhd f_n \lhd \ldots$$

构造 $[\mathbb{N}]^e$ 上的 k-染色如下:

$$C(a_0,\ldots,a_{e-1}) = i \iff \\ \text{存在}n \text{ 使得}(a_0,\ldots,a_{e-1}) \in \operatorname{dom} f_n \text{ 且} f_n(a_0,\ldots,a_{e-1}) = i.$$

根据 Ramsey 定理, C 有无穷同色集合 H. 设 H 的元素为 $a_0 < a_1 < \ldots$, 令 $m = \max\{a_0, \ell\}$,

$$X = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$$

为相对大的 C-同色集合, 且 $|X| > \ell$. 再取 f_n 使得 $[[a, a_m]]^e \subset \operatorname{dom} f_n$, 则 X 也是 f_n-同色集合, 这与 $f_n \in F$ 矛盾. □

熟悉命题 5.1.3 证明的读者不难证明以下命题.

命题 5.1.5. $I\Sigma_e \vdash \mathrm{PH}^e$.

证明. 习题. □

不过,

定理 5.1.6 (Paris, Harrington)**.** 设 $0 < e \in \mathbb{N}$.

(1) $I\Sigma_e \nvdash \mathrm{PH}^{e+1}$.

(2) $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{PH}$.

证明. 我们将在后面的两节中证明 (1), 而 (2) 可由 (1) 得到 (习题). □

5.2 Paris-Harrington 的推论

在这一节中, 取定 $0 < e \in \mathbb{N}$ 和 $M \models I\Sigma_1 + \mathrm{PH}^e$. 为了证明 Paris-Harrington 定理 5.1.6, 我们需要以下组合学结论 ([4, Theorem II.2.7]).

引理 5.2.1. *在 M 中, 对任意 a, k, 存在 $b > a$, 使得每个 M-有穷 $f : [[a, b]]^e \to k$ 都有 M-有穷同色集合 $H \subseteq [a, b]$ 满足*

$$|H| > 2^{\min H} \wedge \forall (c, d) \in [H]^2 (2^c \leq d). \tag{5.2.1}$$

引理 5.2.2. *存在 Σ_0-映射 $F : [M]^2 \to 4$ 使得: 若 H 是 M-有穷的相对大 F-同色集合且 $\min H > 1$, 则任意 $(a, b) \in [H]^2$ 满足 $a < 2^b$.*

证明. 定义

$$F_0(a,b)=\begin{cases}0 & b<2a\\ 1 & b\geq 2a\end{cases},\quad F_1(a,b)=\begin{cases}0 & b<2^a\\ 1 & b\geq 2^a\end{cases}.$$

再定义

$$F(a,b)=F_0(a,b)2^0+F_1(a,b)2^1.$$

容易验证 F 满足要求. □

证明引理 5.2.1. 设 $a,k\in M$, 不妨设 $a>0$. 由 $M\models \mathrm{PH}^e$ 知, 存在 $\bar{b}>2^{a+1}>1$ 满足

$$[2^a,\bar{b}]\xrightarrow{*}(2e)^e_{4k+1}.$$

对 $i\in M$, 令

$$\log i=\max\{c:2^c\leq i\}.$$

则 log 是 Σ_0-函数. 令 $b=\log\bar{b}$. 以下验证 b 满足引理 5.2.1 的结论.

任取 $f:[a,b]^e\to k$. 定义 $[[2^a,\bar{b}]]^e$ 上的 $(4k+1)$-染色如下: 设 $(i_0,\dots,i_{e-1})\in[[2^a,\bar{b}]]^e$,

$$G(i_0,\dots,i_{e-1})=\begin{cases}F(i_0,i_1)+4f(\log i_0,\dots,\log i_{e-1}) & \log i_0<\dots<\log i_{e-1}\\ 4k & \text{否则},\end{cases}$$

其中 F 如引理 5.2.2. 由 $\bar{b}$ 的选取知, 存在 M-有穷的、相对大 G-同色集合 H'; 由 G 的定义及引理 5.2.2 知, 任意 $(i,j)\in[H']^2$, $2^i<j$, 从而 $\log\restriction H'$ 是单射. 故对任意 $(i_0,\dots,i_{e-1})\in[H']^e$, $G(i_0,\dots,i_{e-1})\neq k+4$.

定义

$$H=\{\log i:i\in H'\}.$$

由 G 的定义知 H 是 f-同色的. 由 H' 的性质知,

$$2^{\min H}\leq\min H'<|H'|=|H|.$$

若 $(c,d)\in[H]^2$, 则存在 $(i,j)\in[H']^2$ 使得 $c=\log i$, $d=\log j$; 由 $2^i<j$ 知,

$$2^c\leq i\leq\log j=d.$$

□

5.3 二元组的 Paris-Harrington

这里我们证明定理 5.1.6 的一个简单特例: $I\Sigma_1 \nvdash \mathrm{PH}^2$, 思路如下:

(1) 设 $M \models I\Sigma_1 + \mathrm{PH}^2$ (比如: $M \models I\Sigma_2$);

(2) 在 M 中, 利用 PH^2 构造所谓 **强不可辨**序列 $(a_i : i < \ell)$ 使之有非标准长度 ℓ;

(3) 证明 $\bigcup_{i<\mathbb{N}}[0, a_i] = N \models I\Sigma_1 + \neg\,\mathrm{PH}^2$.

以下取 $M \models I\Sigma_1 + \mathrm{PH}^2$, 并取定 M 的若干元素作为参数:

- $a > c > \mathbb{N}$ 使得对任意 $b \geq a$, $2^b > b^{c+1}$;
- $\ell > \mathbb{N}$.

定义 5.3.1. M 的一个严格递增元素序列 $(a_i : i < \ell)$ 是 **2-强不可辨的**, 当且仅当对所有 Σ_0-公式 $\varphi(x, y)$, 所有 $(i, j, k) \in [\ell]^3$, 和所有 $p < a_i$,

$$M \models \exists x < a_j \varphi(x, p) \leftrightarrow \exists x < a_k \varphi(x, p).$$

引理 5.3.2. *若 $\ell > \mathbb{N}$ 且 $(a_i : i < \ell)$ 是 2-强不可辨的, 则 $\bigcup_{i<\mathbb{N}}[0, a_i] = N \models I\Sigma_1$.*

证明. 首先要证明 N 是 M 的一个子模型, 即 N 对加法和乘法封闭. 要证明 N 对加法封闭, 只要证明 $2a_i < a_{i+1}$. 假设 $a_{i+1} \leq 2a_i$, 则存在 $b < a_i$ 使 $2b + 1 \leq a_{i+1} \leq 2b + 2$. 故

$$M \models \forall x < a_{i+1}(x < 2b + 2).$$

由强不可辨性,

$$M \models \forall x < a_{i+3}(x < 2b + 2).$$

与 $2b + 2 \leq a_{i+1} + 1 \leq a_{i+2} < a_{i+3}$ 矛盾. 类似地, 可证明 N 对乘法封闭 (习题!).

由上一段及 N 是 M 的前截知, $N \prec_{\Sigma_0} M$. 故 $N \models I\Sigma_0$. 要证明 $N \models I\Sigma_1$, 设 $b < a_i$, $\varphi \in \Sigma_0$, 且

$$N \models \exists x \varphi(x, b).$$

由强不可辨性及 $N \prec_{\Sigma_0} M$, 对所有 $c < a_i$,

$$\begin{aligned} N \models \exists x \varphi(x, c) &\Leftrightarrow N \models \exists x < a_{i+1} \varphi(x, c) \\ &\Leftrightarrow M \models \exists x < a_{i+1} \varphi(x, c). \end{aligned}$$

令

$$b_0 = \min\{c < a_i : M \models \exists x < a_{i+1} \varphi(x, c)\},$$

则

$$b_0 = \min\{c : N \models \exists x \varphi(x, c)\}.$$

故对 $\psi = \exists x \varphi$, $N \models L\psi$. $\square$

要构造 2-强不可辨序列, 我们需要借助 Paris 序列.

定义 5.3.3. 设 $a < b \in M$, b 的一个 **Paris 序列**是满足以下条件的一个序列 $(a_i : i < \ell)$

(1) $a_0 = a < a_i < a_{i+1} < b$ (当 $i + 1 < \ell$ 时);

(2) 若 $i+1 < \ell$, $\varphi(x, y) \in \Sigma_0$, $p < a_i$ 且 $\varphi(M, p) \cap b \neq \emptyset$ 则 $\varphi(M, p) \cap a_{i+1} \neq \emptyset$.

引理 5.3.4. 设 $a < b \in M$, 则 b 的 *Paris* 序列是 2-强不可辨的.

证明. 设 $(a_i : i < \ell)$ 是 b 的一个 Paris 序列. 若 $\varphi(x, y) \in \Sigma_0$ 且 $p < a_i < a_j$, 则

$$\begin{aligned} M \models \exists x < a_j \varphi(x, p) &\Leftrightarrow \varphi(M, p) \cap a_j \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \varphi(M, p) \cap a_{i+1} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow M \models \exists x < a_{i+1} \varphi(x, p). \end{aligned}$$

$\square$

对 $d, p, b \in M$, 令

$$D_{d,p,b} = \{i \in M : i < b,\ M \models \mathrm{Fml}_{\Sigma_0}(d) \wedge \mathrm{Sat}_{\Sigma_0}(d, [i, p])\}.$$

故, 若 $\varphi(x, y) \in \Sigma_0$, $d = \ulcorner \varphi \urcorner$, 则

$$D_{d,p,b} = \varphi(M, p) \cap b.$$

对 $b \in M$, 我们尝试为 b 构造 Paris 序列:

(1) 令 $a_{b,0} = a$;

(2) 设 $i+1 < \ell$ 且已定义 $a_{b,i}$, 若 $a_{b,i} < b$ 则令

$$a_{b,i+1} = \max\{\min D_{d,p,b} : d < c, p < a_{b,i}, D_{d,p,b} \neq \emptyset\} + 1;$$

若 $a_{b,i} = b$ 则令 $a_{b,i+1} = a_{b,i}$.

注意, 若 $i+1 < \ell$ 且 $a_{b,i} < b$ 则 $a_{b,i} < a_{b,i+1}$, 因为, 若 $\varphi(x,y)$ 记公式 $x = y+1$, $d = \ulcorner\varphi\urcorner$, 则

$$\{a_{b,i}\} = \varphi(M, a_{b,i} - 1) = D_{d,a_{b,i}-1,b}.$$

不难证明, 存在一个 Δ_1 映射将每一个 $b > a$ 映射为一个 M-有穷函数 f_b 使得 $f_b(i) = a_{b,i}$ $(i < \ell)$.

以上 $(a_{b,i} : i < \ell)$ 有一些简单的性质

- $(a_{b,i} : i < \ell)$ 是 b 的 Paris 序列当且仅当所有 $a_{b,i} < b$;
- 若 $b' > b > a$, $a_{b',i} = a_{b,i}$ 但 $a_{b',i+1} \neq a_{b,i+1}$, 则 $a_{b',i+1} \geq b$.

对 $b_0 < b_1 \in M$, 定义

$$C(b_0, b_1) = \begin{cases} 0 & b_0 \leq a \text{ 或对所有} i < \ell, a_{b_0,i} = a_{b_1,i} \\ \min\{j < \ell : a_{b_0,j} \neq a_{b_1,j}\} & \text{否则}. \end{cases}$$

则 C 是 M 上的一个 Δ_1-染色. 对 $b' \in M$, 令 $C_{b'} = C \restriction [[a, b']]^2$.

由 $M \models I\Sigma_1$ 和引理 5.2.1, 取

$$b = \min\{b' \in M : \text{ 对} C_{b'} \text{ 存在} H \text{ 满足引理 5.2.1 的结论}\}. \tag{5.3.1}$$

由 b 的选取, 存在 M-有穷的 C-同色集合 $H \subseteq [a, b]$ 满足

$$2^{\min H} < |H| \text{ 且 所有} (c,d) \in [H]^2, 2^c \leq d.$$

设 H 的元素可递增地列举为

$$b_0 < b_1 < \ldots < b_{t-1}.$$

引理 5.3.5. $C \restriction [H]^2$ 取常值 0.

证明. 设 $C\restriction[H]^2$ 取常值 $i>0$. 令

$$a_{i-1}=a_{b_0,i-1}\leq b_0=\min H.$$

则对任意 $b\in H$, $a_{i-1}=a_{b,i-1}$, 且当 $b<b'\in H$ 时 $a_{b,i}<a_{b',i}$. 若 $0<r<t$, 则有 $d<c$ 和 $p<a_{i-1}$, 使得 $M\models \mathrm{Fml}_{\Sigma_0}(d)$ 且

$$a_{i-1}=a_{b_{r-1},i-1}<a_{b_{r-1},i}\leq \min D_{d,p,b_r}<a_{b_r,i}. \tag{5.3.2}$$

而

$$|\{\langle d,p\rangle : d<c, p<a_{i-1}\}|^M<a_{i-1}^2<b_0^2<2^{b_0}<|H|^M=t.$$

故不可能所有的 $r<t$ 都有 d,p 使 (5.3.2) 成立. $\square$

由引理 5.3.5, 可定义 $(a_i:i<\ell)=(a_{b_r,i}:i<\ell)$, 其中 b_r 是 H 的任意元素, 且 $(a_i:i<\ell)$ 是每个 $b_r\in H$ 的 Paris 序列. 由引理 5.3.2 和 5.3.4,

$$N=\bigcup_{i<\mathbb{N}}[0,a_i]\models I\Sigma_1,$$

且, $N<\min H<b$. 对 $a'\in N$, $C_{a'}\in N$; 但 (5.3.1) 说明引理 5.2.1 的结论对 $C_{a'}$ 不成立. 因此

$$N\models I\Sigma_1+\neg\,\mathrm{PH}^2.$$

5.4 $(n+1)$-元组的 Paris-Harrington

设 $M\models I\Sigma_n+\mathrm{PH}^{n+1}$, 并如上一节取定 M 的若干元素作为参数:

- $a>c>\mathbb{N}$ 使得对任意 $b\geq a$, $2^b>b^{c+1}$;
- $\ell>\mathbb{N}$.

定义 5.4.1. 一个严格递增的 M-有穷序列 $(a_i:i<\ell)$ 是 $(n+1)$**-强不可辨的**, 当且仅当对所有 Σ_0-公式 $\varphi(\vec{x},y)$, 所有 $(i,i_1,\ldots,i_n)\in[\ell]^{n+1}$, 和所有 $p<a_i$,

$$\begin{aligned}M\models \exists x_1<a_{i_1}\forall x_2<a_{i_2}\cdots Q_nx_n<a_{i_n}\varphi(\vec{x},p)\leftrightarrow\\ \exists x_1<a_{i+1}\forall x_2<a_{i+2}\cdots Q_nx_n<a_{i+n}\varphi(\vec{x},p),\end{aligned}$$

其中 $\exists x_1 < a_{i_1} \forall x_2 < a_{i_2} \cdots Q_n x_n < a_{i_n}$ 是一个交错的量词序列, 比如: 当 $n=3$ 时, 这个序列是

$$\exists x_1 < a_{i_1} \forall x_2 < a_{i_2} \exists x_3 < a_{i_3}.$$

本节中所有的 $\exists x_1 < a_{i_1} \forall x_2 < a_{i_2} \cdots Q_n x_n < a_{i_n}$ 或 $\exists x_1 \forall x_2 \cdots Q_n x_n$ 都是类似的交错量词序列.

当然 $(n+1)$-强不可辨性质蕴含 n-强不可辨性.

引理 5.4.2. 若 $\ell > \mathbb{N}$ 且 $(a_i : i < \ell)$ 是 $(n+1)$-强不可辨的, 则 $\bigcup_{i<\mathbb{N}}[0, a_i] = N \models I\Sigma_n$.

证明. 由上一节知, $N \prec_{\Sigma_0,\text{end}} M$ 且 $N \models I\Sigma_1$.

设 $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \in \Sigma_0$. 对 $n-m$ 用归纳法证明, 若 $i<j$, $p < a_i$ 且 $c_1, \ldots, c_m < a_j$, 则

$$\begin{aligned} N \models \exists x_{m+1} \cdots Q_n x_n \varphi(\vec{c}, x_{m+1}, \ldots, x_n, p) \leftrightarrow \\ \exists x_{m+1} < a_{j+1} \cdots Q_n x_n < a_{j+n-m} \varphi(\vec{c}, x_{m+1}, \ldots, x_n, p). \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

当 $m = n-1$ 时结论显然成立.

设 $m < n-1$. 令 $\vec{x}_k = (x_k, \ldots, x_n)$. 若

$$N \models \exists x_{m+1} < a_{j+1} \cdots Q_n x_n < a_{j+n-m} \varphi(\vec{c}, \vec{x}_{m+1}, p),$$

则存在 $c_{m+1} < a_{j+1}$

$$N \models \forall x_{m+2} < a_{j+2} \cdots Q_n x_n < a_{j+n-m} \varphi(\vec{c}, c_{m+1}, \vec{x}_{m+2}, p).$$

由归纳假设,

$$N \models \forall x_{m+2} \cdots Q_n x_n \varphi(\vec{c}, c_{m+1}, \vec{x}_{m+2}, p),$$

从而

$$N \models \exists x_{m+1} \cdots Q_n x_n \varphi(\vec{c}, \vec{x}_{m+1}, p).$$

另一方面, 若 $N \models \exists x_{m+1} \cdots Q_n x_n \varphi(\vec{c}, \vec{x}_{m+1}, p)$, 则存在 $k > j$ 和 $c_{m+1} < a_k$ 满足

$$N \models \forall x_{m+2} \cdots Q_n x_n \varphi(\vec{c}, c_{m+1}, \vec{x}_{m+2}, p).$$

再次根据归纳假设,

$$N \models \forall x_{m+2} < a_{k+1} \cdots Q_n x_n < a_{k+n-m-1} \varphi(\vec{c}, c_{m+1}, \vec{x}_{m+2}, p).$$

故

$$N \models \exists x_{m+1} < a_k \forall x_{m+2} < a_{k+1} \cdots Q_n x_n < a_{k+n-m-1} \varphi(\vec{c}, \vec{x}_{m+1}, p).$$

由于 $N \prec_{\Sigma_0} M$,

$$M \models \exists x_{m+1} < a_k \forall x_{m+2} < a_{k+1} \cdots Q_n x_n < a_{k+n-m-1} \varphi(\vec{c}, \vec{x}_{m+1}, p).$$

根据强不可辨性质,

$$M \models \exists x_{m+1} < a_{j+1} \cdots Q_n x_n < a_{j+n-m} \varphi(\vec{c}, \vec{x}_{m+1}, p).$$

由 $N \prec_{\Sigma_0} M$,

$$N \models \exists x_{m+1} < a_{j+1} \cdots Q_n x_n < a_{j+n-m} \varphi(\vec{c}, \vec{x}_{m+1}, p).$$

现在设 $N \models \exists x_1 \cdots Q_n x_n \varphi(\vec{x}, b, p)$, 其中 $b < a_i$, $p < a_i$. 令

$$B = \{c < a_i : N \models \exists x_1 \cdots Q_n x_n \varphi(\vec{x}, c, p)\}.$$

由 (5.4.1) 知,

$$B = \{c < a_i : N \models \exists x_1 < a_{i+1} \cdots Q_n x_n < a_{i+n} \varphi(\vec{x}, c, p)\}.$$

由 $N \models I\Sigma_0$ 知, $b_0 = \min B$ 存在. 这就证明对 $\psi = \exists x_1 \cdots Q_n x_n \varphi(\vec{x}, y, p)$, $N \models L\psi$. □

定义 5.4.3. $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ 的一个 **Paris 序列**是一个满足以下条件的 M-有穷序列 $(a_i : i < \ell)$

(1) $a = a_0 \leq a_i < a_{i+1} < b_0$;

(2) 对所有 $0 < m \leq n$, $\varphi(x, y) \in \Sigma_0$, $\vec{b}_m = (b_m, \ldots, b_{n-1})$ $(m < n)$ 或 $\emptyset$ $(m = n)$, $\vec{p} = (p_0, \ldots, p_m) < a_i$, 若 $\varphi(M, \langle \vec{p}, \vec{b}_m \rangle) \cap b_{m-1}$ 非空, 则 $\varphi(M, \langle \vec{p}, \vec{b}_m \rangle) \cap a_{i+1}$ 非空, 其中 $\langle \vec{p}, \vec{b}_m \rangle = \langle p_0, \ldots, p_m, b_m, \ldots, b_{n-1} \rangle$ $(m < n)$ 或 $\langle p_0, \ldots, p_m \rangle$ $(m = n)$.

引理 5.4.4. $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ 的 *Paris* 序列是 $(n+1)$-强不可辨的.

证明. 设 $(a_i : i < \ell)$ 是 $\vec{b}$ 的一个 Paris 序列. 设 $\varphi(\vec{x}, y) \in \Sigma_0$ 且 $p < a_i < a_{i_1} < \ldots < a_{i_n}$. 则

$$
\begin{aligned}
&M \models \exists x_1 < a_{i_1} \cdots Q_n x_n < a_{i_n} \varphi(\vec{x}, p) \\
&\qquad \Leftrightarrow M \models \exists x_1 < a_{i_1} \cdots Q_{n-1} x_{n-1} < a_{i_{n-1}} Q_n x_n < b_{n-1} \varphi(\vec{x}, p) \\
&\qquad \Leftrightarrow M \models \exists x_1 < b_0 \cdots Q_{n-1} x_{n-1} < b_{n-2} Q_n x_n < b_{n-1} \varphi(\vec{x}, p) \\
&\qquad\quad \Leftrightarrow M \models \exists x_1 < a_{i+1} \forall x_2 < b_1 \cdots Q_n x_n < b_{n-1} \varphi(\vec{x}, p) \\
&\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow M \models \exists x_1 < a_{i+1} \cdots Q_n x_n < a_{i+n} \varphi(\vec{x}, p).
\end{aligned}
$$

□

如同 §5.3, 我们将运用 PH^{n+1} 找到 $\vec{b}$ 使得 $\vec{a}_{\vec{b}}$ 是 $\vec{b}$ 的 Paris 序列.

设 $d, p_0, \ldots, p_m, b_0, \ldots, b_{n-1} \in M$, $\vec{p} = (p_0, \ldots, p_m)$, $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$, $\vec{b}_m = (b_m, \ldots, b_{n-1})$ $(m < n)$ 或 $\emptyset$ $(m = n)$, 令

$$
D_{d,\vec{p},\vec{b}_m,b_{m-1}} = \{i < b_{m-1} : M \models \mathrm{Fml}_{\Sigma_0}(d) \wedge \mathrm{Sat}_{\Sigma_0}(d, [i, \langle \vec{p}, \vec{b}_m \rangle])\},
$$

其中 $\langle \vec{p}, \vec{b}_m \rangle$ 与 Paris 序列定义中的记号一致.

设 $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}) > a$, 定义 $\vec{a}_{\vec{b}} = (a_{\vec{b},i} : i < \ell)$ 如下:

(1) $a_{\vec{b},0} = a$.

(2) 设 $i + 1 < \ell$ 且 $a_{\vec{b},i} \leq b_0$, 若 $a_{\vec{b},i} = b_0$ 则令 $a_{\vec{b},i+1} = a_{\vec{b},i} = b_0$; 否则, 先令

$$
a' = \max\{\min D_{d,\vec{p},\vec{b}_m,b_{m-1}} : d < c, m \leq n, \vec{p} = (p_0, \ldots, p_m) < a_{\vec{b},i}\} + 1,
$$

若 $a' < b_0$ 则令 $a_{\vec{b},i+1} = a'$, 否则令 $a_{\vec{b},i+1} = b_0$.

对任意 $(n+1)$-元组 $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_n) > a$, 令 $\vec{b}_2 = (b_2, \ldots, b_n)$, $b_0\vec{b}_2 = (b_0, b_2, \ldots, b_n)$, $b_1\vec{b}_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, 并定义

$$
C(\vec{b}) = \begin{cases} 0 & \forall i < \ell (a_{b_0\vec{b}_2,i} = a_{b_1\vec{b}_2,i}) \\ \min\{i < \ell : a_{b_0\vec{b}_2,i} \neq a_{b_1\vec{b}_2,i}\} & \text{否则}. \end{cases}
$$

对 $b' > a$, 令 $C_{b'} = C \restriction [[a, b']]^{n+1}$. 由 $M \models \mathrm{PH}^{n+1}$ 及引理 5.2.1, 定义

$$
b = \min\{b' > a : \text{ 对} C_{b'} \text{ 存在} H \text{ 满足引理 5.2.1 的结论}\}. \tag{5.4.2}
$$

取 H 对 C_b 满足引理 5.2.1 的结论.

引理 5.4.5. $C \upharpoonright [H]^{n+1}$ 取常值 0.

证明. 假设 $C \upharpoonright [H]^{n+1}$ 取常值 $i > 0$. 设 $\hat{b}$ 为 H 的最后 $n-1$ 个元素. 由 C 的定义知, $a_{i-1} = a_{b_r \hat{b}, i-1}$ 对所有 $b_r \in H \setminus \hat{b}$ 是固定的. 若 $b_r < b_s < \hat{b}$, 令 $\vec{b}'$ 和 $\vec{b}''$ 分别为 b_r 和 b_s 与 $\hat{b}$ 构成的 n-元组, 则

$$a_{\vec{b}',i} < a_{\vec{b}'',i}.$$

从而有 $d < c$, $m \leq n$ 和 $\vec{p} = (p_0, \ldots, p_m) < a_{i-1}$, s.t.

$$a_{\vec{b}',i} \leq \min D_{d,\vec{p}\vec{b}''_m, b''_{m-1}} \leq a_{\vec{b}'',i},$$

其中 b''_{m-1} 为 $\vec{b}''$ 的第 m 个元素. 类似引理 5.3.5 的证明, 由于 H 是足够大的集合, 这是不可能的. □

取 $\vec{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}) \in [H]^n$ 满足 $b_0 > \min H$. 令 $a_i = a_{\vec{b},i}$ $(i < \ell)$, 则 $a_i < \min H < b_0$, 否则 $C(\min H, b_0, \ldots, b_{n-1}) > 0$. 故 $(a_i : i < \ell)$ 严格递增.

设 $d < c$, $0 < m \leq n$, $\vec{p} = (p_0, \ldots, p_m) < a_i$, 且 $D_{d,\vec{p},\vec{b}_m,b_{m-1}}$ 非空. 由 $a_{\vec{b},i+1}$ 的定义知, $D_{d,\vec{p},\vec{b}_m,b_{m-1}} \cap a_{i+1}$ 非空. 故 $(a_i : i < \ell)$ 是 $\vec{b}$ 的 Paris 序列.

最后, 令 $N = \bigcup_{i<\mathbb{N}} [0, a_i]$. 由引理 5.4.4 和 5.4.2, $N \models I\Sigma_n$. 但根据 (5.4.2), 在 N 中引理 5.2.1 的结论对所有 $C_{a'} \upharpoonright [a, a']^{n+1}$ $(a < a' \in N)$ 不成立. 故

$$N \models I\Sigma_n + \neg\, \mathrm{PH}^{n+1}.$$

索引

参考文献

[1] Andreas Blass. On certain types and models for arithmetic. *J. Symbolic Logic*, 39:151–162, 1974.

[2] Alf Dolich, Julia F. Knight, Karen Lange, and David Marker. Representing Scott sets in algebraic settings. *Arch. Math. Logic*, 54(5-6):631–637, 2015.

[3] Haim Gaifman. On local arithmetical functions and their application for constructing types of Peano's arithmetic. In *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (Proc. Internat. Colloq., Jerusalem, 1968)*, Stud. Logic Found. Math., pages 105–121. North-Holland, Amsterdam-London, 1970.

[4] Petr Hájek and Pavel Pudlák. *Metamathematics of first-order arithmetic*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Richard Kaye. *Models of Peano Arithmetic*, volume 15 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991. Oxford Science Publications.

[6] Roman Kossak and James H. Schmerl. *The Structure of Models of Peano Arithmetic*, volume 50 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006. Oxford Science Publications.

[7] R. Mac Dowell and E. Specker. Modelle der Arithmetik. In *Infinitistic Methods (Proc. Sympos. Foundations of Math., Warsaw, 1959)*, pages 257–263. Pergamon, Oxford-London-New York-Paris, 1961.

[8] J. B. Paris. Some conservation results for fragments of arithmetic. In *Model theory and arithmetic (Paris, 1979–1980)*, volume 890 of *Lecture Notes in Math.*, pages 251–262. Springer, Berlin, 1981.

[9] J. B. Paris and L. A. S. Kirby. Σ_n-collection schemas in arithmetic. In *Logic Colloquium '77 (Proc. Conf., Wrocław, 1977)*, volume 96 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 199–209. North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[10] Th. Skolem. Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. *Fund. Math.*, 23:150–161, 1934.

[11] Th. Skolem. Peano's axioms and models of arithmetic. In *Mathematical interpretation of formal systems*, pages 1–14. North-Holland, Amsterdam, 1955.

[12] Tin Lok Wong. Model theory of arithmetic. `https://blog.nus.edu.sg/matwong/teach/modelarith/`.

[13] 郝兆宽, 杨睿之, 杨跃. *递归论*. 复旦大学出版社, 2018.

[14] 郝兆宽, 杨睿之, 杨跃. *数理逻辑：证明及其限度*. 复旦大学出版社, 2020.