集合论多宇宙观只关乎语言吗?

杨睿之

复旦大学哲学学院

2024 复旦大学逻辑与形而上学学术研讨会

逻辑学仍是哲学有关的吗？

- 现代哲学
  - 语言学转向。形而上学问题是伪问题
  - 形而上学的复兴，如模态问题、时空问题
  - “凡是不能说的，必须保持沉默”
- 现代逻辑
  - 形式语言
  - 康托尔的乐园：诸实无穷的世界
  - 是吗？

逻辑学仍是哲学有关的吗?

- 现代哲学
  - 语言学转向。形而上学问题是伪问题
  - 形而上学的复兴，如模态问题、时空问题
  - “凡是不能说的，必须保持沉默”
- 现代逻辑
  - 形式语言
  - 康托尔的乐园：诸实无穷的世界
  - 是吗?

逻辑学仍是哲学有关的吗?

- 现代哲学
  - 语言学转向。形而上学问题是伪问题
  - 形而上学的复兴，如模态问题、时空问题
  - “凡是不能说的，必须保持沉默”
- 现代逻辑
  - 形式语言
  - 康托尔的乐园：诸实无穷的世界
  - 是吗?

逻辑学仍是哲学有关的吗？

模态（modality）

- 莱布尼兹 *Possibile est, quod non implicat contradictionem.*
- 一致性或无矛盾性是什么意思？
  - 一致性仅仅是一个句法（*syntactic*）概念吗？
  - 例如，我们能否说：不存在一个（遵守 *Peano Arithmetic* 这些算术规律的）包含一个从 PA 到 $0 = 1$ 的证明的可能世界

逻辑学仍是哲学有关的吗?

模态（modality）

- 莱布尼兹 可能性即无矛盾性
- 一致性或无矛盾性是什么意思?
  - 一致性仅仅是一个句法（syntactic）概念吗?
  - 例如，我们能否说：不存在一个（遵守 Peano Arithmetic 这些算术规律的）包含一个从 PA 到 $0 = 1$ 的证明的可能世界

逻辑学仍是哲学有关的吗?

模态（modality）

- 莱布尼兹 可能性即无矛盾性
- 一致性或无矛盾性是什么意思?
  - 一致性仅仅是一个句法（syntactic）概念吗?
  - 例如，我们能否说：不存在一个（遵守 Peano Arithmetic 这些算术规律的）包含一个从 PA 到 $0 = 1$ 的证明的可能世界

逻辑学仍是哲学有关的吗？

模态（modality）

- 因为任何数学结构都可以被编码为集合，一个集合论宇宙自然可以被看作是一个纯数学的世界（的模型）
- 集合论多宇宙观大致是模态实在论的纯数学版本
- “纯数学版的可能世界理论”可提供的启发
  - 更准确地处理跨界同一性（transworld identity）
  - 更准确地谈论真条件

集合论多宇宙观

主要问题：集合论多宇宙观（Set Theoretical Multiverse View）只关乎语言吗？它只源于一些语言现象（如不完全性）吗？

集合论多宇宙观

主要问题: 集合论多宇宙观（Set Theoretical Multiverse View）只关乎语言吗？它只源于一些语言现象（如不完全性）吗？

集合论多宇宙观

这与一般的模态形而上学相关，但其问题意识主要来自于数学哲学本身

集合论哲学主要问题: 集合论是关于（实）无穷的理论吗，疑惑只是一些语言游戏?

- 形式主义
- 实在论

集合论多宇宙观

- 集合论多宇宙观被作为单一宇宙观的对立面而提出
- 单一宇宙观（Universe View）：集合论是关于那个包含所有集合的集合宇宙的 — 集合实在论的标准立场
- 多宇宙观：存在不同的集合宇宙，其背后存在不同的集合概念，因而对诸如连续统假设是否为真这样的测试问题有与单宇宙观不同的看法

集合论多宇宙观

This abundance of set-theoretic possibilities poses a serious difficulty for the universe view, for if one holds that there is a single absolute background concept of set, then one must explain or explain away as imaginary all of the alternative universes that set theorists seem to have constructed. This seems a difficult task, for we have a robust experience in those worlds, and they appear fully set theoretic to us.

(Hamkins, 2012)

集合论多宇宙观

多宇宙观的来源：构造另类集合宇宙的方法

- 内模型
- 力迫法（Forcing）— “外模型”
- 集合模型
- 初等子模型、超幂，等等

集合论多宇宙观

内模型 是指在一个集合论模型 V 中（参数）可定义的子模型。例如，哥德尔的可构成集类 L：我们可以写出一个公式 $\varphi_L(x)$ 使得

$$L = \{x \mid \varphi_L(x)\}$$

由此，V 中可以谈论某个句子在 L 中成立：$L \vDash \varphi$。并且 ZF $\vdash$ “$L \vDash x \neq x$” $\rightarrow x \neq x$。由于 ZF $\vdash$ “$L \vDash$ ZF + CH”。那么，假设 ZF + $CH \vdash x \neq x$，ZF $\vdash$ “$L \vDash x \neq x$”，因而 ZF $\vdash x \neq x$。故

$$\mathrm{Con(ZF)} \rightarrow \mathrm{Con(ZF + CH)}$$

集合论多宇宙观

内模型 是指在一个集合论模型 V 中（参数）可定义的子模型。例如，哥德尔的可构成集类 L：我们可以写出一个公式 $\varphi_L(x)$ 使得

$$L = \{x \mid \varphi_L(x)\}$$

由此，V 中可以谈论某个句子在 L 中成立：$L \vDash \varphi$。并且 $\mathsf{ZF} \vdash$ "$L \vDash x \neq x$" $\to x \neq x$。由于 $\mathsf{ZF} \vdash$ "$L \vDash \mathsf{ZF} + \mathsf{CH}$"。那么，假设 $\mathsf{ZF} + CH \vdash x \neq x$，$\mathsf{ZF} \vdash$ "$L \vDash x \neq x$"，因而 $\mathsf{ZF} \vdash x \neq x$。故

$$\mathrm{Con}(\mathsf{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathsf{ZF} + \mathsf{CH})$$

集合论多宇宙观

力迫法 可以用来一个集合论模型 V 中“描述”一个“外模型” $V[G]$，其中添加了不在 V 中的东西 G。例如 $\aleph_2$ 个不同的实数，从而 $V[G] \vdash \neg\mathsf{CH}$。注意：$V[G] \vdash \neg\mathsf{CH}$ 仍然可以是 V 中可以说的一个集合论语句。并且 $\mathsf{ZFC} \vdash$ “$V[G] \vdash \mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{CH}$”。同样，$\mathsf{ZFC} \vdash$ “$V[G] \vdash x \neq x$” $\to x \neq x$，所以

$$\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{CH})$$

集合论多宇宙观

集合模型 往往被用来证明某个集合论公理的一致性严格地强于另一个。例如，ZFC+“存在不可达基数” 可以证明 $V_\kappa \vDash$ ZFC+“不存在不可达基数”，因而

$$\text{ZFC} + \text{“存在不可达基数”} \vdash \text{Con}(\text{ZFC} + \text{“不存在不可达基数”})$$

其中 κ 是最小的不可达基数

集合论多宇宙观

- 模态形而上学的 Sententialism（如卡尔纳普）不区分满足同样语句的可能世界
- 内模型、力迫法和集合模型几乎穷尽了我们构造满足不同语句的集合宇宙的方法
- John R. Steel 版本的复宇宙（multiverse）反映了这种多宇宙观

Steel 的复宇宙（简化版）

MV1 每个宇宙都是 ZFC 模型，它们都是传递真类的，一个对象是集合当且仅当它属于某个宇宙

MV2.1 每个宇宙 W 中的每个偏序集 $\mathbb{P}$ 都生成一个力迫扩张 $W[G]$

MV2.2 如果宇宙 U 是某个对象 W 的力迫扩张 $U = W[G]$，那么 W 是一个宇宙

MV3 对任何大基数假设 φ，所有宇宙 $W \models \varphi$

Steel 的复宇宙（简化版）

- 不需要特别考虑内模型
- 大基数假设是为了最大化其复宇宙理论的解释力强度，也因此有满足任意强（一致）理论的集合模型
- Steel 的复宇宙又称作 generic 复宇宙

Steel 复宇宙的一些性质

- 可以判定所有二阶算术问题
- 如果 Steel 复宇宙有一个可数模型 M，那么存在一个宇宙 $W \in M$ 以及一个可计算的翻译 t，使得对任何复宇宙语言的语句 φ，

$$W \vDash \varphi \Leftrightarrow M \vDash t(\varphi)$$

- (Usuba 2019) Steel 复宇宙存在一个可定义的核（包含于所有其他宇宙的最小宇宙）

Steel 复宇宙的一些性质

- Steel 的复宇宙理论没有比单一宇宙理论提供更多的信息
- Generic 复宇宙所基于的力迫法可以有布尔值语义解释、内模型解释 (Hamkins and Seabold, 2012)。对"外模型"存在的承诺是不必要的。
- 考虑更多的模型构造方法会不会提供更多的信息?

Hamkins 的极端多宇宙观

对任意集合宇宙 V

- 任何 V 中可定义或可解释的集合论模型都作为宇宙存在
- 任何集合力迫扩张 $V[G]$ 作为宇宙存在
- 存在更高的宇宙 W 和其中的序数 θ 使得 $V \preceq W_\theta \prec W$
- 对任意初等嵌入 $j : V \to M$ 存在宇宙 W 和初等嵌入 $h : W \to V$ 使得 j 是 h 的迭代
- V 从某些更好的宇宙看来是可数的、非良基的，甚至是某个满足 $V = L$ 的宇宙中的可数传递模型

Hamkins 的极端多宇宙观

Hamkins 多宇宙观考虑的不仅仅是对独立性现象的解释，而是契合集合论学家工作时实际的思考方式

- 把 V 看作可数传递集合可以保证 $V[G]$ 存在
- 人们常常要考虑非良基的 V 和 M 但 M 在 V 中传递
- 超幂迭代中常常要在某个被嵌入的宇宙中工作

Hamkins 的极端多宇宙观

The multiverse view is one of higher-order realism—Platonism about universes—and I defend it as a realist position ... The multiverse view, therefore, does not reduce via proof to a brand of formalism.

(Hamkins, 2012)

Steel 论 Hamkins 的多宇宙观

An extreme here is Hamkins' multiverse ..., whose first-order theory, if it were formalized so as to have one, would probably be an arithmetic set.

(Steel, 2014)

Steel 论 Hamkins 的多宇宙观

- 诸如 PA、ZFC 等公理化理论都是算术集
- 一阶算术理论不是算术集
- 集合实在论者：集合宇宙的真不是算术集
- Hamkins 复宇宙的真可能是算术集，因为它反映的只是我们已知的集合模型构造方法

Hamkins 论大基数强度线性排列

Another more subtle counterpoint to the linearity phenomenon consists of the observation that we lack general methods for proving instances of nonlinearity in consistency strength. We usually prove a failure of consistency implication by proving the converse implication, but this method, of course, can never establish nonlinearity. In this sense, the observed linearity phenomenon might be an instance of confirmation bias: we see no instances of nonlinearity because we have no tools for observing nonlinearity.

(Hamkins, 2020)

現在公開可能な情報

- 至少目前的集合论复宇宙理论不像算术理论或集合论那样蕴涵明显超出有穷主义数学的信息。我们无法由此断言它有超出语言游戏的内容
- 人们并非一开始就发现自然数和集合宇宙结构的全部复杂性，例如 Presburg Arithmetic, Set-theoretic Mereology。这种发现有没有可能发生在集合论复宇宙上?

Reference:

- Bagaria, J., Steel's Programme: Evidential Framework, The Core and Ultimate-L. *The Review of Symbolic Logic*, 16(3), 2023.
- Barton, Neil, Forcing and the Universe of Sets: Must We Lose Insight? *Journal of Philosophical Logic*, 49:575–612, 2020
- Hamkins, J. D., The set-theoretic multiverse. *The Review of Symbolic Logic*, 2012, 5, 416-449.
- Hamkins, J. D., *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, The MIT Press, 2020.
- Hamkins, J. D. and Seabold,. Well-founded Boolean ultrapowers as large cardinal embeddings. arXiv:1206.6075 [math.LO].
- Koellner, P., Hamkins on the Multiverse. `http://logic.harvard.edu/EFI_Hamkins_Comments.pdf`, 2013.
- Leibniz G. W., BAND 2 1663-1672: Mit Untersuchungen und Erläuterungen, Verzeichnissen, sowie Berichtigungen zu Band 1, Akademie Verlag, 1990.
- Maddy, P., Set-theoretic foundations. In *Foundations of Mathematics*. Contemporary Mathematics, 2017.
- Steel, J. R., Gödel's program. In *Interpreting Gödel: Critical Essays*. Cambridge Universe Press, 2014.