浅谈数学内在的后验性

冯琦

清华大学哲学系

2021年8月21日

I

引言

I. 引言

基本问题

Question

数学知识到底是先验的，还是后验的？

I. 引言

基本问题

From 《Oxford Companion to Philosophy》:

From 《Oxford Companion to Philosophy》:

Knowledge is said to be a priori when it does not depend for its authority upon the evidence of experience, and a posteriori when it does so depend.

From 《Oxford Companion to Philosophy》:

Knowledge is said to be a priori when it does not depend for its authority upon the evidence of experience, and a posteriori when it does so depend.

Mathematics provides the most often cited examples of a priori knowledge.

I. 引言

出发点

- 自然界实在的序甚至比自然界实在的形对于人类来说更富启迪作用；

- 自然界实在的序甚至比自然界实在的形对于人类来说更富启迪作用;
- 彻底离散线性比较与排序是人类最基本的一种直观本能行为;

- 自然界实在的序甚至比自然界实在的形对于人类来说更富启迪作用;
- 彻底离散线性比较与排序是人类最基本的一种直观本能行为;
- 彻底离散线性序是远古先人最初始的一种抽象;

- 自然界实在的序甚至比自然界实在的形对于人类来说更富启迪作用；
- 彻底离散线性比较与排序是人类最基本的一种直观本能行为；
- 彻底离散线性序是远古先人最初始的一种抽象；
- 彻底离散线性序之序型是自然数的第一本性，自然数的序本性。

- 自然界实在的序甚至比自然界实在的形对于人类来说更富启迪作用；
- 彻底离散线性比较与排序是人类最基本的一种直观本能行为；
- 彻底离散线性序是远古先人最初始的一种抽象；
- 彻底离散线性序之序型是自然数的第一本性，自然数的序本性。

- 自然界实在的序甚至比自然界实在的形对于人类来说更富启迪作用；
- 彻底离散线性比较与排序是人类最基本的一种直观本能行为；
- 彻底离散线性序是远古先人最初始的一种抽象；
- 彻底离散线性序之序型是自然数的第一本性，自然数的序本性。

- 自然界实在的一种序是某种特定的客观上可直观比较的共性与差别在同一时空中的自然显现，

- 自然界实在的序甚至比自然界实在的形对于人类来说更富启迪作用;
- 彻底离散线性比较与排序是人类最基本的一种直观本能行为;
- 彻底离散线性序是远古先人最初始的一种抽象;
- 彻底离散线性序之序型是自然数的第一本性，自然数的序本性。

- 自然界实在的一种序是某种特定的客观上可直观比较的共性与差别在同一时空中的自然显现,
- 自然界实在的一种形则仅仅是对一定时间区间上一定范围内空间的某种特定分割的边界;

- 自然界实在的序甚至比自然界实在的形对于人类来说更富启迪作用；
- 彻底离散线性比较与排序是人类最基本的一种直观本能行为；
- 彻底离散线性序是远古先人最初始的一种抽象；
- 彻底离散线性序之序型是自然数的第一本性，自然数的序本性。

- 自然界实在的一种序是某种特定的客观上可直观比较的共性与差别在同一时空中的自然显现，
- 自然界实在的一种形则仅仅是对一定时间区间上一定范围内空间的某种特定分割的边界；
- 相对而言，线性比较是比明确空间分割边界更为直观更容易完成的过程。

II

直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

从最熟悉最直观的地方开始

主题：
直观线性比较以及彻底离散线性排序对于形成自然数观念以及自然数运算律观念的启迪作用

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

从最熟悉最直观的地方开始

主题：
直观线性比较以及彻底离散线性排序对于形成自然数观念以及自然数运算律观念的启迪作用

在相当长的历史时期内一直被数学思考者忽略的原本是最直观和最熟悉的彻底离散排序作用

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

最熟悉最直观的排序例子

- 雨后彩虹七色光，赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫。

- 雨后彩虹七色光，赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫。
- 按频率：由低向高，顺序递增排列；

- 雨后彩虹七色光，赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫。
- 按频率：由低向高，顺序递增排列；
- 按波长：由长至短，顺序递减排列。

- 雨后彩虹七色光，赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫。
- 按频率：由低向高，顺序递增排列；
- 按波长：由长至短，顺序递减排列。

- 雨后彩虹七色光，赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫。
- 按频率：由低向高，顺序递增排列；
- 按波长：由长至短，顺序递减排列。

五行之序：金、木、水、火、土。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

最熟悉最直观的排序例子

- 雨后彩虹七色光，赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫。
- 按频率：由低向高，顺序递增排列；
- 按波长：由长至短，顺序递减排列。

五行之序：金、木、水、火、土。

孰先孰后，并无必然一定之规，依赖根据需要的选择。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

生活中的线性比较

1. 树分粗细，枝分高矮，势分高低，

1. 树分粗细，枝分高矮，势分高低，
2. 湖分大小，潭分深浅，河分宽窄，

1. 树分粗细，枝分高矮，势分高低，
2. 湖分大小，潭分深浅，河分宽窄，
3. 事分缓急，人分先后，物分轻重，

1. 树分粗细，枝分高矮，势分高低，
2. 湖分大小，潭分深浅，河分宽窄，
3. 事分缓急，人分先后，物分轻重，
4. 光有明暗，季有冷热，杆有长短，

1. 树分粗细，枝分高矮，势分高低，
2. 湖分大小，潭分深浅，河分宽窄，
3. 事分缓急，人分先后，物分轻重，
4. 光有明暗，季有冷热，杆有长短，
5. 有上有下，有前有后，有左有右，……

1. 树分粗细，枝分高矮，势分高低，
2. 湖分大小，潭分深浅，河分宽窄，
3. 事分缓急，人分先后，物分轻重，
4. 光有明暗，季有冷热，杆有长短，
5. 有上有下，有前有后，有左有右，……

1. 树分粗细，枝分高矮，势分高低，
2. 湖分大小，潭分深浅，河分宽窄，
3. 事分缓急，人分先后，物分轻重，
4. 光有明暗，季有冷热，杆有长短，
5. 有上有下，有前有后，有左有右，……

直观比较是人类最基本最初始的一种行为；
仅仅依靠人体五官就能实现的比较和区分、或者凭常识指导下的观察就能实现的比较和区分；
唯一需要的是关于较高或较矮或等高，较长或较短或同样长短，这些观念的共识；

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

比较结果的真假判定问题

所关注的对象是由诸如人、树、湖、河、竹竿、木棍、绳索、牛、马、羊、水果糖、房屋、风、雨、山、鏊等这些名词所指代的客观的实在事物；
它们之间自然就有或大或小、或多或少、或长或短、或宽或窄、或深或浅、或高或矮、或冷或热、或者同样，等这样的客观现象；
相关事物之间的共同之处以及那些或有或无的差别是独立于我们的自然现象；
正是因为它们首先在那，然后才有我们去对它们观察感知；
并且我们对它们的观察感知不会对它们的自然形态带来任何干扰；
我们经过观察感知形成的比较观念是对它们之间客观上的共同之处以及或有或无的差别的一种抽象反映或认识。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

比较结果的真假判定问题

无论是涉及到的观念性名词还是对具体事物间在常识指导下进行无干扰比较的结果都需要名副其实地与客观实际(在可容忍的误差范围内)相符。

只有这样，我们的比较才算合乎现实合乎实际，我们所得到的有关比较的结果才算是一条事实或者基本真理。

这样经过观察感知所得到的比较结果是后验的，不是先验的。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

标杆光影之长短与地球四季之分

在一个开阔的平地上竖立一根标杆，标杆经太阳照射在地面上留下的阴影就是一条直线线段。

以在地面上留下相应的痕迹的方式记录下来这些阴影直线线段(比如每五分钟记录一次)，就得到一天之内的一系列的长短变化着的直线线段。

这一天之内就会有一条最短的阴影直线线段。姑且称之为**正午线段**。

假设在足够长的时间范围内，可以得到一年之内的每一天的正午线段。那么这些正午线段的全体在长短比较下形成一种**准彻底离散线性序**排列。

这些正午线段中必有一条最长的和最短的。这条最长的正午线段所对应的日子便是冬至日；

这条最短的正午线段所对应的日子便是夏至日。

想强调的是这里的阴影线段之长短比较不涉及任何关于直线线段的度量，是纯粹的实在比较。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

卦爻序

据传，上古时期，大概起始于七千多年前，伏羲制作八卦。
据《周易·系辞下》所写："古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地；观鸟兽之文与地之宜；近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。作结绳而为网罟，以佃以渔，盖取诸离。"

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

卦爻序

伏羲用三个整体(实)线段(阳爻)或者割裂(虚)线段(阴爻)的从上到下平行排列的不同组合来表示八种卦爻：
乾(实-实-实)、兑(虚-实-实)、离(实-虚-实)、震(虚-虚-实)、
巽(实-实-虚)、坎(虚-实-虚)、艮(实-虚-虚)、坤(虚-虚-虚)，
其中从左到右横排的虚-实序列对应着古时候书写时的自上而下的竖排序列，因此横排虚实序列所对应的是自上而下平行排列的直线线段图案。

111	110	101	100	011	010	001	000
☰	☱	☲	☳	☴	☵	☶	☷
乾	兑	离	震	巽	坎	艮	坤
天	泽	火	雷	风	水	山	地

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

卦爻序

无论是书写，还是朗读，这八种卦爻的排列都展现了一种自然规定的顺序。

为了有助于实现对八种卦爻的语义解释，古人还为这八种卦爻分别设置了别名；

乾-天、坤-地、坎-水、离-火、巽-风、震-雷、艮-山、兑-泽。

这八种卦爻的自然顺序可以被看成是远古时期古人对具体的固定长短的彻底离散线性序的等价类或者序型的一种抽象表示。

有趣的是我国古人的这种虚-实线段序列事实上成为莱布尼兹在十七世纪引进二进制的先导。

如果用1 表示实直线段；用0 表示虚直线段，用长度为3 的0-1数字串来表示所有的由三条虚-实线段按照自下而上平行排列的图案(如图所示，从左到右排列的数字串表示自下而上排列的虚实线段)，那么表示这些自下而上的虚实线段的0-1符号串恰好就是最初的八个自然数的二进制表示：

$$
\begin{array}{lllllll}
0 & = & 000, & \quad & 4 & = & 100, \\
1 & = & 001, & & 5 & = & 101, \\
2 & = & 010, & & 6 & = & 110, \\
3 & = & 011, & & 7 & = & 111.
\end{array}
$$

于是，古人赋予八种卦爻的自然排列顺序事实上就是最初的八个自然数的从大到小的自然排列：

乾	兑	离	震	巽	坎	艮	坤,
7	6	5	4	3	2	1	0.

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

天干序与地支序

据说早在公元前2697年，于中华始祖黄帝建国时，命大挠氏探察天地之气机，探究五行(金、木、水、火、土)，始作天干地支，并整合为六十甲子，用为纪历之标识符号。

用十天干和十二地支来记年、月、日、时辰。

天干序(十个天干)：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；

地支序(十二个地支)：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。

无论是天干还是地支，书写(位置)的顺序即这些汉字之间的**先后顺序**：左(上)边的**先于**右(下)边；

同样默认先后关系的传递性。

如此这般，十个天干被赋予一种自然彻底离散线性序；十二个地支也被赋予一种自然彻底离散线性序。

天干序与地支序可以被看成是分别对具体的固定长短的彻底离散线性序的等价类或者序型的抽象表示。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

天干序与地支序

【从“八”到“十”和“十二”，历经大约三千年。】

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

天干地支整合—螺旋序

↗	乙亥	↗	丁亥	↗	己亥	↗	辛亥	↗	癸亥
甲戌	↗	丙戌	↗	戊戌	↗	庚戌	↗	壬戌	↗
↗	乙酉	↗	丁酉	↗	己酉	↗	辛酉	↗	癸酉
甲申	↗	丙申	↗	戊申	↗	庚申	↗	壬申	↗
↗	乙未	↗	丁未	↗	己未	↗	辛未	↗	癸未
甲午	↗	丙午	↗	戊午	↗	庚午	↗	壬午	↗
↗	乙巳	↗	丁巳	↗	己巳	↗	辛巳	↗	癸巳
甲辰	↗	丙辰	↗	戊辰	↗	庚辰	↗	壬辰	↗
↗	乙卯	↗	丁卯	↗	己卯	↗	辛卯	↗	癸卯
甲寅	↗	丙寅	↗	戊寅	↗	庚寅	↗	壬寅	↗
↗	乙丑	↗	丁丑	↗	己丑	↗	辛丑	↗	癸丑
甲子	↗	丙子	↗	戊子	↗	庚子	↗	壬子	↗
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

《周易》卦象序

据说，《周易》六十四卦象，是西伯侯姬昌(周文王，公元前1152-公元前1056)在被纣王囚禁关押的七年间，在狱中潜心研究伏羲八卦，在八卦的基础上推演所创的。

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	乾天	坤地	水雷	山水	水天	天水	地水	水地
1	风天	天泽	地天	天地	天火	火天	地山	雷地
2	泽雷	山风	地泽	风地	火雷	山火	山地	地雷
3	天雷	山天	山雷	泽风	坎水	离火	泽山	雷风
4	天山	雷天	火地	地火	风火	火泽	水山	雷水
5	山泽	风雷	泽天	天风	泽地	地风	泽水	水风
6	泽火	火风	震雷	艮山	风山	雷泽	雷火	火山
7	巽风	兑泽	风水	水泽	风泽	雷山	水火	火水

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

《周易》卦象序

这个阵列中卦象的排序是上面的行整体上先于下面的行；每一行中，左边的先于右边的。最上面一行和最左边一列中的数字只是用来标识行与列的，与阴阳爻的二进制数表示无关。

《周易》卦象中应用了伏羲八卦之爻名与别名之间的对应：

乾-天、坤-地、坎-水、离-火、巽-风、震-雷、艮-山、兑-泽。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

《周易》卦象序

除了按照歌谣易记的原则，据传说，《周易》六十四卦象的排序依照某种内在的“义理”原则。按照古人说法，这种顺序排列反映了世界产生、发展、变化的过程，以乾坤为首，象征着世界万物开始于天地阴阳，乾为阳，为天；坤为阴，为地。乾坤之后为屯、蒙。屯、蒙，象征着事物刚刚开始，处于蒙味时期，等等。《周易》上经(前三十个卦象)终止于坎、离。坎为月，离为日，有光明之义，象征万物万事活生生地呈现出来。《周易》下经(后三十四个卦象)以咸恒为始，象征天地生成万物之后，出现人、家庭、社会。咸为交感之义，指男女交感，进行婚配；恒，恒久，指夫妇白头到老。社会形成以后，充满矛盾，一直到最后为既济、未济。既济，指成功，完成；未济表示事物发展无穷无尽，没有终止。《周易》作者力图使《周易》六十四卦排列符合世界进化过程。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

《周易》卦象序

《周易》六十四卦象阵列排序是对伏羲八种卦爻序的一种整合。这种整合不同于最直接的字典序方式的整合，并且这种整合中隐藏着“代数式”操作。这些代数式操作确定两种等价关系并借助这些等价关系确定两种对偶性：**倒挂对偶性**以及**置反对偶性**。排列中的奇偶组合便是这些对偶性的等价类的展现。似乎远古时期先人们的深邃的直觉和智慧很有可能没有被后人所领悟，有些甚至被后人所忽略或掩盖或歪曲。虽然有唐人孔颖达最先观察到这种对偶性，谓之“二二相偶，非覆即变”，但并没有关注到所涉及的“操作”。这种倒挂操作在现代计算机程序设计中就是首尾大循环操作；置反操作就是并联逻辑非门操作。

数学上就将这些比较关系进一步抽象出来，引入一个**小于**关系(或者大于)关系以及**相同**关系，并且约定或者规定：

(1) 较矮者小于较高者(或者较高者大于较矮者)；较短者小于较长者(或者较长者大于较短者)；较少者小于较多者(或者较多者大于较少者)；较轻者小于较重者(或者较重者大于较轻者)；较冷者小于较热者(或者较热者大于较冷者)；如此等等。

(2) 同样高矮者彼此相同；同样大小者彼此相同；同样多少者彼此相同；同样轻重者彼此相同；同样冷热者彼此相同；如此等等。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

从常识性比较到理性比较

数学上进一步假定小于关系与相同关系必须满足下述要求：在所关注的目标物范围内，

(1) 任何目标物总与自身相同；
(2) 对于任意两个目标物而言，如果甲物与乙物相同，那么乙物也与甲物相同；
(3) 对于任意三个目标物而言，如果甲物与乙物相同，乙物与丙物相同，那么甲物也与丙物相同。
(4) 没有任何目标物会小于(或者大于)自身；
(5) 对于任意三个目标物而言，如果甲物小于乙物，乙物小于丙物，那么甲物也小于丙物；
(6) 对于任意两个目标物而言，或者甲物小于乙物，或者乙物小于甲物，或者甲物与乙物相同，三者必居其一；
(7) 对于任意三个目标物而言，如果甲物小于乙物，乙物与丙物相同，那么甲物也小于丙物；
(8) 对于任意三个目标物而言，如果甲物与乙物相同，乙物小于丙物，那么甲物也小于丙物。

II. 直观实在比较、序知觉、彻底离散线性序概念

从常识性比较到理性比较

由此可以看到对于数学思考者而言，他们关心的是反映客观现象的比较关系应当持有的关联和性质，并不关心这些比较关系曾经涉及到哪一类具体的客观事物以及它们之间的具体的实际自然状态，尽管这些曾经是数学思考者的抽象认识之源。这是因为数学思考者总是致力于用最精辟最简练的表达方式去涵盖尽可能广泛的客观事物、客观现象、客观规律，因此他们也必然致力于发现那些客观事物所携带的最本质的关联，也只有这样，数学思考着所明确提出的作为出发点的基本假设、所抽象出来的概念、所推理得到的结论才具有尽可能广泛的适用范围。

反过来，若将“相同”和“小于”同时解释为等高与较矮、或者等长与较短、或者同样多少与较少、或者等重与较轻、或者等热与较冷、或者等宽与较窄，则上面的八条性质就都为真理。就是说，数学上关于“相同”和“小于”这一对涉及两个目标物的关系的八条特性正是日常对事物观察比较的事实的本质抽象。这种抽象将日常生活观念与常识转变成了数学概念，将实在对象与存在对象对应起来。

用符号$<$ 来表示“小于”，用符号$>$ 来表示“大于”，用$\equiv$ 来表示“相同”，用大写字母M 来表示所关注的目标物的范围，用小写的字母x, y, z 来表示M 范围内的任意一个目标物。按照这样的约定，上面所说的就可以用如下的符号表达式来陈述：
对于M 中任意的目标物x, y, z，总有如下命题成立：

(1) $x \equiv x$；(自反性)

(2) 如果$x \equiv y$，那么$y \equiv x$；(对称性)

(3) 如果$x \equiv y$ 并且$y \equiv z$，那么$x \equiv z$；(传递性)

(4) 一定不会有$x < x$ 发生；(全然非自反)

(5) 如果$x < y$ 并且$y < z$，那么$x < z$；(传递性)

(6) 或者$x < y$，或者$y < x$，或者$x \equiv y$，三者必居其一；(可比较性)

(7) 如果$x < y$ 并且$y \equiv z$，那么$x < z$；(上一致性)

(8) 如果$x \equiv y$ 并且$y < z$，那么$x < z$；(下一致性)

Definition (等价关系)

给定包含至少一个对象的一个对象团，记成M。给定M 中两个对象之间的一种关系，记成$\cong$。称$\cong$ 为M 上的一个等价关系当且仅当这个关系具备下述三条特性：

(1) $x \cong x$；(自反性)

(2) 如果$x \cong y$，那么$y \cong x$；(对称性)

(3) 如果$x \cong y$ 并且$y \cong z$，那么$x \cong z$。(传递性)

Axiom (恒等假设)

任意给定一个至少含有一个对象的对象团M，任给M 上的一个等价关系$\cong$，无论x, y 为M 中之何物，总有如下真实事实：

(1) $x = x$；(自反性)

(2) 如果$x = y$，那么$y = x$；(对称性)

(3) 如果$x = y$ 并且$y = z$，那么$x = z$；(传递性)

(4) 如果$x = y$，那么$x \cong y$。

恒等假设也被称为**等号公理**。

Definition (线性序)

给定包含至少一个对象的一个对象团，记成M。给定M 中两个对象之间的一种二元关系，记成$\prec$。称$\prec$ 为M 上的一个线性序当且仅当这个关系具备下述三条特性：

(1) 不会有$x \prec x$发生；(全然非自反)

(2) 如果$x \prec y$ 并且$y \prec z$，那么$x \prec z$；(传递性)

(3) 或者$x \prec y$，或者$y \prec x$，或者$x = y$，三者必居其一。(可比较性)

对于任意的一个线性序结构$(M,<)$ 而言，这个线性序结构是一个**彻底离散线性序**结构当且仅当它具有如下特性：

(1) M 的对象中在线性比较$<$ 下既有一个最小者(比任何其它者都小)，也有一个最大者(比任何其它者都大)；

(2) 如果X 是任意地从M 范围内挑选出来的一部分，称为M 的一个**部分团**，并且这个部分团中至少有一个对象(非空)，那么在M 的对象的线性比较$<$ 下X 中既有在X 范围内的最小者，也有在X 范围内的最大者。

注意，一个彻底离散线性序结构的任何一个非空部分在继承下来的线性序下也是一个彻底离散线性序结构。

III

序型观念与自然数观念

III. 序型观念与自然数观念

数值问题

Question

自然数1 到底是多少？自然数到底是什么？

III. 序型观念与自然数观念

数数与排序

扳着指头学数数，是每一个孩童最早反复实践的过程之一。之所以有如此全天下通行之事，就在于大家都有一双天然的随时随地方便使用的指头自然排好序的手。

每一次具体的数数过程都或者是一次先排序再数数的具体过程，或者是一边排序一边数数的具体过程。

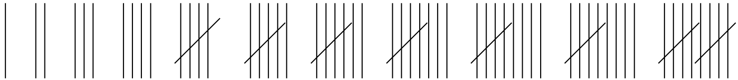
具体的自然的实在的序就在那；发现并认识它们从而形成排序知觉与观念；进而抽象出数学意义上的彻底离散线性序以及在序本性之上提炼出自然数概念。

自然数概念抽象与形成过程的必要前提是形成排序知觉以及抽象出线性序观念。

III. 序型观念与自然数观念

最初的十位自然数数值观念

利用自己的双手中的十根手指，经过经验积累，便足以建立起自己大脑中从“一”到“十”的合乎直观的抽象的自然数观念：比如，用画竖杠的方式来计数；



也可用写正字的笔画顺序以添加笔画的方式来计数；以及后来以汉字的数字来计数：

一、二、三、四、五、六、七、八、九、十。

总之，在大脑中建立起这十个具体的“自然数”观念以及利用它们来具体地数“数”相对而言都是容易的事情。

III. 序型观念与自然数观念

具体排序的彻底离散性

在经常的实在的比较和排序过程中，自然形成一种知觉和常识：任何一次涉及实在事物的具体排序所得到的事实上的一个具体的彻底离散线性序：在具体的典型的自然的排序比较中，总有最小者，总有最大者；任何一个非平凡的部分亦然。

III. 序型观念与自然数观念

具体排序之间的长短比较

任意两个具体的彻底离散线性序都可以相互比较顺序排列的长短：或者一样长，或者乙方排列起来比甲方排列起来的短，也就是与甲方的一个真前段的排列一样长。

一个重要的潜在事实就是任何一个具体的彻底离散线性序的任何非空部分团在继承下来的线性序下依旧是一个彻底离散线性序，并且自然地序同构于原彻底离散线性序的一个前段。

在经常的具体的彻底离散线性序的排列过程中，自然产生了彻底离散线性序序型的观念，以及抽象地比较这种序型长短的知觉或常识。

III. 序型观念与自然数观念

比较与排序观念

观察现实世界中的实在之物的一种自然和直观的行为就是对两者进行比较。“有比较才有鉴别。”通过比较，去发现不同事物之间差异和共同之处。在所有的比较行为中，最简单最直接最合乎直观的抽象就是那种可以依据直接比较对事物进行一种“排序”。在所有的实际的排序中，最简单最直接最合乎直观的是一种可以排成一条“直线”的“顺序”(通常所说的“按一字形排开”)，因为在所有的对于物体形状的抽象中，“直线段”是最简单最直接最合乎直观的几何对象。

有理由认为“直线段”就是来自对类似于一根“竹竿”、一根短小的“树枝”或者“木棍”、广场中央的一根标杆在广场平面上的阳光影像、等等这些实在之物的直观抽象。

III. 序型观念与自然数观念

比较与排序观念

在最简单的“是非”“曲直”观念下，还有什么比由短木棍或短竹竿做成的可以当成标杆的实在之物更能实现对“直线段”的合乎观念的实在而具体的解释呢？(事实上，全球度量长度的标杆就是在一个固定地方在一个固定环境下存放着的钢条，并以此作为“一米长”的标准度量尺度。)

因此，我们认为古人早有“排序”的观念，甚至可以认为在古人那里“排序”就是“直线型排序”或者“线性排序”的同义观念；

III. 序型观念与自然数观念

比较与排序观念

我们还认为“排序”观念与“正邪”观念(几何中的两条直线相互垂直则为“正交”，非垂直相交者为“邪交”)、“方圆”观念、“矩圭箕”观念(矩形、直角三角形、梯形)等这些初等几何观念属于同一层次的对实在之物观察和抽象的结果。

我们可以认为通过排序来数数(本质上还包括通过利用标杆来确定倍数)就自然而然地导致“自然数”观念;

通过排序比较来确定半数以及通过对分来确定半数就自然而然地导致“分数”观念;

在这样的基础上，结合“并”观念，就获得关于直线段长度度量结果的“数”观念。因此，我们以为“数”观念是一种更高层次观察与抽象的结果。

III. 序型观念与自然数观念

比较与排序观念

同时我们也想强调直线段的长度是在一种标杆约定的基础上度量出来的，而规则几何图形的面积是按照规定计算出来的。《九章算术》(第一卷)方田卷中的38 道算术题就全都是关于几种规则几何图形的耕地的面积计算问题(包括答案以及计算规则和计算方法)。

因此，“彻底离散线性序”观念是一种可以和“直角”(或者“矩”)观念以及“圆”观念类比的基本观念。自然数的序本性是比自然数的基数本性更为基本的特性。自然数的序本性在数学的发展中，尤其是当实在无穷被当成数学对象之后，所显现的基本作用是巨大的，诚如有理数的序本性以及实数的序本性在整个数学发展中所显现的基本作用那样。

III. 序型观念与自然数观念

序型观念与序型比较

我们所熟悉自然数结构中的“1”其实“只是一个符号”，没有如同人们以为的那样赋予任何先验的含义。

或许读者对于这一点会有不以为然的感觉，因为从小开始所接受的学校教育或者家庭教育都告诫我们符号“1”(或者汉字的“一”)就被赋予了“先验性”的“数值”。比如，我们从小就学会后面这些短语是什么意思：1棵树，1张桌子，1 把椅子，1 个人，1根手指头，1根木棍，1 件衣服，1 尺布，1 斤米，1 袋面粉，1 捆柴禾，1团棉花，1床棉被，1 条鱼，1 条狗，1 头牛，1 头猪，1 匹马，1 只猫，1 只鸡，1 只羊，1 只虎，1辆汽车，1架飞机，1 列火车，1 艘轮船，1 间房屋，1 栋办公楼，等等，等等。没错，当特殊符号1 与一个量纲一起使用的时候，在我们常识性的理解中，它被赋予了一种确切的“数值”含义：在所有与量纲相符的同类实在之物的多少比较中，1 标志着最少的情形，也就是说，在同类事物的排序中被排在最前面的事物所在的位置就是这个符号1 被赋予的一种“数值”含义。

III. 序型观念与自然数观念

序型观念与序型比较

原则上，同类事物总具有某种自然的离散可比性，然后依照这种自然的离散可比性将任何一团同类事物进行排序，从而可以区分部分和部分以及部分与整体之间的多与少；不同类型的事物之间往往缺乏自然的离散比较排序的方式，因此往往多不具备自然离散可比性。

但是，我们可以将两团不同类事物分别按照各自的自然的比较排序，然后在这两种排序之间建立起一种所排序列的位置之间的对应。由于这两种排序位置序列具有自然的“刚性”，力图建立起来的“序同构”可能是部分的(其中之一已经被用完了所有的位置资源，而另外一个还有剩余)，也可能是全部的(两者同时用尽所有的位置资源)。当第一种情形发生时，结果就是先用完位置资源的一方与尚有结余的另一方的一个前段序同构；当第二种情形发生时，两者序同构。于是，我们可以得到的结论是：两团不同种类的事物，按照它们各自的自然比较离散排序，要么一团与另一团的一个前段序同构，要么它们彼此序同构。

III. 序型观念与自然数观念

序型观念与序型比较

同样的事情也会发生在同类事物的离散比较中：既可以有部分与整体的排序比较，也可以有多种不同的自然离散排序。比如，我们的两只左右手在我们面前有八种不同组合的平面摆放方式(自然的左右摆放、左右交叉摆放、单双背面朝上、单双手掌朝上)，每一种摆放方式都确定了十根手指从左向右的一种自然排序，因此，我们的十根指头从左向右的平面离散排序方式共有八种。这八种自然离散排序都事实上序同构：离散顺序摆放十根手指的相对位置总是一样的，或者说不变的，只有在哪个相对位置上摆放哪一根手指的差别。

III. 序型观念与自然数观念

序型观念与序型比较

举例来说，现假设在一个广袤、空旷而且平坦的地方有三样(不知其数的)东西：鹅卵石若干、木棍子若干、活鱼若干，并且假设：(甲) 有一堆大小不一的鹅卵石，并且其中任何两个不同的鹅卵石都仅凭经验和观察都能准确判定哪一个较大哪一个较小；(乙)有一堆长短不一的木棍子，并且其中任何两根不同的木棍子都能仅凭经验和观察就能准确判定哪一根较长哪一根较短；(丙)有一堆活鱼大小轻重不一，并且对一目了然就能区分大小者较大者较重，较小者较轻；对不能用简单的目测法区分轻重者，可以用一部简易的没有标识刻度的天枰来判定两条看起来大小差别不大的活鱼中哪一条较重哪一条较轻。对于鹅卵石情形(甲)，将鹅卵石按照从小到大自西向东递增地一字形排列开来；对于木棍子情形(乙)，将木棍子按照从短到长自西向东递增地一字形平行地排列在鹅卵石队列的南面；对于活鱼情形(丙)，将活鱼按照从轻到重自西向东递增地一字形平行地排列在木棍子队列的南面。

假设这种排列过程以一种细致的方式进行以至于三个平行队列组成一个行距(南北间距)和列距(西东间距)整齐一致的矩阵(若某一行出现资源不足，则以空格标识)。这时会有如下几种可能局面出现：

(1) 三行都同时用尽所给定的资源，即没有一行需要用空格来补充；(包括一种可能性)；
(2) 三行中有两行同时用尽所给定的资源，而另外一行需要用空格来补充；(包括三种可能性)；
(3) 三行中有两行同时用尽所给定的资源，但都需要用空格来补充；(包括三种可能性)；
(4) 三行中没有任何两行同时用尽所给定的资源(因此有两行需要用空格来补充，但有一行比另外一行需要用更多的空格来补充)。(包括六种可能性)。

III. 序型观念与自然数观念

序型观念与序型比较

任何时候，在给定资源之后，这四种局面中必有一种且只有一种会真实出现。当局面(1)出现时，所排列出来的三种自然离散线性序彼此序同构，并且它们所排成的各自行(自西向东)中的列的顺序位置就明确着这种序同构(对应)；(这时称它们具有**相同序型**)；当局面(2)出现时，因资源不足需要用空格来补充的那一行就与其它两行的由与第一个空格出现的列的位置所给出的前段序同构，而那两个不需要空格补充的行则彼此序同构；(这时称资源不足的那一行的序型与另外两个具有相同序型者的序型比起来**较短**)；当局面(3)出现时，因资源同时显示出不足的两行彼此序同构，且它们都与资源比较充足的那一行的由与第一个空格出现的列的位置所给出的前段序同构；(此时称资源相对充足的那一行的序型与另外两个具有相同序型者的序型比起来**较长**)；

当局面(4)出现时，最先表现出资源不足者与第二个表现出资源不足者的一个前段序同构；第二个表现出资源不足的行与不需要空格补充的那一行的前段序同构，从而最先表现出资源不足的那一行也与资源充足的那一行的一个前段序同构，并且这个前段还是与第二个表现出资源不足的那一行序同构的前段的一个前段，此时称它们彼此序型都不同，并且一个最短，一个最长，一个居中。

原则上，鹅卵石、木棍子和活鱼作为实在事物，很难说它们彼此之间有既自然又意义特别的可比性，因为它们彼此自然而然地被区分为完全不同的或者具有完全不同功能的实在之物。但是，一旦将它们按照自己同类的自然的物性实现自然的比较而成彻底离散线性序之后，它们之间的自然序排列就给出了它们之间的**序型可比性**。上面的例子表明，各种自然彻底离散线性序之间的序型可比较性由这些彻底离散线性序之间的某种序同构来实现。

III. 序型观念与自然数观念

自然数与彻底离散线性序之序型或序数

知觉中的序同构关系是自反的，对称的，也是传递的。就是说，序同构关系是一种观念上的等价关系。

因此，我们可以认为“自然数的数值”实际上就是人们对客观世界中各种同类宏观事物按照某种自然彻底离散顺序排列下的部分团体之间的序同构的广泛意义下的等价类中个体成员在相应序排列下所处的**位置**(或者**序型**)，或者它们相同的**序数**。

或者说，“自然数”的一个“数值”就是在所有可能的足够长的自然的彻底离散排序中那个唯一确定下来的独立于具体排序方式的在具体的排顺过程中安置一个被排列对象的**位置**，也就是序同构意义下的等价类的顺序排列的位置。

III. 序型观念与自然数观念

自然数与彻底离散线性序之序型或序数

说一个彻底离散线性序序同构等价类**a** “小于”(或者“短于”)另外一个彻底离散线性序序同构等价类**b** 是指无论等价类**a** 中何物*a*，无论等价类**b** 中何物*b*，在它们各自的彻底离散线性排序之下，*a*一定与*b* 的一个(真)前段**序同构**。

因此，所有的离散序同构等价类之间也就有一种半离散线性序，并且每一个等价类都在此半离散序之下有唯一确定的位置，这样的“位置”就被当成一个“自然数”的“数值”；

反之，所有“自然数”的“数值”也都由这些“位置”来唯一表示。

“自然数”1 就是最小的等价类所处的“位置”。

在实际应用中，任何一次关于这个自然数的解释都是按照某种公约所确定的一根“标杆”；一旦这一标杆被约定，其余自然数的数值就完全由对按照算术规则形式计算出来的结果的语义解释所确定，即每一个自然数就是这根标杆的唯一确定的倍数。

III. 序型观念与自然数观念

自然数与彻底离散线性序之序型或序数

基于上述考量，我们以为自然数，或者自然数的数值，就是广泛的彻底离散线性序在序同构关系下的等价类；

是一种通过建立序同构将各种自然的离散线性序排列过程中的以常识中的“量纲”为标志的实在事物之类别(比如上面例子中的“颗”、“根”、“条”)过滤掉以及只保留各自在排序中的相对位置(或者所处位置的序型)不变的抽象之物

是一种后验性的纯粹抽象的观念，至少绝非“先验的”；任何一次自然数数值的具体解释都靠具体的数数过程来实现，而任何一次数数过程都事实上蕴含着某种具体的排序。

III. 序型观念与自然数观念

一种具体表示

考虑由一个特殊的汉字“正”字所生成的字符串的整体。
假设这些字符串以横排的方式展开；从只有一个“正”字的字符串开始；递归地从一个当前已有的“正”字字符串出发以下列方式获得下一个新“正”字字符串：先在这个“正”字字符串之右设置一个可识别的分隔符；再(不多不少地)复制当前的“正”字符串；然后在复制品右端紧贴着添上一个“正”字；再将如此获得的新的“正”字字符串放置在刚才设置的分隔符之右边(分隔符会防止两者合二为一)；如此循环往复，以至无穷。

正,正正,正正正,正正正正,正正正正正，$\cdots$.

这是一种行之有效的按照一种非常自然的顺序生成所有“正”字字符串的过程(但需要永无休止地一个接着一个地复制和添加下去)。

比短：对于任意给定的两个“正”字字符串x 和y，**规定** $x \prec y$(x 比y 短) 当且仅当将它们上下平行、左边对齐地置放一处时x 与y 的一个前段等同并且y 的这个前段之右还有富余的“正”字。

比如，下列的字符串中上面的字符串都比下面的字符串短：

“正”
“正正”
“正正正”
“正正正正”
“正正正正正”

需要强调的是这里比短只比较字符串的共同之处与差别状态，不数它们所含的“正”字有多少。

III. 序型观念与自然数观念

一种具体表示

在比短关系下，每一个“正”字字符串的所有前段的全体就构成一个彻底离散线性序结构，并且这个彻底离散线性序结构的序型就是该字符串；或者说，

每一个“正”字字符串就是所有比它短的“正”字字符串所组成的有界部分团在“比短”关系这个彻底离散线性序的序型。

按照彻底离散线性序同构分类，每一个“正”字字符串就是一个彻底离散线性序等价类的序型；从而，每一个“正”字字符串也就是一个“自然数的数值”。

III. 序型观念与自然数观念

一种具体表示

用“正”字字符串并非必然的事情；将“正”字换成“歪”字不会带来任何区别，包括后面的“合并律”以及“整合律”。

就是说，彻底离散线性序的序型及其基本性质是完全独立于序型表示方式的选择的。

IV

现实操作与算术运算

现在来看看自然数算术运算的后验性：
可以认为自然数算术加法起源于具体的两种无重合彻底离散线性序的合并操作；
而自然数乘法则起源于两种彻底离散线性序的整合操作。

IV. 现实操作与算术运算

现实排序操作

远古时期的先人们有关彻底离散线性序的两种典型操作：合并操作以及整合操作。

对于给定的两种彻底离散线性序，通过简单的合并操作和整合操作可以获得第三种彻底离散线性序。

那么何谓合并操作？何谓整合操作？

将两种无重合线性序按照某种一先一后的方式将一个线性序置放在另外一个线性序的后面从而构成一个新的加长了的线性序的操作就称为对给定线性序的**合并操作**。
如果两个无重合线性序都是彻底离散线性序，那么由它们合并所得的线性序也一定是一个彻底离散线性序结构。

IV. 现实操作与算术运算

无重合线性序合并操作

现在假设我们有一些彼此大小都不一样的鹅卵石，将它们任意地分成两堆，比如(甲)堆和(乙)堆。

要求：这两堆被完全分开，两堆之间没有重合；

如果将这两堆再度合并一处，就还原到原有的那些鹅卵石全部。

就是说，将原有的全部鹅卵石随意地分成非平凡的两份(哪一份多哪一份少无关紧要)，并且全部分光。

现在分别将(甲)、(乙)两堆自西向东按照从小到大递增的方式平行一字排列起来(不妨假设将(甲)堆排在北边，将(乙)堆排在南面)；

还假设这样的排列是整齐的，即每一横排中的列距彼此相同，南北排也一样自西向东尽可能地对齐。

这样，(甲)排与(乙)排的鹅卵石都在自然的从小到大递增排列下有自己的序型。

IV. 现实操作与算术运算

无重合线性序合并操作

比如，我们用A 来记(甲)排的序型，用B 来记(乙)排的序型。
然后，我们在地面上对每一个鹅卵石画上一个小方格以至于每一排形成一个由一系列整齐的方格组成的矩阵。
这一南一北两个矩阵可以比较长短或者方格数的多少。

IV. 现实操作与算术运算
无重合线性序合并操作

在完成这样的工作后，将这两排的鹅卵石收集起来，并且在(乙)排的矩形之南，在将这些收集一起的鹅卵石自西向东按照从小到大递增地一字排列出来。称这一排为(丙)排。
在(丙)排的排列过程中仍然要求保持一种整齐性，即横排中的列距与北面的两横排保持一致。
(丙)排为无重合的(甲)与(乙)的合并。
最后也在地面上画上同上面一样的方格以至于这些新的方格也组成一个整齐矩形。
这个新的矩形中的每一个方格中都有唯一的一个鹅卵石，并且所给定的鹅卵石全部都被置放在这一排的某一个方格之中。
这个三个方格横排中最南面的一排是最长的(方格数最大)。
全体鹅卵石的这一彻底离散线性序也有一个序型，不妨记成C。

IV. 现实操作与算术运算

无重合线性序合并与序型加法

注意与最北边的横排方格矩形，(甲)排，它的最东边的一格对应着最南面的(丙)排的一个方格(我们要求排列是整齐的，所以这样的对应方格一目了然)。

将这个方格的鹅卵石取出来，并且将它的西边的那些比它小的所有的鹅卵石都取出来，然后将它们按照从小到大递增的方式保持顺序逐一地放置到最北边的(甲)排的方格之中(每一个方格中只能安置一个鹅卵石，并且每一个方格中也必须放置一个鹅卵石)。

过程结束时会发现这些鹅卵石恰好填满(甲)排中原本空置的方格。

再将(丙)排中剩余的鹅卵石按照从小到大递增方式移动到中间的(乙)排的方格之中。

仍然要求这样的搬迁是保持顺序逐一安置的(每一个方格中只能安置一个鹅卵石，并且每一个方格中也必须放置一个鹅卵石)。

过程结束时我们也会发现(丙)排中剩余的与(乙)排的空格之间比较起来不多不少。

由此可见，现在的(甲)排与原来的(甲)排完全序同构；
现在的(乙)排与原来的(乙)排完全序同构；
(丙)排刚才的序型是C，它恰好是现在的(甲)排与(乙)排合并起来的结果。
因此，我们自然规定：序型A 与序型B 之和就是序型C，即

$$C = A \oplus B.$$

假设A 和B 是两个“正”字字符串。将A 从左边与B 合并(或者将B 从右边与A 合并)，即$A \oplus B$，就是将字符串A 无间隔地置放在字符串B 的左边，合二为一。

比如，

$$\text{“正正正”} \oplus \text{“正正”} = \text{“正正正正正”}.$$

很容易看到只要一种同类事物团在它们自然排序下彼此互不相同，并且恰好可以将它们分成与(甲)排鹅卵石序同构以及与(乙)排鹅卵石序同构的两组，那么这个事物团在其给定的自然排序下也会具有序型C。

换句话说，这个序型之和的规定与我们选取特殊的鹅卵石为材料来确定“和序型”这种行为在序同构意义下完全无关。

关键是所涉及的(甲)组和(乙)组所含事物必须每一重合，只要这个要求得以满足，只要它们的排序可以合并起来，那么所得到的结果序型就是唯一确定的。

事实上上面的整齐方格矩形的排列很自然地表明了这种对于“代表元”选取的独立性。

同样可以看到，如果一开始就将上面的北边(甲)排与南边的(乙)排对换，再重复同样的过程，序型之和就是$B \oplus A$。

IV. 现实操作与算术运算

序型加法律

观察会表明这个序型和还是序型C。就是说，离散线性序的序型加法是可交换的：

$$A \oplus B = B \oplus A.$$

观察会表明这个序型和还是序型C。就是说，离散线性序的序型加法是可交换的：

$$A \oplus B = B \oplus A.$$

依据同样的操作方式可以得到序型加法满足结合律。

IV. 现实操作与算术运算

序型加法保持序型比较关系

现在假设我们有类似于上面讨论时用到的鹅卵石方格矩形排列起来的北边、中间、南边的三排(甲)、(乙)、(丙)。

进一步假设(甲)排中最大的那颗鹅卵石比(乙)排和(丙)排中最小的鹅卵石都小;

并且(乙)排的序型严格小于(丙)排的序型，即在它们的整齐方格矩形排列中，(丙)的矩形比(乙)的矩形长。

现在我们在(乙)排和(丙)排的最西边添加与(甲)排同构的整齐方格矩形，就如同将(甲)的鹅卵石分别合并到(乙)和(丙)中重新排列之后那样。

这样得到的中间一排的序型就是(甲)的序型与(乙)的序型之和;

最南的一排的序型就是(甲)的序型与(丙)的序型之和。

观察表明这两排的方格矩形依旧是最南的比中间的长，因为西边增添了同样的部分，而东边彼此都没有受到任何影响。

就是说，序型加法保持序型的比较关系不变。

IV. 现实操作与算术运算

整合操作

将两种线性序分别整齐地横排与竖排从而构成一个整齐的矩形阵式的排列的操作就称为对给定线性序的**整合操作**。

如果所涉及的两种线性序都是彻底离散线性序，那么将它们整合起来的线性序还是一个彻底离散线性序。

我国有两种从古代传承下来的典型的整合操作的例子：用来标识年份的干支阵列序以及用来解释自然现象的卦象阵列序。

IV. 现实操作与算术运算

干支字典序

还可以将天干序与地支序整合成行字典序和列字典序：

甲亥	乙亥	丙亥	丁亥	戊亥	己亥	庚亥	辛亥	壬亥	癸亥
甲戌	乙戌	丙戌	丁戌	戊戌	己戌	庚戌	辛戌	壬戌	癸戌
甲酉	乙酉	丙酉	丁酉	戊酉	己酉	庚酉	辛酉	壬酉	癸酉
甲申	乙申	丙申	丁申	戊申	己申	庚申	辛申	壬申	癸申
甲未	乙未	丙未	丁未	戊未	己未	庚未	辛未	壬未	癸未
甲午	乙午	丙午	丁午	戊午	己午	庚午	辛午	壬午	癸午
甲巳	乙巳	丙巳	丁巳	戊巳	己巳	庚巳	辛巳	壬巳	癸巳
甲辰	乙辰	丙辰	丁辰	戊辰	己辰	庚辰	辛辰	壬辰	癸辰
甲卯	乙卯	丙卯	丁卯	戊卯	己卯	庚卯	辛卯	壬卯	癸卯
甲寅	乙寅	丙寅	丁寅	戊寅	己寅	庚寅	辛寅	壬寅	癸寅
甲丑	乙丑	丙丑	丁丑	戊丑	己丑	庚丑	辛丑	壬丑	癸丑
甲子	乙子	丙子	丁子	戊子	己子	庚子	辛子	壬子	癸子
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸

IV. 现实操作与算术运算

干支字典序

行字典序：自下而上，下面的行整体先于上面的行；每一行内，从左向右，左边的先于右边的；先于关系是传递的。

列字典序：从左向右，左边的一列整体先于右边的一列；每一列内，自下而上，下面的先于上面的；先于关系是传递的。

IV. 现实操作与算术运算

卦爻字典整合

八卦名	乾	兑	离	震	巽	坎	艮	坤
乾	乾乾	乾兑	乾离	乾震	乾巽	乾坎	乾艮	乾坤
兑	兑乾	兑兑	兑离	兑震	兑巽	兑坎	兑艮	兑坤
离	离乾	离兑	离离	离震	离巽	离坎	离艮	离坤
震	震乾	震兑	震离	震震	震巽	震坎	震艮	震坤
巽	巽乾	巽兑	巽离	巽震	巽巽	巽坎	巽艮	巽坤
坎	坎乾	坎兑	坎离	坎震	坎巽	坎坎	坎艮	坎坤
艮	艮乾	艮兑	艮离	艮震	艮巽	艮坎	艮艮	艮坤
坤	坤乾	坤兑	坤离	坤震	坤巽	坤坎	坤艮	坤坤

行字典序：自下而上，下面的行整体先于上面的行；每一行内，从左向右，左边的先于右边的；先于关系是传递的。

列字典序：从左向右，左边的一列整体先于右边的一列；每一列内，自下而上，下面的先于上面的；先于关系是传递的。

IV. 现实操作与算术运算

“正”字字符串整合

假设x 和y 是两个非空“正”字字符串。
将字符串x 从下往上竖排成一个列，置放在最左边；
将字符串y 横排成一行，置放在最下面；
然后自下而上地对应着x 中“正”字的每一个出现，在这一行的右边添上一个字符串y 的复制品；
如此构成一个由“正”字填充的矩阵$(x) \times (y)$；
最后将最左边的列和最下边的行去掉之后的各行合并成一个“正”字字符串，这个结果字符串就是x 与y 的整合或者乘积$x \otimes y$。

IV. 现实操作与算术运算

“正”字字符串整合

$$\begin{array}{ll} 正 & 正正\cdots 正 \\ \vdots & \vdots \\ 正 & 正正\cdots 正 \\ (x) & 正正\cdots 正\,(y) \end{array}$$

去掉最左边的列(x) 和最下边的行(y) 之后剩下的矩阵为：

$$\begin{array}{c} 正正\cdots 正 \\ \vdots \\ 正正\cdots 正 \end{array}$$

最后将这个矩阵的各行合并一处就有：

$$正正\cdots 正\cdots 正正\cdots 正.$$

$$\begin{array}{ll} \text{正} & \text{正} \\ (x) & \text{正}\,(y) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{正} & \text{正正正} \\ \text{正} & \text{正正正} \\ (x) & \text{正正正}\,(y) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{正} & \text{正正正} \\ \text{正} & \text{正正正} \\ \text{正} & \text{正正正} \\ (x) & \text{正正正}\,(y) \end{array}$$

从而

$$\text{“正”} \otimes \text{“正正}\cdots\text{正”} = \text{“正正}\cdots\text{正”}$$

以及

$$\text{“正正”} \otimes \text{“正正正”} = \text{“正正正正正正”}$$

和

$$\text{“正正正”} \otimes \text{“正正正”} = \text{“正正正正正正正正正”}.$$

IV. 现实操作与算术运算

整合操作基本性质

由于彻底离散线性序序型的“乘法”实质上就是经过同构将一系列等长的序型转变成没有重合的序型之并，因此离散线性序序型加法的可交换性、可结合性以及序保持性都被序型乘法继承下来。

IV. 现实操作与算术运算

加法运算与乘法运算

- 由彻底离散线性序序型的加法理性地抽象出自然数的加法;

- 由彻底离散线性序序型的加法理性地抽象出自然数的加法;
- 由彻底离散线性序序型的乘法理性地抽象出自然数的乘法;

- 由彻底离散线性序序型的加法理性地抽象出自然数的加法;
- 由彻底离散线性序序型的乘法理性地抽象出自然数的乘法;
- 由彻底离散线性序序型的比较理性地抽象出自然数的大小比较。

为了强调和明晰，数学思考者会用一个六元组$(\mathbb{N}, 0, 1, <, +, \times)$来标记思考时专注点和聚焦处所在；然后将前面探讨中提炼出来的基本性质作为“公理”综合表述出来：

Axiom (自然数结构)

(1) 0 和1 都是$\mathbb{N}$ 中的特殊对象；

(2) 如果x 和y 是$\mathbb{N}$ 中的两个对象，那么$x+y$ 以及$x\times y$ 都是$\mathbb{N}$ 中由x 和y 唯一确定的对象；

(3) 如果x 是$\mathbb{N}$ 中的一个对象，那么一定不会有$x<x$ 发生；

(4) 如果x,y,z 是$\mathbb{N}$ 中的三个对象，并且$x<y$ 和$y>z$，那么$x<z$；

(5) 如果x 和y 是$\mathbb{N}$ 中的两个对象，那么或者$x<y$，或者$y<x$，或者$x=y$；

(6) $0<1$；如果x 是$\mathbb{N}$ 中的一个对象，那么$0+x=x$，$0\times x=0$，$1\times x=x$；

Axiom (续)

(7) 如果x 和y 是$\mathbb{N}$ 中的两个对象，那么

$$x + y = y + x; \text{ 以及 } x \times y = y \times x;$$

(8) 如果x, y, z 是$\mathbb{N}$ 中的三个对象，那么
   (a) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
   (b) $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$;
   (c) $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$;

Axiom (续)

(9) 如果x 是$\mathbb{N}$ 中的一个对象，那么$x < x + 1$；

(10) 如果x, y 是$\mathbb{N}$ 中的两个对象，并且$y < x + 1$，那么或者$y < x$，或者$y = x$；

(11) 如果x, y 是$\mathbb{N}$ 中的两个对象，并且$x < y$，那么或者$y = x + 1$，或者$x + 1 < y$；

(12) 如果x 是$\mathbb{N}$ 的一个对象，并且$0 < x$，那么$\mathbb{N}$ 中必有一个对象y 来见证等式$x = y + 1$；

(13) 如果x, y, z 是$\mathbb{N}$ 中的三个对象，并且$x < y$，那么$(z + x) < (z + y)$；

(14) 如果x, y, z 是$\mathbb{N}$ 中的三个对象，并且$x < y$ 以及$0 < z$，那么$(z \times x) < (z \times y)$。

当然，数学思考者在表述上述“自然数结构”公理时默认了一个非常重要的假设：满足上述要求的“自然数结构”存在。尤其是，这样的结构是一个无边无界的或者说排列起来永无止境的整体对象，这样结构的存在性只能依赖于某种假设。数学思考者从十九世纪末页起就明确地接受了这样的假设，将这样的结构当成数学思考者进行探讨的一个新的出发点。正是在这样的假设之下，应用上述“自然数结构”公理，数学思考者才将长期以来的有关自然数的序本性、基数本性、算术运算等观念转变成了严格的数学概念。

IV. 现实操作与算术运算
关于自然数的结论

用来建立具体的一种解释自然数观念的方式可以有很多种，并且所有这样的解释之间也有很自然的对应关系。因此我们可以认为“自然数”内在不变的含义就是所有具体的关于自然数观念解释中的含义的共通内核，一种在我们内心深处感受的不变的信息内核。表达的语言形式可以不同，但所表达的思想必须保持不变。在自然数观念范畴，“自然数”可以有许多不同的解释和实现，“自然数算术”可以有许多种不同的解释和实现，但相关的“自然数”的**序本性**和**基数本性**以及**算术运算律**不能被因为表现形式不同而发生变化。

在确保语义解释不变的基本原则下，它们必须被我们的智慧接纳为语义相同。因为这是在自然数观念范畴，在思维形态深处，或者内心深处，我们真正关注的问题是自然数的序本性和基数本性是什么以及自然数算术该如何展开以及应当遵守什么样的规则或者运算律。这些问题的答案来自数学思考者对客观世界中的某些物理问题或生活中的某些实际问题的解答难以回避的追求、抽象与沉思。上面的例子表明这些本性和运算律都是独立于表达方式的，因为它们在不同的语言表达中彼此可以相互解释对方，或者在它们之间存在典型同构。

IV. 现实操作与算术运算

关于自然数的结论

综合起来，我们以为自然数的加法、乘法观念来自对于彻底离散线性序的无重合序合并操作以及整合操作，而它们的运算规律则来自对这样的操作的直接观察，并且可以获得实际操作过程的检验。因此，在我们看来，无论是自然数，还是它们的算术运算以及大小比较等这些观念，都是后验的，不是先验的。

V

自然数结构同一性假设

V. 自然数结构同一性假设

关于自然数的结论

在人类思维范畴，人们之所以接受现有的有关自然数及其结构的抽象认识理念，有一个不可忽视的形而上学的同一性假设被普遍默认：

在人类思维范畴，人们之所以接受现有的有关自然数及其结构的抽象认识理念，有一个不可忽视的形而上学的同一性假设被普遍默认：

观念之中所接受的“对特定被作用对象实施特定操作后产生特定结果对象”的观念真实就这样很合适地以规范形式语言中的内在等式律展现出来，并且能够在一系列来自观念中认定的基本真实的理念化的初始假设之下合乎逻辑地推导出来，从而升华为理念中的相对真实。

V. 自然数结构同一性假设

关于自然数的结论

在人类思维范畴，人们之所以接受现有的有关自然数及其结构的抽象认识理念，有一个不可忽视的形而上学的同一性假设被普遍默认：

观念之中所接受的“对特定被作用对象实施特定操作后产生特定结果对象”的观念真实就这样很合适地以规范形式语言中的内在等式律展现出来，并且能够在一系列来自观念中认定的基本真实的理念化的初始假设之下合乎逻辑地推导出来，从而升华为理念中的相对真实。

在没有能够获得更为合适的或更为完善的抽象认识之前，接受现有的便是最好的选择；暂且认定这就是以反映实在对象为宗旨的理念存在对象的最合适展现形式。

VI

结论

VI. 结论

数学知识之先验性与后验性问题

在从客观实在到观念存在再到数学理念存在以及有关这种存在的数学知识的多层次抽象过程中，
由于知觉与常识在数学内部的驱动力与外部的驱动力合成作用下所扮演的本性角色，
经验事实与数学命题的相对真实性就有着必然的密切关联。

比如，有关自然数及其算术等观念的来源问题，传统的解答似乎归结到数数或者计数。

事实上，数数本身又与被数之物之间的自然的线性可比性密切相关：

数数过程不过是在建立一种满足可加性的保序映射。

从而自然数的序本性甚至比起自然数的基数本性来更为基本，更为日常生活的经验所直接接纳或者更为直接地来自对客观事物的观察和感知。

再比如，数学思考者在相当长的历史时期中都在数这个名词的直觉观念下探讨关于数的算术或代数运算律以及计算方法；
在点、直线、平面、立体、方向这些名词的直觉观念下探讨关于由它们构造各种各样几何对象的方法、由此得到的各种几何对象的基本性质，比如各种各样的对称性、相似性、全等性，以及这些性质与构造方法的依赖性、独立性或者不变性；
在可以对直线线段进行度量的直觉信念下探讨对构造出来的几何对象的度量方法、各种几何对象之间的数量关系以及这些数量关系对于构造方法的依赖程度或者独立性以及不变性，追求形数统一律。
在相当长的历史时期，数学思考者并不以为这些直觉观念和直觉信念对数学的进一步发展会带来多大影响。

VI. 结论

数学知识之先验性与后验性问题

到十七世纪，为了适应物理学发展的需要，笛卡尔成功地将几何中的直觉观念，诸如点、直线、平面、立体和方向等，借助观念意义上的实数整体和观念意义下的实数整体的笛卡尔乘积空间转换称数学内在的概念，从而将几何学建立在关于数的代数理论体系之上，尽管此时对数本身(包括自然数、整数、有理数和实数)的认识依旧停留在观念之中。

不仅如此，通过笛卡尔直角坐标系，基本的借助圆规和直尺构造几何对象的方法都在解析几何内部以空间变换的形式得以实现，并且直线线段的度量问题借助勾股定理被转换成坐标分量的平方和的开方问题。

换句话说，原来几何探讨中的外在因素都转变成了几何探讨中的内在因素，许多原本直观的现象变成了空间变换的严格的内在性质，比如几何图形的各种对称性、平移不变性、旋转不变性，都对应着空间中的某一类变换的不变性以及这些变换本身的复合特性。

不在乎关于数的直觉观念的状态在十九世纪后半页也被迫改变，因为数学的发展从内部提出了将关于数的直觉观念转变成严格的数学概念的要求。最终，关于数的严格的数学定义在柯西、魏尔斯特拉斯、戴德金和康托等人一系列工作的基础之上被提炼出来。

VI. 结论

数学知识之先验性与后验性问题

客观对象是实在的；观念对象是抽象的存在形式，是大脑中存在着的抽象信息与回归客观对象的意念解释结合起来的可以被用来实现人与人交流的结合体；理念对象是数学意义上的具体存在，既有形式也有内涵，其形式是规范化的表示，其内涵是规范化的解释，是对观念对象理性迭代分析以及更高层次的理性抽象的思维过程的产品，并且这种理性迭代分析以及理性抽象过程自始自终既坚守着与观念对象和客观对象源与池的双向对应中的合理部分的一致性又矫正着观念对象和客观对象源与池的双向对应中不合理的偏差部分。

VI. 结论

数学知识之先验性与后验性问题

基于这些考量，我们愿意相信数学知识内在的后验性，就如同物理学知识所具有的内在的后验性那样。同时，我们也希望指出数学知识是一种由数学思考者在不断出现的有意义的问题牵引下为了满足解决那些自然而然的问题按照逻辑工具所提供的假言推理的方式建立起来的在不断发展、不断协调、修正与完善起来的必然和有机的结构。简而言之，数学本身是一个在不断发展中的具有严谨的逻辑结构的不断完善起来的知识体系。从而，很难想象这样的一种知识结构是先验的。

VII

参考文献

VII. 参考文献

数学知识之先验性与后验性问题

VII. 参考文献

- Emmett Barcalow, Open Questions, An Introduction to Philosophy, Oxford University Press, 2001

VII. 参考文献

- Emmett Barcalow, Open Questions, An Introduction to Philosophy, Oxford University Press, 2001
- Ted Honderrich, The Oxford Companion to Philosophy, Oxford University Press, 2005

- Emmett Barcalow, Open Questions, An Introduction to Philosophy, Oxford University Press, 2001
- Ted Honderrich, The Oxford Companion to Philosophy, Oxford University Press, 2005
- Steward Shapiro, 数学哲学—对数学的思考，郝兆宽、杨睿之翻译，复旦大学出版社，2000

谢谢！