Cardinal invariants and Tukey reduction

张树果

四川大学数学学院

2016-05-21
复旦2016年全国数理逻辑研讨会

理想

定义

称 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ 是**自然数上的理想**, 若 $\mathcal{I}$ 满足:

(1). $\emptyset \in \mathcal{I}$, $\omega \notin \mathcal{I}$.

(2). 若 $I, J \in \mathcal{I}$, 则$I \cup J \in \mathcal{I}$.

(3). 若 $I \in \mathcal{I}$ 并且 $J \subseteq I$, 则$J \in \mathcal{I}$.

定义

称 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ 是**自然数上的滤子**, 若 $\mathcal{F}^* = \{A \in \mathcal{P}(\omega) : A^c \in \mathcal{F}\}$ 是自然数上的理想.

理想的例子

例子

- $Fin = \{A \subseteq \omega : |A| < \omega\}$
- $\mathcal{Z}_0 = \{A \subseteq \omega : \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [2^n, 2^{n+1})|}{2^n} = 0\}$.
- $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \{A \subseteq \omega : \sum_{n\in A} \frac{1}{n+1} < \infty\}$.
- $\emptyset \times Fin = \{A \subseteq \omega \times \omega : \forall n \in \omega(|A_n| < \omega)\}$
- $\mathcal{K}_{\mathcal{M}} = \{A \in \mathcal{K}(2^\omega) : A$ 是第一纲集$\}$.
- $\mathcal{K}_{\mathcal{N}} = \{A \in \mathcal{K}(2^\omega) : A$ 是零测集$\}$.

Borel集合

定义

设 X 是一个完备可分的度量空间.
$Borel(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ 表示包含开集的最小 σ-代数.
$\mathbf{\Sigma}^1_1(X) = \{f(A) \subseteq X : f : X \to X连续, A \in Borel(X)\}$.
任意$\xi < \omega_1$:
$\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \{U \subseteq X : U \text{ 是开集}\}$
$\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \{A \subseteq X : A^c \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\}$
$\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) = \{\bigcup_{n\in\omega} A_n : A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\xi_n}(X), \xi_n < \xi, n \in \omega\}$
$\mathbf{\Delta}^0_\xi(X) = \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\xi(X)$
$Borel(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Delta}^0_\xi(X)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2(F_\sigma) & & & \mathbf{\Sigma}^0_\xi & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \cdots & \mathbf{\Delta}^0_\xi & & \cdots \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2(G_\delta) & & & \mathbf{\Pi}^0_\xi &
\end{array}$$

Borel理想

通过$A \longleftrightarrow \chi_A$ 将 $\mathcal{P}(\omega) \longleftrightarrow 2^\omega$ 视为等价. 2^ω 赋予乘积拓扑.

定义

称 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ 是*Borel*, 若$\mathcal{I} \in Borel(2^\omega)$.

组合

组合：特定偏序的结构：Tukey关系，比较博弈.

Tukey关系

设 $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ 是定向的偏序集.

映射 $f : X \to Y$ 称为 **Tukey 映射**, 若

$$A \subseteq X \text{ 无界} \Longrightarrow f(A) \subseteq Y \text{无界}.$$

若存在 X 到 Y 的 Tukey 映射, 称 X **Tukey 归约到** Y . 记为

$$X \leq_{\mathrm{T}} Y$$

若 $X \leq_{\mathrm{T}} Y$ 且 $Y \leq_{\mathrm{T}} X$, 称 X **Tukey 等价于** Y. 记为

$$X \equiv_{\mathrm{T}} Y$$

Tukey关系的性质1

定理 (Tukey 1940)

设 $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ 是定向的偏序集. $X \equiv_{\mathrm{T}} Y$ 当且仅当存在定向偏序集 $(Z, \leq_Z)$ 使得 $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ 都能共尾嵌入 $(Z, \leq_Z)$.

Tukey关系的性质2

对偶的观点: 映射$g : E \longrightarrow D$ 称为**共尾的**, 若

$$X \subseteq E\text{共尾} \Longrightarrow g(X)\ \text{共尾}.$$

命题

$$\exists f : D \longrightarrow E\ \text{是Tukey映射}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists g : E \longrightarrow D\ \text{是共尾映射}$$

并且, f, g可以取到满足如下关系:

$$\forall d \in D \forall e \in E (f(d) \leq_E e \Longrightarrow d \leq_D g(e))$$

Tukey关系的性质3

与基数不变量的联系:

$$add(D) = \min\{|A| : A \subseteq D\text{无界}\}$$

$$cof(D) = \min\{|A| : A \subseteq D\text{共尾}\}$$

命题 (Schmidt 1955)

$$D \leq_{\mathrm{T}} E \implies \mathrm{add}(E) \leq \mathrm{add}(D),\ \mathrm{cof}(D) \leq \mathrm{cof}(E)$$

历史1

定理 (S. Todorčević 1985)

假定 **PFA**. 设 X 是定向的偏序集且 $|X| = \omega_1$, 则 X *Tukey* 等价于: 1, ω, ω_1, $\omega\times\omega_1$, $[\omega_1]^{<\omega}$ 之一.

定理 (S. Todorčević 1985)

存在 2^{ω_1} 个大小为 $\mathfrak{c}$ 且两两 *Tukey* 不等价的定向的偏序集.

历史2

定理 (D. Fremlin 1991)

- $\omega^\omega \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\mathcal{N}} \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{Z}_0 \leq_{\mathrm{T}} l_1^+$.
- $\mathcal{K}_{\mathcal{N}} \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\mathcal{M}} \leq_{\mathrm{T}} l_1^+$.
- $\mathcal{K}_{\mathcal{N}} \not\leq_{\mathrm{T}} \omega^\omega$.
- $\mathcal{Z}_0 \not\leq_{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$.

定理 (D. Fremlin 1991)

(a) $\mathcal{K}(X) \equiv_{\mathrm{T}} \{0\}$ 当且仅当 X 是紧空间.

(b) $\mathcal{K}(X) \equiv_{\mathrm{T}} \omega$ 当且仅当 X 是可分, 局部紧但非紧的空间.

(c) $\mathcal{K}(X) \equiv_{\mathrm{T}} \omega^\omega$ 当且仅当 X 是非局部紧的 *Polish* 空间.

(d) 若 X 是可分的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 但非 *Polish* 的空间, 则 $\mathcal{K}(X) \equiv_{\mathrm{T}} \mathcal{K}(\mathbb{Q})$.

历史3

定理 (A. Louveau, B. Velickovic 1999)

- 任意理想 $\mathcal{I} \leq_{\mathrm{T}} \omega^\omega$, 则 $\mathcal{I} \leq_{\mathrm{T}} \omega$ 或者 $\mathcal{I} \equiv_{\mathrm{T}} \omega^\omega$.
- 任意非 F_σ 的理想 $\mathcal{I}$ 都有 $\omega^\omega \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{I}$.
- 任意$\mathbf{\Sigma}^1_1$ P-理想 $\mathcal{I} \not\leq_{\mathrm{T}} \omega$ 都有 $\omega^\omega \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{I} \leq_{\mathrm{T}} I_{\frac{1}{n}}$.
- $(\mathcal{P}(\omega), \subseteq^*)$ 可以嵌入到$\mathbf{\Sigma}^1_1$ P-理想伴随 *Tukey* 关系.

定义

P-理想：任意$\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$, 存在$A \in \mathcal{I}$ 使得$\forall n \in \omega(|A \setminus A_n| < \omega)$.

历史4

定义

设 X 是一个可分度量空间, $\leq$ 是 X 上的一个偏序. 称 $(X, \leq)$ 是基本的如果满足如下条件:

(1) 任意 $x, y \in X$, 存在一个最小上确界 $\vee(x, y)$, 即, $\vee(x, y) \geq x, y$ 且 $\forall z \in X(x, y \leq z \Rightarrow \vee(x, y) \leq z)$. 并且 $\vee : X \times X \to X$ 是连续映射.

(2) 任意有界序列有一个收敛的子序列.

(3) 任意收敛序列有一个有界的子序列.

定理 (S. Solecki, S. Todorčević 2004)

设 X 和 Y 是 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 的基本偏序. 若 $X \leq_{\mathrm{T}} Y$, 则存在一个 *Borel* 可测的共尾映射.

历史5

定义

设$\mathcal{I}$ 是自然数上的$\mathbf{\Sigma}^1_1$ P-理想:

$$D(\mathcal{I}) = \{K \in \mathcal{MK}(2^\omega) : \exists x \in \mathcal{I} \forall n \in \omega (x \setminus n \notin K)\}.$$

定理 (S. Solecki, S. Todorčević 2004)

- 设 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 是 ω 上的$\mathbf{\Sigma}^1_1$ P-理想并且 $\mathcal{J} \neq Fin$. 若 $\mathcal{I} \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{J}$, 则 $D(\mathcal{I}) \leq_{\mathrm{T}} D(\mathcal{J})$.
- 设 $\mathcal{I}$ 是$\mathbf{\Sigma}^1_1$ P-理想. 若 $\omega^\omega <_{\mathrm{T}} \mathcal{I}$, 则 $D(\mathcal{I}) <_{\mathrm{T}} \mathcal{I}$.
- 若 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的$\mathbf{\Sigma}^1_1$ P-理想, 则 $D(I) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$.

结论1

问题 (D.Milovich 2008)

是否存在超滤 *Tukey* 等价于ω^ω?

定理

1. 设 $\mathcal{F}$ 是 ω 上的一个滤子. 若 $\mathcal{F} \leq_{\mathrm{T}} \omega^\omega$, 则存在连续的单调共尾映射 $g: \omega^\omega \to \mathcal{F}$. 特别地, $\mathcal{F}$ 是$\mathbf{\Sigma}^1_1$的.
2. 存在一个$\mathbf{\Sigma}^1_1$-完备的理想 $\mathcal{I} \equiv_{\mathrm{T}} \omega^\omega$.
3. 存在任意高的 *Borel* 复杂度的理想 *Tukey* 等价于 ω^ω.
4. 不存在 F_σ 理想 *Tukey* 等价于 ω^ω.

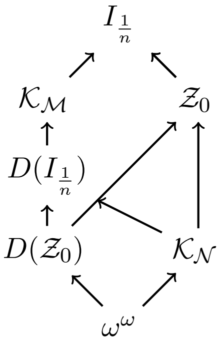
结论2

问题 (S. Solecki, S. Todorčević 2004)

$\mathcal{K}_{\mathcal{M}} \equiv_{\mathrm{T}} D(I_{\frac{1}{n}})$? $\mathcal{K}_{\mathcal{N}} \equiv_{\mathrm{T}} D(I_{\frac{1}{n}})$?

定理

$\mathcal{K}_{\mathcal{M}} \not\leq_{\mathrm{T}} D(I_{\frac{1}{n}})$.



结论3

定理

设 $\mathcal{F}$ 是 ω 上的一个第二纲 P-滤子. 若 $\omega^\omega \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{F}$, 则:

(1) 不存在 $\sigma(\mathbf{\Sigma}^1_1)$-可测的 *Tukey* 映射.

(2) 存在连续单调的共尾映射.

推论

设 $\mathcal{U}$ 是一个超滤. $\mathcal{U}$ 是 P-点当且仅当不存在 *Borel* 可测 *Tukey* 映射见证 $\omega^\omega \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{U}$.

结论4

定理

设 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的 F_σ 理想. 若 $(\mathcal{I}, \subseteq) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$, 则 $\mathcal{I} \leq_{\mathrm{T}} \omega$.

基数不变量

定义 (Vojtáš 1993)

一个 *Vojtáš* 三元组是指 $\mathbf{A} = (A_-, A_+, A)$, 其中 A 是从 A_- 到 A_+ 的二元关系. 定义与 $\mathbf{A}$ 有关的基数不变量如下:

$$\|\mathbf{A}\| = \min\{|D| : D \subseteq A_+, \forall a \in A_- \exists d \in D(aAd)\}$$

这样的基数不变量包括:

- $\mathfrak{d} = \| (\omega^\omega, \omega^\omega, \leq^*) \|$.
- $\mathfrak{b} = \| (\omega^\omega, \omega^\omega, \not\geq^*) \|$.
- $\mathfrak{r} = \| ([\omega]^\omega, [\omega]^\omega, \text{不分割}) \|$.
- $\mathfrak{s} = \| ([\omega]^\omega, [\omega]^\omega, \text{被分割}) \|$.

更多的基数不变量

定义 (S. Coskey, T. Mátrai , J. Steprāns , 2013)

设 **A** 和 **B** 是 *Vojtáš* 三元组, P 是 A_+ 的子集的一个性质. 定义与 **A** 有关的如下基数不变量:

$$\|\mathbf{A}\|_P = \min\{|D| : D \subseteq A_+ \text{有性质 } P, \forall a \in A_- \exists d \in D(aAd)\}$$

这样的基数不变量包括:

- $\mathfrak{a} = \|\ ([\omega]^\omega, [\omega]^\omega, \not\perp)\ \|_{\text{无穷几乎不交族}}$,
- $\mathfrak{u} = \|\ ([\omega]^\omega, [\omega]^\omega, \text{不被分割})\ \|_{\text{中心的}}$,
- $\mathfrak{i} = \|\ ([\omega]^\omega, [\omega]^\omega, \text{不分割})\ \|_{\text{生成独立族}}$,
- $\mathfrak{p} = \|\ ([\omega]^\omega, [\omega]^\omega, \not\subseteq^*)\ \|_{\text{中心的}}$.

基数不变量Borel态射

定义

设 $\mathbf{A} = (A_-, A_+, A)$ 和 $\mathbf{B} = (B_-, B_+, B)$ 是*Borel* 的 *Vojtáš* 三元组，P 是 A_+ 的子集的性质和 Q 是 B_+ 的子集的性质. 称 (φ, ψ) 是从 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{B}$ 的 *Borel* 态射, 若 *Borel* 映射 $\varphi : B_- \longrightarrow A_-$, $\psi : A_+ \longrightarrow B_+$ 满足如下关系:

(1) $\mathcal{F}$ 有性质 $P \Longrightarrow \psi(\mathcal{F})$ 有性质 Q.

(2) $\forall b_- \in B_- \forall a_+ \in A_+ (\varphi(b_-) A a_+ \Longrightarrow b_- B \psi(a_+))$. 若如上的 *Borel* 态射存在, 我们记 $\|\mathbf{A}\|_P \leq_{\mathrm{BT}} \|\mathbf{B}\|_Q$.

历史

Theorem[Coskey, Mátrai, Steprāns, 2013]

ZFC-provable ($\leq$)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{i} \arrow[dl] \arrow[d] & \mathfrak{u} \arrow[dl] \\
\mathfrak{d} \arrow[d] \arrow[dr] & \mathfrak{r} \arrow[d] & \mathfrak{a} \arrow[dl] \\
\mathfrak{s} \arrow[dr] & \mathfrak{b} \arrow[d] & \\
 & \mathfrak{p} &
\end{tikzcd}
$$

Borel Tukey ($\leq_{\mathrm{BT}}$)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{i} \arrow[d] & \mathfrak{u} \arrow[dl] \\
\mathfrak{d} \arrow[d] \arrow[dr] & \mathfrak{r} \arrow[d] & \mathfrak{a} \arrow[ddl] \\
\mathfrak{s} & \mathfrak{b} \arrow[d] & \\
 & \mathfrak{p} &
\end{tikzcd}
$$

结论

问题 (Coskey, Mátrai, Steprāns, 2013)

$\mathfrak{t} \leq_{\mathrm{BT}} \mathfrak{b}$?

定理

(1) $\mathfrak{t} \not\leq_{\mathrm{BT}} \mathfrak{b}$.

(2) $\mathfrak{t} \not\leq_{\mathrm{BT}} \mathfrak{a}$.

(3) $\mathfrak{t} \not\leq_{\mathrm{BT}} \mathfrak{d}$.

定义

设 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 是 ω 上的理想. $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 之间的比较博弈, 记为 $G(\mathcal{I},\mathcal{J})$, 是指:

$$\begin{array}{c|cccccc} \textsf{I} & I_0 \in \mathcal{I} & & \cdots & I_n \in \mathcal{I} & & \cdots \\ \hline \textsf{II} & & J_0 \in \mathcal{J} & \cdots & & J_n \in \mathcal{J} & \cdots \end{array}$$

玩家 *II* 赢, 如果$\bigcup_{n\in\omega} I_n \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \bigcup_{n\in\omega} J_n \in \mathcal{J}$ 成立. 否则, 玩家 *I* 赢.

如果玩家 *II* 有一个稳赢的策略, 我们记 $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$.

如果 $\mathcal{I} \sqsubseteq \mathcal{J}$ 并且 $\mathcal{J} \sqsubseteq \mathcal{I}$, 我们记 $\mathcal{I} \simeq \mathcal{J}$.

动机

定义

映射 $f:\mathcal{I}\to\mathcal{J}$ 称为**单调 Tukey**, 若 f 是 *Tukey* 映射并且 f 是单调的. 若这样的映射存在, 我们称 $\mathcal{I}$ 单调 *Tukey* 小于 $\mathcal{J}$, 记为: $\mathcal{I}\leq_{\mathrm{MT}}\mathcal{J}$.

命题

$\mathcal{I}\leq_{\mathrm{MT}}\mathcal{J}\Longrightarrow\mathcal{I}\sqsubseteq\mathcal{J}$.

历史

定理 (M. Hrušák, D. M. Alcántara 2011)

- 任意的 *Borel* 理想 $\mathcal{I}, \mathcal{J}$, 博弈 $G(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ 是决定的.
- 偏序 $\sqsubseteq$ 是良基的.
- 偏序 $\sqsubseteq$ 是几乎线性的(任意反链的长度不超过2).
- 存在不可数多个 $\simeq$ -等价类.

问题

问题 (M. Hrušák, D. M. Alcántara 2011)

- 偏序 $\sqsubseteq$ 是线性的(良序的)?
- 是不是只有两个 $F_{\sigma\delta}$ 非 F_σ -理想 $\simeq$ -等价类?
- 一共有多少个 $F_{\sigma\delta\sigma}$ -理想 $\simeq$ -等价类?

结论1

定义

设 X 是 2^{ω} 的 *Borel* 子集. 定义 X 的迹理想 $T(X)$为 ${}^{<\omega}2$ 上由 $\{\{x|n : n \in \omega\} : x \in X\}$ 生成的理想.

定理

$T((\emptyset \times Fin)^{+})$ 和 $\emptyset \times Fin$ 是 $\sqsubseteq$ -不相容的.

结论2

定义

设$A, B \subseteq 2^\omega$, 称A *Wadge* 小于B 如果存在连续映射 $f : 2^\omega \to 2^\omega$ 使得$f^{-1}(B) = A$. 记为$A \leq_{\mathrm{W}} B$.
$A \equiv_{\mathrm{W}} B$ 如果$A \leq_{\mathrm{W}} B$ 并且$B \leq_{\mathrm{W}} A$.

定理

设 $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ 是 ω 上的 *Borel* 理想并且其 *Wadge* 度高于 $\mathbf{\Delta}(D_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_2))$,
则 $\mathcal{I} \equiv_W \mathcal{J} \Leftrightarrow T(\mathcal{I}) \simeq T(\mathcal{J})$.

谢谢！