

胡塞尔对弗雷格外延主义数论的批判

李义民

(九江学院 马克思主义学院, 江西 九江 332005)

摘要

关键词

“数是什么”是哲学中数论的核心问题。从现有材料看,在研究数和算术的本质问题方面,弗雷格的《算术基础》(*Die Grundlagen der Arithmetik*, 以下简称 GL)与胡塞尔的《算术哲学》(*Philosophie der Arithmetik*, 以下简称 PA)无疑是成就最高的。二者分别取外延主义和内涵主义的不同立场,并因此都试图全面否定对方的数论。这里将专门探讨胡塞尔对 GL 的批判。

一、哲学数论的基本问题

以拉国王马车的马 a、b、c 和 d 为例,我们通常说它们的数是 4,哲学中的数论需要说明这些马是 4 的根据是什么。或者说,当我们确定了数的本质时,我们能够由此合理地解释这些马是 4。这个问题首先被毕达哥拉斯学派深入研究,但当今学界似乎没有意识到“数是什么”才是数学基础的关键问题。

毕达哥拉斯学派认为事物本身就是数,如马 a 自身就是 1 (即单位),否则我们没有理由称其为 1 (匹马)。由此可以认为,拉国王马车的马是 1、1、1 和 1,即 4。这种数在数学哲学中被称为具体数 (concrete number),具体数的实质在于把数等同于物,而不在于物是否为可感的物理对象。例如,我们也能说马是 1 个概念,这是把马这个概念等同为 1。毕达哥拉斯派数论的问题在于,物与物是互为不同的,由此得出马 a 与马 b 是不同的 1,与概念马也是不同的 1。这样,所有具体的 1 都是不同的,同样地,所有具体的 2 也都是不同的,其它的数也是如此,这就等于否定了数。一般认为,两个 1 组成 2,若干的 1 组成多,我们需要反思在毕达哥拉斯那里这些 1 何以组成了其它的数。其次,具体物如马 a 是会消亡的,但不能认为它的 1 会因此也消亡,因为即使马 a 不存在了,我们仍然可以说马 a 是 1 (匹马)。

柏拉图由此提出永恒的、不变的纯粹数 (pure number),这种数是相,说马 a 是 1 在于它分有了相 1。柏拉图惊讶地发现,如果马 a 是红的,马 b 也是红的,我们可以说马 a 和马 b 是红的;如果马 a 是 1,马 b 也是 1,但我们不能说马 a 和马 b 是 1,而只能说马 a 和马 b 是 2。这似乎意味着有不同的纯粹数 1。 $1+1+1=3$ 这样的算式也似乎表明不能只有一个纯粹的 1。大致出于这样的原因,柏拉图区分了相数和数学数,在数学数中的 1 是无穷多的,2 和 3 等数也都是无穷多的。但相数和数学数其实都是相,相在原则上是唯一的,怎么可能有无穷多的数学数呢?在批判柏拉图时,亚里士多德提出了抽象数 (abstract number),即数是实体的属性。例如,马 a 具有 1 的属性,所以可以说 a 是 1 (匹马),相应地马 a、b、c 和 d 是 4。亚氏的抽象数实质上也是相或形式,抽象数的问题在于,它们作为共相是实在的还是非实在的、是存在于殊相之中还是不在其中?与数的实体相关,这样的问题很难简单地肯定或否定。

关于数的本质,希腊学者已经充满分歧,但他们实际上都承认数存在于事物之中。柏拉图虽然认为数是纯粹的,但通过分有,数也存在于事物之中了。如果数在事物之中,似乎可以认为,我们看见了事物也就在特定意义上看见了数。康德哲学第一次提出一种不存在于事物之中的形式数 (formal number),这种数起源于时间并奠基基于主体的自发综合行为。这种

形式数不能通过感官看到，只能通过理性才能把握。受康德的影响，弗雷格和胡塞尔的数都是形式数。按照康德哲学概念与对象的二分，如果数不在事物之中，数不能是对象的属性，那么数只能是概念的属性。弗雷格与胡塞尔的数实际上都是概念的属性，这种数不能通过感官直接给予，恰恰表明只有以理性的方式才能把握数。

二、弗雷格论算术的逻辑基础

确立数是概念的属性，只是排除了数是物或物的属性，由此也否定了数和算术奠基于物理世界。弗雷格同时认为，算术也不能奠基于心理世界，也不能通过心理学把握数的本质。因此，我们不可能从对物的表象和对物的属性的表象中获得数。例如，数不能是“一个对象在一个系列中的位置的表象”。从表象这种把握方式看，主观表象显然是不可靠的，而客观表象同样不可靠，因为客观表象“本质上是不可感觉的”，并且“位置表象与位置本身”是不同的。^{[1]p44} 在这里，弗雷格实际上已经区分了数和对数的表象，即关于数的表象不是数本身。^{[2]p209} 这意味着即使把握了数的客观表象，也不等于是把握了数本身。

在排除了上述各种可能之后，弗雷格认为数和算术的本质是逻辑，数概念起源于逻辑。严格说来，弗雷格并没有证明算术是逻辑，而只是给出了三个辩护。即使他随后的算术逻辑系统能够成立，也只能说明逻辑参与了算术的基础，不能证明算术仅仅是逻辑，因为弗雷格发现算术系统中的真、概念（函数）和对象（主目）作为逻辑的初始概念无法定义。从胡塞尔的立场看，这些初始概念不能定义说明逻辑和算术的基础不是逻辑，因而需要哲学（即现象学）来澄清其基础。

弗雷格三个辩护的根据是，算术命题是先天的，不是先天综合的。因此在弗雷格看来，如 $1+1=2$ ，这类命题是纯形式的，数也是形式性的，它们都不涉及任何事实。胡塞尔部分地同意这一点，他也试图澄清数是纯形式的概念；不过，胡塞尔认为数及其命题的真起源于现象而不是逻辑。弗雷格认为，在排除了经验验证和心理学解释之后，算术的真只能追溯到逻辑定律和逻辑定义，而且在各种知识中，必须承认逻辑是普遍的。^{[1]p13}

其次，与几何的可在直觉中被把握的点、线和面等对象不同，“每个个别的数都有自己的特殊性”，^{[1]p28} 但人们不能直觉地把握某个数的特殊性是什么。在弗雷格看来，数的形式性决定了形式定义是把握数的可靠方式。

第三，与几何公理不同，算术的初始定律都不能被否定。就几何而言，人们总是可以假定某个公理（或某个定理）的反命题来推出一个新的、不自相矛盾的几何系统。“这种可能性表明，几何公理相互独立，并且不依赖于逻辑的初始定律，因而是综合的。”但关于数的原理不可能这样，“如果人们要否认这些原理中的一条，一切岂不全乱套了吗？...数的定律难道不应该与思维定律联系得最密切吗？”^{[1]p29}

总之，弗雷格的这些论述只是揭示了算术与逻辑的密切关系，以及算术系统的建构必须依赖逻辑。

三、数的外延定义

弗雷格认为数是对象，胡塞尔认为数是概念，但问题的实质不在于数是对象还是概念，而在于是否真正把握了数的本质。在数学中，数是概念，但个别的数也可以作为对象来把握。胡塞尔在《逻辑研究》、《观念 I》和《形式逻辑与先天逻辑》等著作中多次指出数是“范畴性对象”。在弗雷格那里，数是二阶概念，他在 GL 中认为数可以定义为由二阶概念确立的对象，因而不必诉诸概念的外延。所以弗雷格相信定义

I. 属于概念 F 的这个数是“等数于概念 F”这个概念的外延
可以简单地表述为：

II. 属于概念 F 的这个数是“等数于概念 F”这个概念 ^{[1]p85}

但弗雷格似乎意识到定义II通过概念定义数涉及概念的内涵,不能确定数的唯一性,因为“概念可以有相同的外延,而不重合”。也就是说,由“属于概念F的这个数=属于概念G的这个数(the number belonging to concept F=the number belonging to concept G)”,可以确定唯一的一个数,但在内涵上“属于概念F的数 $\neq$ 属于概念G的数(number belonging to concept F $\neq$ number belonging to concept G)”,所以定义

属于概念F的这个数是“等数于概念F”这个概念
与定义

属于概念F的这个数是“等数于概念G”这个概念
在内涵上不同,不能保证二者定义了同一个数。

而定义I则不同,按照定义I有:

III.属于概念F的这个数是“等数于概念F”这个概念的外延

VI.属于概念G的这个数是“等数于概念G”这个概念的外延

在“属于概念F的这个数=属于概念G的这个数”时,定义III和VI定义了相同且唯一的外延。因为“与概念F等数的”是二阶概念,它之下的对象是一阶概念G或其他概念,所以定义III和VI定义了同一个等价类(F, G, H, I, ...),即二阶概念的外延。显然,这个等价类的元素原则上是无穷的。弗雷格认为这个外延是对象,是一个类,它不是一个集合。胡塞尔与弗雷格的根本分歧在于,他认为这个等价类是一个多,一个集合。胡塞尔同时认为,数直接产生于多(集合),而非F、G等这类概念。

在PA中,胡塞尔有长达三章的内容对弗雷格进行了全面的批判,批判的核心是认为弗雷格的外延定义把数处理为某个对象是毫无意义的。在胡塞尔看来,说一个数是一个对象,等于什么也没有说;只有确定了一个多或集合的“多少”,^①才算真正把握了一个数。数是某个“多少”。很明显,“多少”是数的内涵意义。弗雷格本来是承认这一点的,他在GL中明确地说,“在下文中凡不做进一步说明的地方,所谈的数将只是正整数,它们回答‘多少’这个问题。”^{[1]p14}但是,他的外延定义恰恰没有揭示“多少”这个问题。

胡塞尔之所以认为数产生于多,因为他认为多和数直接奠基于现象。弗雷格认为概念的外延不是多,完全出于纯逻辑的理由。因为要把积聚、集合把握为一个对象(数),学者们普遍承认集合与元素是一种整体与部分的关系。在弗雷格看来,整体与部分的关系模糊了数的性质,因为不仅部分属于整体,部分的部分也属于整体,这就无法确定整体(即集合)的多少。其次,弗雷格在批评施罗德时指出,“一个类,在我们目前使用该词的意义上,由对象组成;它是一些对象的集和集合统一(collective unity)。如果这样,它必定随着这些对象的消失而消失。如果我们烧毁树林的所有树木,我们由此也烧毁了这个树林。这样不能存在空类。”^{[4]p212}弗雷格的这个批评不仅在于说空集概念是悖谬,而且也是说数不可能是集合,也不能产生于集合。因为集合会随对象的消失而消失,弗雷格的类(外延)虽然也是由对象组成的,但它完全由概念先天(逻辑)地决定,不会随对象的消失而消失。如概念“圆的方”的外延,在弗雷格看来,作为空集是不合理的,但作为空外延可以成立。这个批评显然也是对康托尔和胡塞尔的批评。最后,弗雷格认为,把对象统一为集合的关系不具有确定性。“这种关系可能是空间的、时间的、物理的、心理的、法律的,甚至是音程。”^{[5]p181}这明显是对胡塞尔的批评和讽刺,因为这些关系所把握的统一在弗雷格看来都不是必然的。但外延的统一性(unity)是确定的,它是由概念逻辑地决定的。

总之,弗雷格认为,“概念的外延不是通过个体被构造为存在,而是通过概念本身,也就是通过把对象置于概念之下时所谈及的东西。那么就不会反对,即使在不存在一些对象

① 与弗雷格一样,胡塞尔不认为数是物理对象的属性,他认为数是多(集合)的“多少”。以拉皇帝马车的4匹马为例,在胡塞尔看来,“拉皇帝马车的马”这个概念的外延是由这些马构成一个多或集合,4是这个集合的属性或“多少”。在此意义上,我们认为胡塞尔的数也是概念的属性,即多的“多少”。

bs 时我们谈到 bs 的类。而且，所有的空概念有相同的外延。”^{[4]p224f} 一般而言，概念包含内涵和外延两个方面，并且内涵、外延与概念应当处于同一层面。但按照弗雷格对概念与对象的严格区分，概念的外延作为对象是令人费解的。罗素在 1902 年给弗雷格的信中说：

“一般说来，如果像你这样把值程与概念密切相关，有相同外延的两个概念是否有同样的值程或仅仅等价的值程，这似乎是可疑的。如果一个类不由对象组成，而是被设定为对两个有相同外延的概念而言相同的东西，我发现很难理解类实际上是什么。然而我承认你反驳（施罗德的）外延观点的理由似乎是不可反驳的。我每天都对概念的外延实际上意指什么理解得越来越少。”^{[6]p139}

众所周知，弗雷格的定义 I 的主要根据是：数是概念的属性，莱布尼茨的保真替换原理和休谟原理。胡塞尔在 PA 中通过对这些论述的批判彻底否定了弗雷格的方案。

四、胡塞尔对弗雷格的批评

如前所述，弗雷格后来也承认初始概念是不能定义的，不过这些初始概念是逻辑中的概念、对象等概念。胡塞尔认为，算术中的数就是初始概念，只有通过哲学——而非逻辑——才能澄清初始概念并为数学奠基。胡塞尔说：

“关于数的相等和不同的所谓‘定义’就属于这一类，我们现在的工作是反驳它们。它们其实特别要求我们的关注，恰恰因为它们引起了一类关于数概念本身的定义。这些定义毫无根据，在科学上也没有用处，然而，这些定义由于确定的形式特征，在数学家和受他们影响的哲学家中得到赞许。”^{[3]p96}

1、关于保真替换

莱布尼茨的保真替换原理认为：“能用一个事物保真地替换另一个事物，这两个事物是相同的。”弗雷格的定义 I 运用了这个原理。我们知道，通过休谟原理可以得到：

属于概念 F 的这个数 = 属于概念 G 的这个数

恰如上述罗素指出的，这个句子在内涵（概念）上难以理解，并且仅在外延上可以成立。由此可以得出，“概念 F 是等数于概念 G 的”，即“同一个数既属于 F 这个概念，又属于 G 这个概念”。通过对象的保真替换就有：

“等数于概念 F”这个概念的外延与“等数于概念 G”这个概念的外延等同

进一步替换这个句子，可以得到定义 I。

胡塞尔认为弗雷格所利用的同一替换原理是不可靠的。首先，“只要存在丝毫不同，就会存在相关事物在其中不能被保真替换的判断。”其次，只有相等或相同的事物可以保证命题有同样的真值，但相同真值的命题不能保证事物的相等或相同。所以，“很清楚，（莱布尼茨的）这个定义歪曲了真正的事实（Sachverhalt）。”^{[3]p97} 第三，除了莱布尼茨的这个定义以外，我们无法以其他手段来保证命题的真值与事物的可替换性（Vertauschbarkeit）完全一致。所以在利用莱布尼茨的替换原则时，要知道替换之后命题的真值只能诉诸可替换性，而要知道对象的替换是否可靠反过来又只能依赖于命题的真值，结果是在命题的真值与可替换性之间陷入了无穷后退（unendlichen Regressen）。^{[3]pp97-98}

按照胡塞尔的这个批评，可以认为弗雷格的定义没有捕捉到同一个对象。罗素也曾经认为：“我们可以看出，这个公理就是莱布尼茨的‘不可分辨的同一’的普遍形式……我们在狭义的意义上使用‘谓词’这个词，在狭义的意义上也很可能有两个东西具有完全相同的谓词，这是抽象逻辑中可能的事。”^{[7]p197} 如果胡塞尔与罗素的看法成立，弗雷格的定义就没有任何价值可言。

不过，达米特为弗雷格提出了一种辩护。达米特承认胡塞尔所强调的概念的优先（conceptual priority），即内容的同一性保证了其可替换性，反之则不然。达米特发现弗雷格在强调对象同一性之前还强调了同一律，也就是分析的同一性。这个同一律要求“作为分

析的真命题，它们能够从概念本身产生出来”，^{[1]pp81-82} 这样，弗雷格其实也默认了概念优先。

“胡塞尔反驳弗雷格把莱布尼茨的同一定义作为解释数概念的基础，实际上是搞错了；尽管弗雷格承认它是一个真正的定义，他的全部关切是由该定义成立所导致的同一律，以及在数学中等号应当被解释为意指严格的同一。”^{[8]p142} 达米特的意思是说，按照弗雷格的分析性观念，如果他确定了数的相等，那么在弗雷格的定义过程中，这个等数在逻辑上是可靠的。这样，弗雷格关于数的定义仍然可以成立。如果这样理解，弗雷格显然只能保证被把握的数是同一个数，但数的对象同一性问题则被模糊掉了。

2、等数的定义

弗雷格定义的另一个重要前提是休谟原理。胡塞尔承认，对象的一一对应（Gegenseitige Zuordnung）确立了弗雷格所需要的外延的等价关系。“我们完全同意，就获得等数来说，它在逻辑意义上规定了一个必要而充分的条件，并且在所有情况下都有效。”^{[3]p105} 利用休谟原理来定义等数，这在当时是学者们通行的方法，胡塞尔认为这种定义方式是缺乏根据和没有价值的。

就弗雷格而言，一一对应无非表明 Fs 与 Gs 同样多，所以 F 等数于 G，但这不过是一个常识。如果反问为什么属于 F 的数等于属于 G 的数时，只能回答 Fs 与 Gs 同样多，这实际上是循环定义。但是，两个多的一一对应并不“构成它们的等数，而仅仅保证了它们的等数”。在胡塞尔看来，是数的内涵意义确立了 F 等数于 G，所以弗雷格所定义的数的指称不能说明等数的深层根据。这是因为，知道两个多等数完全不需要知道它们是一一对应的，休谟原理中的“被定义项与定义项在概念上不是等价的”，它“表达了一个真命题，但不是关于同一性的命题。”^{[3]p99}

在 GL 的 §§71-72 节中，弗雷格进一步把对象的一一对应还原为纯逻辑关系。这样他可以由“存在一种关系 φ ，使处于概念 F 之下的对象与处于概念 G 之下的对象相互一一对应”，同样得到定义 I。胡塞尔由此指出，在数学的不同分支中，如度量几何和拓扑学中，人们可以把握相同对象的不同对应关系。在其他领域中，原则上人们也可以以不同的关系把握事物的一一对应。弗雷格明显忽视了这个关系 φ 是未定的。“一旦我们确立了确定的对应关系，我们将获得确定的数的种类，并因此是不同的 2s、3s，等等。这当然是弗雷格没有意识到的一个结果。”^{[3]p107} 胡塞尔这里的意思很清楚，即概念之下的对象的一一对应可以是不同性质的关系，可以是 φ 也可以是 ψ 或其他某种关系，所以按照弗雷格的方案，弗雷格事实上将会定义出一类不同的 2、一类不同的 3 等等，而不是作为对象的唯一的 2、3 等等。丧失了被定义对象的唯一性，弗雷格的外延系统是难以承受的。如果说胡塞尔之前对弗雷格的反驳主要出自哲学立场的不同，这个批判则完全出自弗雷格方案自身的逻辑，并从内部否定了弗雷格的方案。

康托尔无疑是使用一一对应关系的数学大师，但恰恰康托尔并不把数奠基于一一对应关系。康托尔在他的《一般集合论基础》中说，“一个确定的势（Mächtigkeit）产生于一个良序集合；同一个势产生于两个集合，如果它们能元素对元素地相互一一对应。”按照这个定义，康托尔似乎也是把数奠基于一一对应关系，但事实并非如此。康托尔认为：

“对于一般概念 5 的形成，仅仅需要一个集合....这个基数产生于它。”^{[3]p116}

所以在康托尔那里，数的基础是集合，而非外在的一一对应关系，一个集合自身就决定了一个数。胡塞尔的立场与康托尔完全一致，并实际上是在为康托尔做哲学辩护。基于上述理由，胡塞尔彻底否定了弗雷格的外延定义，因为“‘等数于概念 F’这个概念的外延”是“‘等数于概念 F’这个概念的整体，一个无穷多的等价（äquivalenten）集合的整体。”所以弗雷格的定义是一个正确的命题，但“也是无用的命题”。

3、数的命题的意义

德布尔曾经指出，弗雷格对 PA 批评是“唯一深入的评论”（中译本, 1979, p. 21.）。我们的上述考察表明，胡塞尔反驳 GL 的深刻性也至今未被超越。

参考文献

- [1] 弗雷格. 算术哲学[M]. 王路,译, 北京:商务印书馆, 1998.
- [2] G. Frege, *Review of Husserl, Philosophy of Arithmetic*[M], 1894, in *Gottlob Frege: Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, 1984.
- [3] E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*[M], L. Eley(Ed.). The Hague: Martinus Nijhoff, 1973.
- [4] G. Frege, *Gottlob Frege: Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*[M], Oxford: Basil Blackwell, 1984.
- [5] G. Frege, *Posthumous Writings*[M], Chicago: University of Chicago Press, 1979.
- [6] G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*[M], Ed. B. McGuinness, Trans. H. Kaal, Chicago: University of Chicago Press, 1980.
- [7] 罗素. 数理哲学导论[M]. 晏成书,译, 北京:商务印书馆, 2010.
- [8] M. Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*[M], Massachusetts: Harvard University Press, 1991.