

悖论之简美

—从目的论解释到定量描述

赵艺 熊明

华南师范大学
政治与行政学院

2015 年数学哲学学术讨论会
暨第二届现象学与数学哲学研讨会

复旦大学哲学学院

2015 年 12 月 12-13 日

一个方法论问题

集理论	真理论
内涵模式	T-模式
罗素悖论	说谎者悖论
ZF, GB, NF	FS, KF
实数集不可数 连续统假设	??? 说谎者语句

- 关于悖论本身是否有“漂亮”的结果？

一个方法论问题

集理论	真理论
内涵模式	T-模式
罗素悖论	说谎者悖论
ZF, GB, NF	FS, KF
实数集不可数 连续统假设	??? 说谎者语句

- 关于悖论本身是否有“漂亮”的结果？

Outline

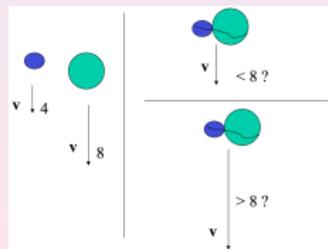
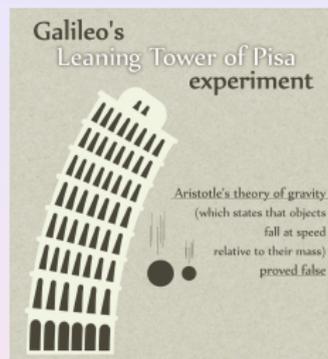
- 1 定量描述 vs. 目的论解释
- 2 悖论的目的论解释
- 3 悖论的定量描述

Outline

- 1 定量描述 vs. 目的论解释
- 2 悖论的目的论解释
- 3 悖论的定量描述

伽利略：近代科学的奠基人

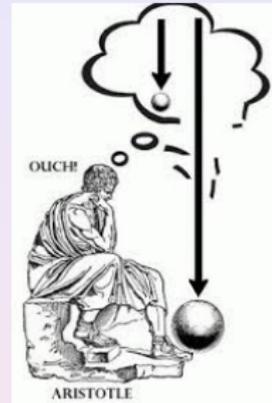




近代科学成功的秘密，就在于在科学活动中选择了一个新的目标。这个由伽利略提出的、并为他的后继者们继续追求的新的目标，就是寻求对科学现象进行**独立任何物理解释的定量的描述**。
(M. 克莱因，2005，《西方文化中的数学》，张祖贵译，184)

希腊科学家们主要致力于**解释**现象**为什么会**发生的原因。例如，亚里士多德花费了大量时间，试图解释为什么扔向空中的物体会落到地球上。……

伽利略第一个认识到，这些关于事件原因和结果的玄想，远远不能增进科学知识，丝毫不能给人们以任何揭示和控制自然界运动的力量。有鉴于此，他提出要以一种**关于现象的定量描述**来取代那些玄想。”（M. 克莱因，2005，《西方文化中的数学》，张祖贵译，184-185）



$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = gt$$

数学公式 vs. 因果关系

数学公式是对于所发生事件的一种描述，而不是对引起这种事件因果关系的一种解释，认识到这一点非常重要。公式 $d = 16t^2$ ，对于球**为什么下落**，以及球在过去或将来是否继续下落等问题**没作任何说明**。它仅仅给出了**关于一个球如何落下的定量描述**。

在这些单纯的数学公式中，似乎没有什么真正的价值。它们解释不了什么东西。只是以一种精确的语言来对事物作描述。但是，这些公式公式却被证明是人类所获得的关于自然界最有价值的知识。（M. 克莱因，2005，《西方文化中的数学》，张祖贵译，186）

Outline

- 1 定量描述 vs. 目的论解释
- 2 悖论的目的论解释
- 3 悖论的定量描述

说谎者悖论

语句 (L) 是假的 (L)

佐丹卡片悖论，明信片悖论

语句 (C_2) 为假 (C_1)

语句 (C_1) 为真 (C_2)

n -卡片悖论

n -卡片序列 C^n

语句 (C_n^n) 为假 (C_1^n)

语句 (C_1^n) 为真 (C_2^n)

语句 (C_2^n) 为真 (C_3^n)

... ..

语句 (C_{n-1}^n) 为真 (C_n^n)

文兰悖论，2003

语句 (B) 为真，但语句 (C) 为假， (A)

或者语句 (A) 为假，或者语句 (C) 为真， (B)

语句 (A) 、 (B) 都为真。 (C)

亚布鲁悖论 (Yablo's paradox), 1985

对任意 $k > 1$, 语句 (Y_k) 为假 (Y₁)

对任意 $k > 2$, 语句 (Y_k) 为假 (Y₂)

... ..

对任意 $k > n$, 语句 (Y_k) 为假 (Y_n)

... ..

麦基悖论 (McGee's paradox), 1985

存在 $k \geq 1$, 使得 (M_k) 为假 (M_1)

语句 (M_1) 为真 (M_2)

... ..

语句 (M_k) 为真 (M_{k+1})

... ..

In my judgment, it would be quite wrong and dangerous from the standpoint of scientific progress to depreciate the importance of this [the liar paradox] and other antinomies, and to treat them as jokes or sophistries.

*We must **discover its cause**, that is to say, we must analyze premises upon which the antinomy is based; we must then **reject at least one of these premises**, and we must investigate the consequences which this has for the whole domain of our research. (A. Tarski, 1944, 348)*

- A. Tarski, 1936, The concept of truth in formalized languages, *Studia Philosophica*, 1: 261–405.
- S. A. Kripke, 1975, Outline of a theory of truth, *Journal of Philosophy*, 72(19): 690–712.
- H. Friedman and M. Sheard, 1987, An axiomatic approach to self-referential truth, *Annals of Pure and Applied Logic*, 33:1–21.

塔斯基不可定义性定理

Tarski, 1936

对于丰富到包含初等算术且带有一元谓词符 T 的语言，如果其中语句按照经典的二值赋值模式进行解释，那么不论如何解释 T ，其外延都不可能刚好包含这个语言中的所有真语句（的哥德尔编码）。

粗略地说，在经典的二值赋值下，下一模式（**T-模式**）不可能对此语言中的任何语句 A 都成立：

$T \ulcorner A \urcorner$ ，当且仅当 A

语言层次与说谎者悖论

- 语言的分层： \mathcal{L} , \mathcal{L} 的元语言（含 T_1 ）, \mathcal{L} 的元元语言（含 T_2 ）, ...
- 在 \mathcal{L} 的元语言中构造的类似于说谎者的语句不能代入到 T_1 -模式中。
- 任何一个语言层次都不会出现会导致悖论的说谎者语句。

克里普克不动点定理

Kripke, 1975

对于丰富到包含初等算术且带有一元谓词符 T 的语言，如果其中语句按照某些三值赋值模式（比如 Kleene 强三值模式）进行解释，那么对 T 存在这样的解释，使得其外延刚好包含这个语言中的所有真语句，而其反外延刚好包含这个语言中的所有假语句。

粗略地说，在某些三值赋值模式（比如 Kleene 强三值模式）下，塔斯基 T-模式对此语言中的任何语句 A 都成立。

不动点与说谎者悖论

- 悖论作为语句存活下来了，并且得到了统一的定性。
- 说谎者以及同类的悖论语句的定性：一个语句是悖论的，当且仅当它相对于任何不动点都不真又不假。

弗里德曼和谢尔德的公理系统 FS

Friedman & Sheard, 1987

FS: 以下公理和规则构成的公理系统:

■ 公理:

$$T \ulcorner A \rightarrow B \urcorner \rightarrow T \ulcorner A \urcorner \rightarrow T \ulcorner B \urcorner$$

$$\neg(T \ulcorner A \urcorner \wedge T \ulcorner \neg A \urcorner)$$

$$T \ulcorner A \urcorner \vee T \ulcorner \neg A \urcorner$$

$$T \ulcorner \exists x A \urcorner \rightarrow \exists x T \ulcorner A(\dot{x}) \urcorner$$

■ 规则:

$$\frac{A}{T \ulcorner A \urcorner}$$

$$\frac{\neg A}{\neg T \ulcorner A \urcorner}$$

$$\frac{T \ulcorner A \urcorner}{A}$$

$$\frac{\neg T \ulcorner A \urcorner}{\neg A}$$

FS 与悖论

- FS 是一致的：在某个底模型中， T 存在某种解释满足 FS 的全体语句。
- FS 是 ω -不一致：在标准的底模型中， T 不存在解释能满足 FS 的全体语句（麦基悖论!）。

目的解释性的真理论

- 在既有的真理论中，绝大多数都是以消除悖论作为基本的目标。
- 为此，悖论出现原因的定位是理论的基本任务，也是指出某个理论有所缺失的基本标准。

Outline

- 1 定量描述 vs. 目的论解释
- 2 悖论的目的论解释
- 3 悖论的定量描述

它 [修正真理论] 以通常的二值逻辑语言作为起点，其中语义悖论事实上是不可回避的。我不是试图去消除这些悖论，而是考虑这样的一种实验：正面地支持它们产生并观察它们以自己特有的方式运作。……；基本的想法就是，后退一步让悖论显示出它们的内在原则。（Herzberger, 1982, JP, 479）

悖论语句并不具有一个固定的真值，而是具有赋值的循环模式。这种循环模式是悖论语句最基本的语义特征。
(Herzberger, 1982, JP, 492)

例子

	0	1	2	3	...
L	F	T	F	T	...

	0	1	2	3	4	...
L_1	F	T	T	F	F	...
L_2	F	F	T	T	F	...

定量表述的推进

修正真理论所揭示的悖论周期性特征是悖论的一种定量描述，这种描述方法为认识悖论提供了一种新的研究视角。

但周期性特征并没有对悖论的矛盾性特征进行描述，我们希望**对悖论的矛盾性进行直接的定量描述**。

相对化 T-模式

■ $\mathcal{K} = \langle W, R \rangle$: 关系框架

☞ W : 非空集, 其中的元素称为可能世界, 或点

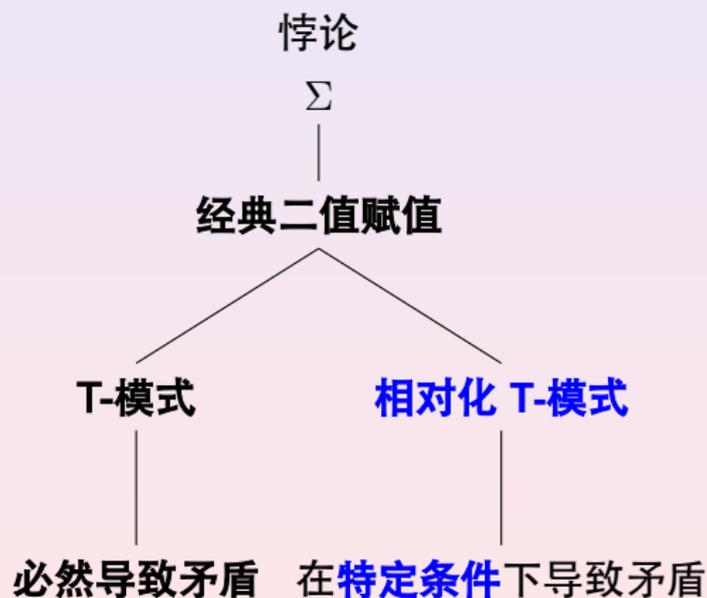
☞ R : W 上的二元关系, 称为通达关系

$$(T \ulcorner A \urcorner \iff A)_{\mathcal{K}}$$

对 \mathcal{K} 中满足 u 通达 v 的可能世界 u, v , 都有:

在 v 有 $T \ulcorner A \urcorner$, 当且仅当在 u 有 A 。

悖论与相对化 T-模式



若干定理

- 说谎者语句在一个框架中是悖论的，当且仅当这个框架中含有长度为奇数的循环。
- 一般地，对任意正整数 $n = 2^i(2j + 1)$ ， n - 卡片序列在一个框架中是悖论的，当且仅当这个框架中含有高度不能被 2^{i+1} 整除的循环。

悖论度

- $\Sigma \leq \Gamma$: 对每个框架 \mathcal{K} , 若 Σ 在 \mathcal{K} 中是悖论的, 则 Γ 在 \mathcal{K} 中也必定是悖论的。
- $\Sigma = \Gamma$: ...
- $\Sigma < \Gamma$: ...

C^n : n -card paradox

$$\begin{array}{cccccc}
 C & < & C^2 & < & C^4 & < & C^8 & \dots \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \dots \\
 C^3 & < & C^6 & < & C^{12} & < & C^{24} & \dots \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \dots \\
 C^5 & < & C^{10} & < & C^{20} & < & C^{40} & \dots \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \dots \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots
 \end{array}$$

定量描述：漂亮的结果？

集理论	真理论
内涵模式	T-模式
罗素悖论	说谎者悖论
ZF, GB, NF	???
实数集不可数 连续统假设	悖论语句的定量描述 悖论语句

主要观点 1

- 说谎者及类似悖论具有简美性 (dry beauty)。



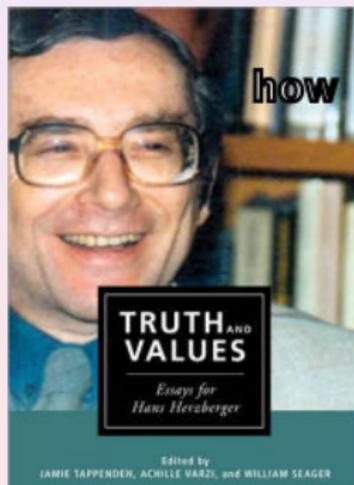
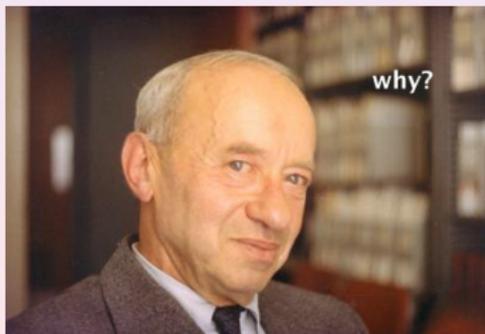
主要观点 2

- 不必再禁止悖论，相反应鼓励产生更多的悖论。



主要观点 3

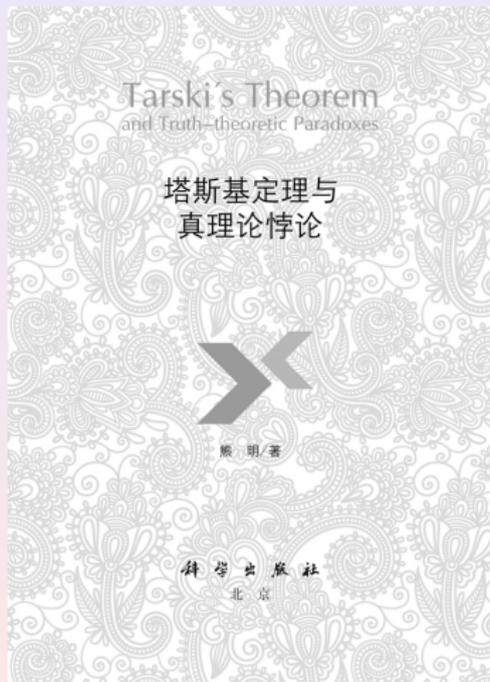
- 悖论研究的新目标：对悖论语句获得**独立于任何目的论解释的定量描述**。



寻求自然事物的原因，不得超出真实和足以解释其现象者。

为达此目的，哲学家们说，自然不做徒劳的事，解释多了白费口舌，意简意赅才见真谛；因为自然喜欢简单性，不会响应于多余原因的侈谈。（牛顿《自然哲学的数学原理》，哲学中的推理规则之规则 I）

欲了解更多的悖论定量描述，参考：



Thanks for your attention!
Q & A