模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2022 年春季

前情提要

- 模态逻辑的语言，模态语言类型
- 框架与模型
- 模态逻辑的语义概念：$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$，$\mathfrak{M} \Vdash \phi$，$\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$，$\mathfrak{F} \Vdash \phi$，$\mathsf{F} \Vdash \phi$

模态语义后承

记法

- 如果 S 是模型类，称 $\mathfrak{M}$ 是 来自 S 的模型 ，即 $\mathfrak{M} \in$ S
- 如果 S 是框架类，称 $\mathfrak{M}$ 是 来自 S 的模型 ，即 $\mathfrak{M}$ 是 S 中某个框架基础上的模型
- 给定模态逻辑语言类型 τ，当我们提到一个 τ-结构类 S，要么 S 是一个 τ-模型类，要么是一个 τ-框架类

模态语义后承

定义 (局部语义后承)

给定模态语言类型 τ，和 τ-结构类 S。令 Σ 和 ϕ 分别是语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式集和公式。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的局部语义后承，记作 $\Sigma \Vdash_{\mathsf{S}} \phi$，当且仅当对任意来自 S 的模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中的任何状态 w 有，$\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$

模态语义后承

例

- $\Diamond\Diamond p \Vdash_{\mathsf{Tran}} \Diamond p$
- $p \Vdash_{\mathsf{S}} \neg p$，其中 S 是基本模态逻辑的模型类：

$$\mathsf{S} = \{(\mathfrak{F}, V) \mid V(p) = \emptyset\}$$

模态语义后承

定义 (全局语义后承)

同样给定 $\tau, \mathsf{S}, \Sigma, \phi$。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的全局语义后承，记作 $\Sigma \Vdash^g_{\mathsf{S}} \phi$，当且仅当对每个来自 S 的结构 $\mathfrak{S}$ 都有，$\mathfrak{S} \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathfrak{S} \Vdash \phi$

例

$p \Vdash^g_{\mathsf{S}} \Box p$，其中 S 可以是任何结构类

注意: 我们一般关心基于框架类的局部语义后承

K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**

定义

- **K** 的公理包括
  - 所有命题重言式例式

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

(Dual) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$

K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**

定义

- **K** 的证明规则 包括
  - 分离规则（*modus ponens*）：由 ϕ 和 $\phi \to \psi$ 可证 ψ
  - 必然化规则 （generalization）：由 ϕ 可证 $\Box\phi$
  - 统一代入规则 （uniform substitution）：由 ϕ 可证 ϕ^σ

K-系统

定义

- 定义一个 **K**-证明 为一个有穷公式序列，其中每条公式要么是 **K** 的公理，要么是由之前的公式应用 **K** 中证明规则得到的。
- 我们称一个公式 ϕ 是 **K**-可证的 ， 当且仅当 ϕ 是某个 **K**-证明的最后一条公式，记作 $\vdash_{\mathbf{K}} \phi$

K-系统

例

- $p \to (q \to (p \land q))$
- $\Box(p \to (q \to (p \land q)))$
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- $\Box(p \to (q \to (p \land q))) \to (\Box p \to \Box(q \to (p \land q)))$
- $\Box p \to \Box(q \to (p \land q))$
- $\Box(p \to (p \land q)) \to (\Box p \to \Box(p \land q))$
- $\Box p \to (\Box q \to \Box(p \land q))$，即 $(\Box p \land \Box q) \to \Box(p \land q)$

K 的可靠性

- 所有命题逻辑重言式例式、(Dual)和(K)都是有效的
- 分离规则保持框架类，框架全局/局部有效性，模型全局真和局部真（满足）
- 统一代入保持框架类，框架全局/局部有效性，不保持模型全局真或局部真
- 必然化规则保持框架类，框架（全局）有效性，模型全局真，不保持框架局部有效性或模型局部真

$\mathbf{K}$ 的可靠性

我们一般期望用模态逻辑公理系统来刻画（框架类）有效性

事实

$\mathbf{K}$ 是（针对所有框架类）可靠的，即对任意框架 $\mathfrak{F}$，$\vdash_{\mathbf{K}} \phi$ 蕴含 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$

事实上，$\mathbf{K}$ 也是（针对所有框架类）完全的。在这个意义上，我们称 $\mathbf{K}$ 是（克里普克语义学意义上）极小的模态逻辑公理系统

正规模态逻辑

定义 (正规模态逻辑)

我们定义 正规模态逻辑 （normal modal logic）为一个公式集 Λ，它包含所有的命题逻辑重言式例式、($\mathbf{K}$)、(Dual) 并且在分离规则、统一替换规则和必然化规则下封闭。

例

- **K** 是最小的正规模态逻辑
- **K4** 是 **K** 的基础上添加公理 $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ 得到的
- 令 F 是所有基本模态逻辑框架组成的框架类，定义

$$\Lambda_{\mathsf{F}} = \{\phi \mid \mathsf{F} \Vdash \phi\}$$

则 Λ_{F} 是一个正规模态逻辑

模态不变性

回忆: 一阶谓词逻辑表达力的界限：同态、同构、子模型、初等等价

不变性（invariance）结果刻画了一种人工语言的表达力界限，同时勾勒出所关心的研究领域

模态不变性

定义

- 给定模态语言类型 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的状态 w 和 w'。定义 w 的 τ-理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$。我们称 w 和 w' 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$ 或 $w \leftrightsquigarrow w'$，当且仅当它们有相同的 τ-理论
- 我们定义模型 $\mathfrak{M}$ 的 τ-理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M} \Vdash \phi\}$。我们称模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}$，当且仅当它们有相同的 τ-理论

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ，索引集 I。对每个 $i \in I$，$\mathfrak{M}_i$ 是一个 τ-模型。对任意 $i \in I$ 任意 $\mathfrak{M}_i$ 中 w 有

$$\mathfrak{M}_i, w \leftrightsquigarrow \biguplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w$$

即不交并保持模态不变性

证明.

对 τ-公式复杂度归纳证明

下期预告

- 模态不变性与互模拟
- 有穷模型性