模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2022 年春季

课程信息

- 时间地点：
  - 周一 18:30 - 20:10，HGW2403
- 网站：

  `http://logic.fudan.edu.cn/course`
- 教材：Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2002

回顾：命题逻辑

命题逻辑语言的符号：

- 可数无穷多个 命题变元符号 ： $p_0, p_1, p_2, \ldots$
- 命题常数符号：$\perp$（Bottom），$\top$（Top）
- 联词 ： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号 ： $(,)$

回顾：命题逻辑

命题逻辑合式公式

- 每个命题变元符号、命题常数符号都是 合式公式
- 若 ϕ, ψ 是合式公式，那么

  $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \phi \leftrightarrow \psi$ 也是 合式公式

记法

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (真值指派)

我们说 V 是一个 真值指派 ，当且仅当 V 是以由命题符号组成的集合 $\mathcal{A}$ 为定义域、以真值集合 $\{0,1\}$ 为值域的函数

$V : \mathcal{A} \to \{0,1\}$

回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{V}: \mathcal{F} \to \{0,1\}$

0. 对 $p \in \mathcal{A}$，$\bar{V}(p) = v(p)$，$\bar{V}(\bot) = 0$，$\bar{V}(\top) = 1$
1. 对任意公式 ϕ, ψ，

$$\bar{V}(\neg\phi) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{V}(\phi) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 V，我们定义 V 的扩展 $\bar{V} : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$

0. 对 $p \in \mathcal{A}$，$\bar{V}(p) = v(p)$，$\bar{V}(\bot) = 0$，$\bar{V}(\top) = 1$
1. 对任意公式 ϕ, ψ，

$$\bar{V}(\phi \vee \psi) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{V}(\phi) = 1 \text{ 或者 } \bar{V}(\psi) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑公理系统：

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

- 推演规则：分离规则

回顾：一阶谓词逻辑

一阶谓词逻辑语言符号:

- 命题联词: $\neg, \rightarrow$
- 量词： $\forall, \exists$
- 变元: $v_1, v_2, \ldots$
- 常数符号: $c_1, c_2, \ldots$
- 函数符号: $f_1, f_2, \ldots$
- 谓词符号: $P_1, P_2, \ldots$
- 等词: $\approx$

回顾：一阶谓词逻辑

一阶谓词逻辑的公理系统：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中变元 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

- 结构: $(|\mathfrak{A}|, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_m^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}})$
- 赋值: $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

- 塔斯基真定义：
  - α 是原子公式
    - $(\mathfrak{A}, s) \vDash t_1 \approx t_2$ ，当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$
    - $(\mathfrak{A}, s) \vDash Pt_1 \ldots t_n$ ，当且仅当 $(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$
  - $(\mathfrak{A}, s) \vDash \neg\beta$ ，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$
  - $(\mathfrak{A}, s) \vDash \beta \to \gamma$ ，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \gamma$

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

- 塔斯基真定义：
  - $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\beta$，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \vDash \beta$

    其中 s_d^x 是通过对 s 改造得到的 $\mathfrak{A}$-赋值：

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

回顾

命题逻辑与一阶逻辑的可靠性与完全性:

$$\Sigma \vdash \phi \iff \Sigma \models \phi$$

注意: 命题逻辑是可判定的，一阶谓词逻辑不是可判定的

回顾

"定义"

- 命题逻辑的定义：一个命题逻辑公式 ϕ "定义" 了一个布尔函数 B_ϕ
- 一阶逻辑语句定义结构类
- 一阶谓词逻辑公式在结构中定义结构论域上的集合、关系、函数

同构与初等等价

回顾

经典逻辑（命题逻辑、一阶谓词逻辑）刻画的是“真”这个模态词

- 模态逻辑可以被用来刻画更多的模态词，如：可能/必然，将来/过去，知道，应该/允许，等等
- 模态（命题）逻辑是命题逻辑的扩张，是二阶谓词逻辑的片断

模态逻辑的语言

定义 (基本模态语言)

我们定义基本模态语言（basic modal language）为：

$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi$$

基本模态逻辑的语言在命题逻辑的基础上添加了一个一元模态词（modal operator）：$\Diamond$ （Diamond）

模态逻辑的语言

记法

我们规定如下缩写：

$$\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi \qquad \text{(Box)}$$

$$\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\phi \to \psi := \neg\phi \vee \psi$$

$$\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$$

$$\top := \neg\bot$$

模态逻辑的语言

例

一般将 $\Diamond\phi$ 读作"ϕ 是可能的"，$\Box\phi$ 即 $\neg\Diamond\neg\phi$ 则表示"非 ϕ 是不可能的"，也即"ϕ 是必然的"。尝试翻译：

- $\Box\phi \to \Diamond\phi$
- $\phi \to \Diamond\phi$
- $\phi \to \Box\Diamond\phi$
- $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$

模态逻辑的语言

例

在认知逻辑（epistemic logic）中，$\Box\phi$ 常被写作 $K\phi$，读作 “(某人）知道 ϕ”

- $K\phi \to \phi$
- $K\phi \to KK\phi$

模态逻辑的语言

例

在可证性逻辑（provability logic）中 $\Box\phi$ 读作 “ϕ 是可证的”

- $\Box\phi \to \Box\Box\phi$
- $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ （Löb’ formula）

定理 (Löb 定理)

若 PA $\vdash \mathrm{Prov}_{\mathrm{PA}}(\phi) \to \phi$，则 PA $\vdash \phi$

模态逻辑的语言

定义 (模态语言类型)

一个 模态语言类型 （modal similarity type）是一个有序对 $\tau = (O, p)$，其中 O 是模态词的集合，非空。$p : O \to \mathbb{N}$ 告诉我们每个模态词是几元的。

给定命题变元符号集 Φ 和模态语言类型 $\tau = (O, p)$，唯一决定了模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$：

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \triangle\, (\phi_1, \ldots, \phi_{\rho(\triangle)})$$

其中 $p \in \Phi$、$\triangle \in O$。用 $Form(\tau, \Phi)$ 表示该语言的公式集

模态逻辑的语言

例

基本时态逻辑：有两个一元模态词 $O = \{F, P\}$。F 和 P 类似 $\Diamond$ 算子。$F\phi$ 常读作“在未来某个时刻 ϕ（成立）”，$P\phi$ 读作“在过去某个时刻 ϕ”。通常定义 $G\phi := \neg F \neg \phi$，表示“未来总是 ϕ”；定于 $H\phi := \neg P \neg \phi$，表示“过去一直 ϕ”。

- $P\phi \rightarrow GP\phi$
- $F\phi \rightarrow FF\phi$
- $GFp \rightarrow FGp$ (Mckinsey formula)

模态逻辑的语言

例

时态逻辑可以加入更丰富的模态词，如二元模态词 $U(\phi,\psi)$，读作“ψ 直到 ϕ”（ψ until ϕ），二元模态词 $S(\phi,\psi)$，读作“自从 ϕ，ψ”（ψ since ϕ）

- $F\phi \leftrightarrow U(\phi,\top)$，$P\phi \leftrightarrow S(\phi,\top)$

模态逻辑的语言

定义 (代入)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$，一个该语言的 代入 （substitution）是一个函数 $\sigma : \Phi \to Form(\tau, \Phi)$。一个代入可以被扩张到定义在全体公式集上的函数

$(\cdot)^\sigma : Form(\tau, \Phi) \to Form(\tau, \Phi)$：

下期预告

模型与框架