模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情提要

- 过滤
- 标准翻译 $ST_x(\phi)$
- Hennessy-Milner 类与模态饱和

滤和超滤

定义

任给非空集合 W，定义 F 是 W 上的滤（filter），若 $F \subset P(W)$ 且满足

- $W \in F$，$\emptyset \notin F$
- 对任意 $X, Y \in F$，$X \cap Y \in F$
- 对任意 $X \in F$ 任意 $Z \subset W$ 且 $Z \supset X$，$Z \in F$

我们称 W 上的滤 U 是 超滤（ultrafilter），当且仅当对任意 $X \subset W$，$X \notin U$ 蕴含 $(W \setminus X) \in U$

滤和超滤

定义

- 令 W 是一个非空集合，$E \subset P(W)$。我们称 E 有有穷交性质，当且仅当 E 中任意有穷多个元素的交非空。
- 假设 $E \subset P(W)$ 有有穷交性质，称

$$F = \{Y \subset W \mid \text{存在 } n \in \mathbb{N} \text{ 和 } X_1, \ldots X_n \in E \text{ 有 } Y \supset \bigcap_{1 \le i \le n} X_i\}$$

$$= \bigcap \{G \mid E \subset G \text{ 且 } G \text{ 是 } W \text{ 上的滤}\}$$

是 由 E 生成的 W 上的滤

定理 (超滤存在)

对任意非空集合 W，任意 W 上的滤 F，存在 W 上的超滤 $U \supset F$。因而，任何具有有穷交性质的 $E \subset P(W)$ 都可以扩张为一个超滤。

超积与超幂

定义

假设 U 是非空集合 I 上的超滤，并且对每个 $i \in I$ 又非空集合 A_i

- 定义 $\prod_{i\in I} A_i = \{f \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^I \mid \forall i \in I\ f(i) \in A_i\}$
- 称 $f, g \in \prod_{i\in I} A_i$ 是 U-等价的，记作 $f \sim_U g$，当且仅当

$$\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$$

注意：$\sim_U$ 是 $\prod_{i\in I} A_i$ 上的等价关系

超积与超幂

定义

- 对任意 $f \in \prod_{i\in I} A_i$，定义 $[f]_U = \{g \in \prod_{i\in I} A_i \mid g \sim_U f\}$
- 定义 $\langle A_i\rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 (ultraproduct)

$$\prod_U A_i = \{[f]_U \mid f \in \prod_{i\in I} A_i\}$$

- 如果每个 $A_i = A$，我们将 $\prod_U A_i$ 记作 $\prod_U A$，称作 A 模 U 的超幂 (ultrapower)

超积与超幂

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构序列 $\langle \mathfrak{A}_i \rangle_{i\in I}$ 和 I 上超滤 U，我们定义 $\langle \mathfrak{A}_i \rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为下述 $\mathcal{L}$-结构

- $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 的 论域 是集合 $\prod_U A_i$，其中每个 A_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的论域
- 对 $\mathcal{L}$ 中 n 元谓词符号 R，$\prod_U \mathfrak{A}_i$ 对 R 的解释是 $\prod_U A_i$ 上 n 元关系 R_U，满足（其中，R_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 对 R 的解释）：

$$R_U[f_1]_U \ldots [f_n]_U \;\Leftrightarrow\; \{i \in I \mid R_i f_1(i) \ldots f_n(i)\} \in U$$

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构序列 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 和 I 上超滤 U，我们定义 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为下述 $\mathcal{L}$-结构

- $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 的 论域 是集合 $\prod_U A_i$，其中每个 A_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的论域
- 对 $\mathcal{L}$ 中 n 元函数符号 F，$\prod_U \mathfrak{A}_i$ 对 F 的解释是 $\prod_U A_i$ 上 n 元函数 F_U，满足（其中，F_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 对 F 的解释）:

$$F_U([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) = [\{(i, F_i(f_1(i), \ldots, f_n(i))) \mid i \in I\}]_U$$

超积与超幂

定义

给定一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构序列 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 和 I 上超滤 U，我们定义 $\langle\mathfrak{A}_i\rangle_{i\in I}$ 模 U 的超积 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为下述 $\mathcal{L}$-结构

- $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 的 论域 是集合 $\prod_U A_i$，其中每个 A_i 是 $\mathfrak{A}_i$ 的论域
- 对 $\mathcal{L}$ 中常数符号 c，$\prod_U \mathfrak{A}_i$ 对 c 的解释 c_U 是 $\prod_U A_i$ 中元素（其中，$c_i \in A_i$ 是 $\mathfrak{A}_i$ 对 c 的解释)：

$$c_U = [\{(i, c_i) \mid i \in I\}]_U$$

超积与超幂

注意:

- F_U 是良定义的
- 如果每个 $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$，则称 $\prod_U \mathfrak{A}_i$ 为 $\mathfrak{A}$ 模 U 的超幂，记作 $\prod_U \mathfrak{A}$

定理 (超积基本定理（Łoś）)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 U 是 I 上的超滤，对每个 $i \in I$ 有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}_i$

- 对每个 $\mathcal{L}$ 词项 $t(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\mathfrak{A} = \prod_U \mathfrak{A}_i$ 中元素 $[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U$ 有

$$t^{\mathfrak{A}}([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) = [\{(i, t^{\mathfrak{A}}(f_1(i), \ldots, f_n(i))) \mid i \in I\}]_U$$

定理 (超积基本定理（Łoś）)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 U 是 I 上的超滤，对每个 $i \in I$ 有 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}_i$

- 对任意 $\mathcal{L}$ 公式 $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\mathfrak{A}$ 中元素 $[f_1]_U, \ldots, [f_n]_U$ 有

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha([f_1]_U, \ldots, [f_n]_U) \iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash \alpha(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U$$

推论

给定 I 上超滤 U 和结构 $\mathfrak{A}$。令 $\prod_U \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 模 U 的超幂。那么对每个一阶语句 σ 有

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma \iff \prod_U \mathfrak{A} \vDash \sigma$$

超积与超幂

存在 $\mathfrak{A}$ 到它的超幂 $\prod_U \mathfrak{A}$ 中的典范初等嵌入（elementary embedding）：

- 对任意 $a \in A$，定义常函数 $c_a : I \to A$，使得对任意 $i \in I$ 有 $c_a(i) = a$
- 定义 $d : A \to \prod_U A$，使得对任意 $a \in A$，$d(a) = [c_a]_U$

超积与超幂

推论

令 $\prod_U \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的超幂。定义 d 如前，则 d 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\prod_U \mathfrak{A}$ 的初等嵌入，即 d 是单射且对任意公式 $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $a_1, \ldots, a_n \in A$ 有

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n) \iff \prod_U \mathfrak{A} \vDash \alpha(d(a_1), \ldots, d(a_n))$$

超积与超幂

超积常被用来构造足够饱和的模型

推论 (紧致性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$ 的对任意语句集 Σ，如果 Σ 的每个有穷子集有一个模型，那么 Σ 有一个模型。

下期预告

- 超滤扩张
- van Benthem 刻画定理