

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情提要

- 树展开 \Rightarrow 互模拟
- τ 对 M 而言有有穷模型性
- 模态公式的深度
- $w \sqsubseteq_n w' \Leftrightarrow w \Leftrightarrow_n w'$

有穷模型性

定理

考虑有穷模态语言类型 τ 和有穷命题符号集 Φ , 令 \mathfrak{M} 和 \mathfrak{M}' 是 (τ, Φ) -模型。对任意 \mathfrak{M} 中 w 和 \mathfrak{M}' 中 w' , 下列命题等价

- $w \simeq_n w'$
- w 与 w' 关于深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ) -公式合同
(不妨记作 $w \dot{\simeq}_n w'$)

有穷模型性

定理

考虑有穷模态语言类型 τ 和**有穷**命题符号集 Φ , 令 \mathfrak{M} 和 \mathfrak{M}' 是 (τ, Φ) -模型。对任意 \mathfrak{M} 中 w 和 \mathfrak{M}' 中 w' , 下列命题等价

- $w \simeq_n w'$
- w 与 w' 关于深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ) -公式合同
(不妨记作 $w \leftrightarrow_n w'$)

有穷模型性

定义

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ , 令

$\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, \dots, V)$ 是一个以 w 为根的点生成模型。

- 递归定义 $H_0 = \{w\}$, $H_{k+1} = \{u \in W \mid \text{存在 } R_i, \text{ 存在 } v \in H_k \text{ 有 } vR_i u\} \setminus \bigcup_{j \leq k} H_j$ 。称 H_k 中元素为 W 中高度 k 的状态。定义 \mathfrak{M} 的高度为其中状态的最高高度 (如果存在)。
- 对 $k \in \mathbb{N}$, 定义 $\mathfrak{M} \upharpoonright k$ 为 \mathfrak{M} 限制在 $W_k = \bigcup_{j \leq k} H_j$ 上的子模型

有穷模型性

事实

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ , 令 \mathfrak{M} 是一个点生成模型。对任意 k 以及 $\mathfrak{M} \upharpoonright k$ 中状态 u 有,

$$\mathfrak{M} \upharpoonright k, u \stackrel{\text{高度}}{\hookrightarrow}_{k-u} \mathfrak{M}, u$$

推论

一个（只含一元模态词的）模态逻辑公式是可满足的，当且仅当它在一个有穷高度的点生成模型中可满足

有穷模型性

定理 (有穷模型性——点选择)

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ , 令 ϕ 是一个 τ -公式。如果 ϕ 是可满足的, 那么它在一个有穷模型中可满足

证明.

点生成树形模型 + 砍到有穷高度 + 点选择

有穷模型性

点选择证明的问题：点选择不一定能保持原模型框架的一些性质，无法被用作证明相对特殊框架类（如，自返、对称等）的有穷模型性

过滤

定义 (子公式封闭)

我们称公式集 Σ 是 **子公式封闭的**，当且仅当

- $\neg\phi \in \Sigma$ 蕴含 $\phi \in \Sigma$
- $\phi \vee \psi \in \Sigma$ 蕴含 $\phi, \psi \in \Sigma$
- $\Delta(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \Sigma$ 蕴含每个 $\phi_i \in \Sigma$ ($1 \leq i \leq n$)

过滤

定义

任给子公式封闭的公式集 Σ 和模型 \mathfrak{M} , 定义 \mathfrak{M} 中状态间的关系:

$w \leftrightarrow_{\Sigma} v$ 当且仅当, 对任意 $\phi \in \Sigma$ 有 $w \Vdash \phi \Leftrightarrow v \Vdash \phi$

显然, \leftrightarrow_{Σ} 是等价关系。定义 $|w|_{\Sigma}$ (常简记为 $|w|$) 是以 w 为代表的 \leftrightarrow_{Σ} 等价类

过滤

定义 (过滤)

现考虑基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 。我们称满足下述条件的模型 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ 是 \mathfrak{M} 的一个 Σ 过滤。

- $W' = W_\Sigma = \{|w|_\Sigma \mid w \in W\}$
- 对任意 $w, v \in W$, Rwv 蕴含 $R'|w||v|$ R' 的下界
- 对任意 $w, v \in W$, 若 $R'|w||v|$, 则对任意 $\diamond\phi \in \Sigma$, $v \Vdash \phi$
蕴含 $w \Vdash \diamond\phi$ R' 的上界
- 对任意 $p \in \Sigma$, $V'(p) = \{|w| \mid w \Vdash p\}$

过滤

例

考虑 (\mathbb{N}, R, V) , 其中

$$R = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3)\} \cup \{(n, n+1) \mid n \geq 2\}, \quad V(p) = \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

$$V(q) = \{2\}. \quad \text{令 } \Sigma = \{\diamond p, p\}$$

过滤

事实

考虑基本模态逻辑语言。令 Σ 是子公式封闭的有穷公式集。
对任何模型 \mathfrak{M} ，如果 \mathfrak{M}^f 是 \mathfrak{M} 的一个 Σ 过滤，那么 \mathfrak{M}^f
中至多有 $2^{|\Sigma|}$ 个状态。

过滤

定理 (过滤定理)

考虑基本模态逻辑语言。令 $\mathfrak{M}' = (W_\Sigma, R', V')$ 是模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 的一个 Σ 过滤。那么对任意 $w \in W$,

$$\mathfrak{M}, w \leftrightarrow_\Sigma \mathfrak{M}', |w|$$

过滤

过滤存在: 给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和子公式
封闭公式集 Σ , 定义

- **最小过滤**: $R^s|w||v|$, 当且仅当存在 $w' \in |w|, v' \in |v|$ 有
 $Rw'v'$
- **最大过滤**: $R^l|w||v|$, 当且仅当对任意 $\diamond\phi \in \Sigma$ 有,
 $v \Vdash \phi$ 蕴含 $w \Vdash \diamond\phi$

过滤

定理 (有穷模型性——过滤)

- 对任意基本模态逻辑语言公式 ϕ , 如果 ϕ 可满足, 那么存在一个至多包含 2^m 个状态的有穷模型满足 ϕ 。其中 m 是 ϕ 中子公式的个数。
- 进一步如果 ϕ 在一个自反/右无界/对称/传递的模型中可满足, 那么 ϕ 也在一个满足相应性质的有穷模型中可满足

过滤

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和子公式封闭的公式集 Σ 。为了保持滤的传递性，考虑 W_Σ 上关系

$R^f|_w|_v$ ，当且仅当对任意 $\diamond\phi \in \Sigma$ ， $v \Vdash \phi \vee \diamond\phi$ 蕴含 $w \Vdash \diamond\phi$

过滤

定义 (簇)

任给基本模态逻辑语言框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 。我们称 $C \subset W$ 是一个 (W, R) 上的簇 (cluster), 当且仅当 R 是 C 上的一个等价关系, 且对任意 $D \supsetneq C$, R 不是 D 上的等价关系

例

假设 $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$ 是 (\mathbb{Q}, R, V) 的一个过滤。定义 \mathbb{Q} 上关系 R' : 对 $x, y \in \mathbb{Q}$, $R'xy$ 当且仅当 $R^f|x||y|$ 。则每个 $|x|$ 是 (\mathbb{Q}, R') 上的一个簇, (\mathbb{Q}, R') 上有有穷个簇。

过滤

定义 (过滤——一般模态逻辑语言)

其中“上界”“下界”分别是：对任意 $w, v_1, \dots, v_n \in W$,

- $R_{\Delta} w v_1 \dots v_n$ 蕴含 $R' |w| |v_1| \dots |v_n|$
- 若 $R' |w| |v_1| \dots |v_n|$, 则对任意 $\Delta (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \Sigma$, $v_i \Vdash \phi_i$ ($1 \leq i \leq n$) 蕴含 $w \Vdash \Delta (\phi_1, \dots, \phi_n)$

习题

- 2.3.7, 2.3.8 (errata)

下期预告

- 标准翻译