

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情提要

- 模态不变性
 - 不交并
 - 生成子模型
 - 满同态
- 互模拟与模态等价

树展开

定义

- 我们称 **偏序** (W, R) 是 **树**，当且仅当对任意 $w \in W$ ， R 在 $\{v \in W \mid vRw\}$ 上是良序
- 考虑结构 $(W, R_i)_{i \in I}$ ，其中每个 $i \in I$ 都是二元关系。我们称 $(W, R_i)_{i \in I}$ 是 **树形的** (tree-like)，当且仅当 (W, R) 是树，其中 R 是 $\cup_i R_i$ 的 **传递闭包**

树展开

事实

考虑模态逻辑语言类型 τ , 其中只含有一些一元模态词 $\{\Delta_i\}_{i \in I}$ 。 τ -模型 $\mathfrak{M} = (W, R_i, V)_{i \in I}$ 以及 \mathfrak{M} 中 w , 存在一个点生成的树形的模型 \mathfrak{M}' 以及 \mathfrak{M}' 的根 w' 使得,

$$\mathfrak{M}, w \simeq \mathfrak{M}', w'$$

有穷模型性

给定模态逻辑语言类型 τ , 令 M 是一个 τ -模型类。

- 我们称 τ 对 M 而言有有穷模型性 (finite model property), 当且仅当对任意 τ -公式 ϕ , 如果 ϕ 在 M 中的某个模型上可满足, 那么 ϕ 在 M 中的某个有穷模型上可满足。
- 我们称 τ 有有穷模型性, 当且仅当 τ 对所有 τ -模型组成的类而言有有穷模型性

有穷模型性

有穷模型性意味着：

- 语言表达能力不足以迫使其模型是无穷的
- 往往会有可判定性

有穷模型性

定义 ((模态词的) 深度)

我们定义个模态逻辑公式的 **深度** (degree) 如下

$$\text{deg}(p) = 0$$

$$\text{deg}(\perp) = 0$$

$$\text{deg}(\neg\phi) = \text{deg}(\phi)$$

$$\text{deg}(\phi \vee \psi) = \max\{\text{deg}(\phi), \text{deg}(\psi)\}$$

$$\text{deg}(\Delta (\phi_1, \dots, \phi_n)) = 1 + \max\{\text{deg}(\phi_1), \dots, \text{deg}(\phi_n)\}$$

特别地, $\text{deg}(\diamond\phi) = 1 + \text{deg}(\phi)$

有穷模型性

事实

令 τ 是一个有穷的模态语言类型，并且假设命题符号集 Φ 也是有穷的，那么

- 对任意 n ，在模（命题）逻辑等价意义上，只有有穷多个深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ) -公式
- 对任意 n ，任意 τ -模型 \mathfrak{M} 以及 \mathfrak{M} 中 w ，在 w 上满足的所有深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ) -公式集（命题）逻辑等价于一个公式

有穷模型性

定义 (n -互模拟)

考虑基本模态逻辑语言模型 \mathfrak{M} 和 \mathfrak{M}' 以及它们中的 w 和 w' 。对 $n \in \mathbb{N}$, 称 w 与 w' 是 n -互模拟的, 记作 $w \approx_n w'$, 当且仅当存在一个二元关系序列 $Z_n \subset \dots \subset Z_0$ 满足:

- $wZ_n w'$
- 如果 $vZ_0 v'$, 则对命题符号的赋值在 v 和 v' 上相同
- 对 $i < n$, 如果 $vZ_{i+1} v'$ 且 $Rv'u'$, 则存在 u 有 Rvu 且 $uZ_i u'$

有穷模型性

事实

给定基本模态逻辑语言模型 \mathfrak{M} 和 \mathfrak{M}' 以及它们中的 w 和 w' 。

- 如果 $w \simeq_{n+1} w'$, 那么 $w \simeq_n w'$
- 如果 $w \simeq w'$, 那么对任意 n 有 $w \simeq_n w'$ 。反之未必成立。

(习题) 一般模态语言类型的 n -互模拟定义

有穷模型性

考虑有穷模态语言类型 τ 和有穷命题符号集 Φ , 令 \mathfrak{M} 和 \mathfrak{M}' 是 (τ, Φ) -模型。对任意 \mathfrak{M} 中 w 和 \mathfrak{M}' 中 w' , 下列命题等价

- $w \simeq_n w'$
- w 与 w' 关于深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ) -公式合同
(不妨记作 $w \leftrightarrow_n w'$)

有穷模型性

定义

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ , 令

$\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, \dots, V)$ 是一个以 w 为根的点生成模型。

- 递归定义 $H_0 = \{w\}$, $H_{k+1} = \{u \in W \mid \text{存在 } R_i, \text{ 存在 } v \in H_k \text{ 有 } vR_iu\} \setminus \bigcup_{j \leq k} H_j$ 。称 H_k 中元素为 W 中高度为 k 状态。定义 \mathfrak{M} 的高度为其中状态的最高高度 (如果存在)。
- 对 $k \in \mathbb{N}$, 定义 $\mathfrak{M} \upharpoonright k$ 为 \mathfrak{M} 限制在 $W_k = \bigcup_{j \leq k} H_j$ 上的子模型

有穷模型性

事实

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ , 令 \mathfrak{M} 是一个点生成模型。对任意 k 以及 $\mathfrak{M} \upharpoonright k$ 中状态 u 有,

$\mathfrak{M} \upharpoonright k, u \preceq_{k-u \text{ 的高度}} \mathfrak{M}, u$

推论

一个 (只含一元模态词的) 模态逻辑公式是可满足的, 当且仅当它在一个有穷高度的点生成模型中可满足

有穷模型性

定理

考虑只含有一元模态词的模态语言类型 τ , 令 ϕ 是一个 τ -公式。如果 ϕ 是可满足的, 那么它在一个有穷模型中可满足

证明.

点生成树形模型 + 砍到有穷高度 + 点选择

习题

- 2.1.7

下期预告

- 过滤法构造有穷模型