

# 模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

# 前情提要

- 模态不变性
  - 不交并
  - 生成子模型
  - 满同态
- 互模拟与模态等价

# 树展开

## 定义

- 我们称 **偏序**  $(W, R)$  是 **树**，当且仅当对任意  $w \in W$ ， $R$  在  $\{v \in W \mid vRw\}$  上是良序
- 考虑结构  $(W, R_i)_{i \in I}$ ，其中每个  $i \in I$  都是二元关系。我们称  $(W, R_i)_{i \in I}$  是 **树形的** (tree-like)，当且仅当  $(W, R)$  是树，其中  $R$  是  $\bigcup_i R_i$  的 **传递闭包**

# 树展开

## 事实

考虑模态逻辑语言类型  $\tau$ , 其中只含有一些一元模态词  $\{\Delta_i\}_{i \in I}$ 。  $\tau$ -模型  $\mathfrak{M} = (W, R_i, V)_{i \in I}$  以及  $\mathfrak{M}$  中  $w$ , 存在一个点生成的树形的模型  $\mathfrak{M}'$  以及  $\mathfrak{M}'$  的根  $w'$  使得,

$$\mathfrak{M}, w \simeq \mathfrak{M}', w'$$

# 有穷模型性

给定模态逻辑语言类型  $\tau$ , 令  $M$  是一个  $\tau$ -模型类。

- 我们称  $\tau$  对  $M$  而言有有穷模型性 (finite model property), 当且仅当对任意  $\tau$ -公式  $\phi$ , 如果  $\phi$  在  $M$  中的某个模型上可满足, 那么  $\phi$  在  $M$  中的某个有穷模型上可满足。
- 我们称  $\tau$  有有穷模型性, 当且仅当  $\tau$  对所有  $\tau$ -模型组成的类而言有有穷模型性

# 有穷模型性

有穷模型性意味着：

- 语言表达能力不足以迫使其模型是无穷的
- 往往会有可判定性

# 有穷模型性

定义 ( (模态词的) 深度)

我们定义个模态逻辑公式的 **深度** (degree) 如下

$$\text{deg}(p) = 0$$

$$\text{deg}(\perp) = 0$$

$$\text{deg}(\neg\phi) = \text{deg}(\phi)$$

$$\text{deg}(\phi \vee \psi) = \max\{\text{deg}(\phi), \text{deg}(\psi)\}$$

$$\text{deg}(\Delta (\phi_1, \dots, \phi_n)) = 1 + \max\{\text{deg}(\phi_1), \dots, \text{deg}(\phi_n)\}$$

特别地,  $\text{deg}(\diamond\phi) = 1 + \text{deg}(\phi)$

# 有穷模型性

## 事实

令  $\tau$  是一个有穷的模态语言类型，并且假设命题符号集  $\Phi$  也是有穷的，那么

- 对任意  $n$ ，在模（命题）逻辑等价意义上，只有有穷多个深度  $\leq n$  的  $(\tau, \Phi)$ -公式
- 对任意  $n$ ，任意  $\tau$ -模型  $\mathfrak{M}$  以及  $\mathfrak{M}$  中  $w$ ，在  $w$  上满足的所有深度  $\leq n$  的  $(\tau, \Phi)$ -公式集（命题）逻辑等价于一个公式



# 有穷模型性

## 定义 ( $n$ -互模拟)

考虑基本模态逻辑语言模型  $\mathfrak{M}$  和  $\mathfrak{M}'$  以及它们中的  $w$  和  $w'$ 。对  $n \in \mathbb{N}$ , 称  $w$  与  $w'$  是  $n$ -互模拟的, 记作  $w \sqsubseteq_n w'$ , 当且仅当存在一个二元关系序列  $Z_n \subset \cdots \subset Z_0$  满足:

- $wZ_n w'$
- 如果  $vZ_0 v'$ , 则对命题符号的赋值在  $v$  和  $v'$  上相同
- 对  $i < n$ , 如果  $vZ_{i+1} v'$  且  $Rvu$ , 则存在  $u'$  有  $Rv'u'$  且  $uZ_i u'$

# 有穷模型性

## 定义 ( $n$ -互模拟)

考虑基本模态逻辑语言模型  $\mathfrak{M}$  和  $\mathfrak{M}'$  以及它们中的  $w$  和  $w'$ 。对  $n \in \mathbb{N}$ , 称  $w$  与  $w'$  是  $n$ -互模拟的, 记作  $w \sqsubseteq_n w'$ , 当且仅当存在一个二元关系序列  $Z_n \subset \cdots \subset Z_0$  满足:

- $wZ_n w'$
- 如果  $vZ_0 v'$ , 则对命题符号的赋值在  $v$  和  $v'$  上相同
- 对  $i < n$ , 如果  $vZ_{i+1} v'$  且  $Rv'u'$ , 则存在  $u$  有  $Rvu$  且  $uZ_i u'$

# 有穷模型性

## 事实

给定基本模态逻辑语言模型  $\mathfrak{M}$  和  $\mathfrak{M}'$  以及它们中的  $w$  和  $w'$ 。

- 如果  $w \sqsubset_{n+1} w'$ , 那么  $w \sqsubset_n w'$
- 如果  $w \sqsubset w'$ , 那么对任意  $n$  有  $w \sqsubset_n w'$ 。反之未必成立。

(习题) 一般模态语言类型的  $n$ -互模拟定义

# 有穷模型性

## 事实

给定基本模态逻辑语言模型  $\mathfrak{M}$  和  $\mathfrak{M}'$  以及它们中的  $w$  和  $w'$ 。

- 如果  $w \sqsubset_{n+1} w'$ , 那么  $w \sqsubset_n w'$
- 如果  $w \sqsubset w'$ , 那么对任意  $n$  有  $w \sqsubset_n w'$ 。反之未必成立。

(习题) 一般模态语言类型的  $n$ -互模拟定义

# 有穷模型性

考虑有穷模态语言类型  $\tau$  和有穷命题符号集  $\Phi$ , 令  $\mathfrak{M}$  和  $\mathfrak{M}'$  是  $(\tau, \Phi)$ -模型。对任意  $\mathfrak{M}$  中  $w$  和  $\mathfrak{M}'$  中  $w'$ , 下列命题等价

- $w \sqsubseteq_n w'$
- $w$  与  $w'$  关于深度  $\leq n$  的  $(\tau, \Phi)$ -公式合同  
(不妨记作  $w \leftrightarrow_n w'$ )

# 有穷模型性

## 定义

考虑只含有一元模态词的模态语言类型  $\tau$ , 令

$\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, \dots, V)$  是一个以  $w$  为根的点生成模型。

- 递归定义  $H_0 = \{w\}$ ,  $H_{k+1} = \{u \in W \mid \text{存在 } R_i, \text{ 存在 } v \in H_k \text{ 有 } vR_i u\} \setminus \bigcup_{j \leq k} H_j$ 。称  $H_k$  中元素为  $W$  中 **高度为  $k$**  状态。定义  $\mathfrak{M}$  的 **高度** 为其中状态的最高高度 (如果存在)。
- 对  $k \in \mathbb{N}$ , 定义  $\mathfrak{M} \upharpoonright k$  为  $\mathfrak{M}$  限制在  $W_k = \bigcup_{j \leq k} H_j$  上的子模型

# 有穷模型性

## 事实

考虑只含有一元模态词的模态语言类型  $\tau$ , 令  $\mathfrak{M}$  是一个点生成模型。对任意  $k$  以及  $\mathfrak{M} \upharpoonright k$  中状态  $u$  有,

$\mathfrak{M} \upharpoonright k, u \preceq_{k-u \text{ 的高度}} \mathfrak{M}, u$

## 推论

一个（只含一元模态词的）模态逻辑公式是可满足的，当且仅当它在一个有穷高度的点生成模型中可满足

# 有穷模型性

## 定理

考虑只含有一元模态词的模态语言类型  $\tau$ , 令  $\phi$  是一个  $\tau$ -公式。如果  $\phi$  是可满足的, 那么它在一个有穷模型中可满足

## 证明.

点生成树形模型 + 砍到有穷高度 + 点选择



# 习题

## ■ 2.1.7

# 下期预告

- 过滤法构造有穷模型