模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情提要

- 正规模态逻辑
  - **K**-系统及其可靠性
- 模态不变性

模态不变性

定义

- 给定模态语言类型 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及它们中的状态 w 和 w'。定义 **w 的 τ-理论** 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$。我们称 **$w$ 和 w' 是模态等价的**，记作 $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$ 或 $w \leftrightsquigarrow w'$，当且仅当它们有相同的 τ-理论
- 我们定义模型 **$\mathfrak{M}$ 的 τ-理论** 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M} \Vdash \phi$。我们称模型 **$\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是模态等价的**，记作 $\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}$，当且仅当它们有相同的 τ-理论

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ，索引集 I。对每个 $i \in I$，$\mathfrak{M}_i$ 是一个 τ-模型。对任意 $i \in I$ 任意 $\mathfrak{M}_i$ 中 w 有

$$\mathfrak{M}_i, w \leftrightsquigarrow \biguplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i, w$$

即不交并保持模态不变性

模态不变性

定义 (全局模态词)

- 我们定义（一元） 全局菱形模态词 E 的语义如下:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash E\phi \iff \text{存在 } \mathfrak{M} \text{ 中的 } v \text{ 有 } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

- 定义对偶的 全局方块模态词 A 的语义为:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash A\phi \iff \text{所有 } \mathfrak{M} \text{ 中的 } v \text{ 有 } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

模态不变性

定义 (全局模态词)

- 我们定义（一元） 全局菱形模态词 E 的语义如下:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash E\phi \quad \Leftrightarrow \quad \text{存在 } \mathfrak{M} \text{ 中的 } v \text{ 有 } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

- 定义对偶的 全局方块模态词 A 的语义为:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash A\phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \Vdash \phi$$

模态不变性

定义 (全局模态词)

事实

不存在基本模态逻辑公式 $\alpha(p)$，使得对任意模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 中 w 都有

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \alpha(p) \iff \mathfrak{M} \Vdash \phi$$

模态不变性

定义 (生成子模型)

考虑基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$。我们称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的 子模型 ，当且仅当 $W' \subset W$，$R' = R \cap W' \times W'$ 且每个 $V'(p) = V(p) \cap W'$。我们称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}'$ 的 生成子模型 （generated submodal），记作 $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$，如果 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子模型，且有下述封闭性质

$$\forall w \in W' \forall v \in W \ Rwv \to v \in W'$$

模态不变性

定义 (生成子模型)

- 对 $X \subset W$，称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的 由 X 生成的子模型 ，当且仅当 $\mathfrak{M}'$ 是最小的包含 X 的 $\mathfrak{M}$ 的生成子模型
- 我们称 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个 点生成子模型 （point generated model），当且仅当 $\mathfrak{M}'$ 是由一个单点集 $\{w\}$ （$w \in W$）生成的。我们称 w 是 $\mathfrak{M}'$ 的 根

模态不变性

定义 (生成子模型)

- 对一般模态语言类型 τ，我们要求生存子模型的满足对应的封闭性质：对任意 $\triangle \in \tau$，

$$\forall w \in W' \forall v_1, \ldots, v_n \in W \; R_{\triangle} w v_1 \ldots v_n \to v_1, \ldots, v_n \in W'$$

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ，给定 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 的生成子模型 $\mathfrak{M}'$，对每个公式 ϕ 以及每个 $\mathfrak{M}'$ 中的 w 有

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \iff \mathfrak{M}', w \Vdash \phi$$

证明.

对公式归纳

模态不变性

注意:

- 不交并的模态不变性结果是生成子模型的模态不变性的特殊情况
- 利用生成子模型方法可以证明“回看模态词” $\Diamond^{-1}$ 不可定义，即不存在基本模态逻辑公式 $\alpha(p)$，使得

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \alpha(p) \quad \Leftrightarrow \quad \exists v \in W \ Rvw \wedge \mathfrak{M}, v \Vdash p$$

- 点生成子模型可能是最常用的简化模型的手段

模态不变性

定义 (同态)

给定模态语言类型 τ。给定 τ 模型 $\mathfrak{M} = (W, R_\Delta, V)_{\Delta\in\tau}$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R'_\Delta, V')_{\Delta\in\tau}$，我们称函数 $h : W \to W'$ 是一个（强）同态 （homomorphism），当且仅当它满足：

- 对任意 $p \in \Phi$，任意 $w \in W$， $w \in V(p)$ 当且仅当 $f(w) \in V'(p)$
- 对每个 n 元模态词 $\Delta\in \tau$，对任意 $w_0, \ldots, w_n \in W$，$Rw_0 \ldots w_n$ 当且仅当 $R' f(w_0) \ldots f(w_n)$

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ，给定 τ 模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$。如果存在它们之间的满同态 $h : W \to W'$，那么对任意 $w \in W$，

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', h(w)$$

进一步，如果 h 是同构，那么

$$\mathfrak{M} \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}'$$

模态不变性

- 同态不保证模态不变性
- 满同态保持模态不变性。事实上，满同态可以保持一阶谓词逻辑量词的解释，其保持不变性的能力“超出了”模态逻辑公式的表达能力

定义 (互模拟)

先考虑基本模态逻辑语言。给定模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和 $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$。我们称一个非空关系 $Z \subset W \times W'$ 是一个 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 之间的互模拟 （bisimulation），记作 $Z : \mathfrak{M} \leftrightharpoons \mathfrak{M}'$，当且仅当它满足：对任意 $w \in W$， $w' \in W'$

- 如果 wZw'，那么对任意 $p \in \Phi$， $w \in V(p)$ 当且仅当 $w' \in V'(p)$
- 对任意 $v \in W$，如果 wZw' 且 Rwv，那么存在 $v' \in W'$ 使得 vZv' 且 $R'w'v'$ （正向条件）

互模拟

定义 (互模拟)

- 如果 $Z : \mathfrak{M} \leftrightarrows \mathfrak{M}'$ 且 wZw'，我们称 w 与 w' 是 互似的 （bisimilar)，记作 $Z : \mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$ 或 $Z : w \leftrightarrows z'$ (如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 由上下文可知)
- 我们用 $\mathfrak{M}, z \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$ 或 $w \leftrightarrows w'$ 表示存在 Z 使得 $Z : \mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$

定义 (互模拟)

- 一般版本的定义：给定模态语言类型 τ 和 n 元模态词 $\triangle \in \tau$。任给 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 和 $\mathfrak{M}'$ 中的 w'，基本语言版本中的正向、反向条件分别改写为：
  - 对任意 $v_1, \ldots, v_n \in W$，若 wZw' 且 $R_\triangle wv_1 \ldots v_n$，则存在 $v'_1, \ldots, v'_n \in W'$ 使得，$R'_\triangle w'v'_1 \ldots v'_n$ 且对每个 $1 \leq i \leq n$ 有 $v_iZv'_i$
  - 对任意 $v'_1, \ldots, v'_n \in W'$，若 wZw' 且 $R'_\triangle w'v'_1 \ldots v'_n$，则存在 $v_1, \ldots, v_n \in W$ 使得，$R_\triangle wv_1 \ldots v_n$ 且对每个 $1 \leq i \leq n$ 有 $v_iZv'_i$

互模拟

例

互模拟

定理

给定模态逻辑语言类型 τ 以及 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$。对任意 $\mathfrak{M}$ 中 w 以及 $\mathfrak{M}'$ 中 w' 都有 $w \leftrightharpoons w'$ 蕴含 $w \leftrightsquigarrow w'$

证明.

对公式归纳

互模拟

事实

给定模态逻辑语言类型 τ 以及 τ-模型 $\mathfrak{M}$、$\mathfrak{M}'$ 以及 $\mathfrak{M}_i$ $(i \in I)$

- 对任意 $i \in I$，任意 $\mathfrak{M}_i$ 中 w 有 $\mathfrak{M}_i, w \leftrightarrows \biguplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i, w$
- 如果 $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}'$，那么对任意 $\mathfrak{M}'$ 中 w 有 $\mathfrak{M}', w' \leftrightarrows \mathfrak{M}, w$
- 如果 $h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ 是满同态，那么对任意 $\mathfrak{M}$ 中 w 有 $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', h(w)$

互模拟

互模拟似乎是最一般的保持模态不变性的概念，它是否能“完美”刻画模态公式的表达能力？即，是否有

$$\mathfrak{M}, w \leftrightharpoons \mathfrak{M}', w' \iff \mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w' \ ?$$

例

互模拟

定义

给定模态语言类型 τ，我们称 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 是 相有穷的 （image-finite），当且仅当对每个 $\mathfrak{M}$ 中 $n+1$ 元关系 R 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w，$\{(v_1, \ldots, v_n) \mid Rwv_1 \ldots v_n\}$ 是有穷的。

定理

如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 是两个相有穷的 τ-模型，那么对任意 $w \in W$ 和 $w' \in W'$ 有

$$w \leftrightarrows w' \;\Leftrightarrow\; w \leftrightsquigarrow w'$$

树展开

定义

- 我们称 偏序 (W,R) 是 树 ，当且仅当对任意 $w \in W$， R 在 $\{v \in W \mid vRw\}$ 上是良序
- 考虑结构 $(W,R_i)_{i\in I}$，其中每个 $i \in I$ 都是二元关系。我们称 $(W,R_i)_{i\in I}$ 是 树形的 （tree-like），当且仅当 (W,R) 是树，其中 R 是 $\bigcup_i R_i$ 的 传递闭包

树展开

事实

考虑模态逻辑语言类型 τ，其中只含有一些一元模态词 $\{\Delta_i\}_{i\in I}$。τ-模型 $\mathfrak{M}=(W,R_i,V)_{i\in I}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w，存在一个点生成的树形的模型 $\mathfrak{M}'$ 以及 $\mathfrak{M}'$ 的根 w' 使得，

$$\mathfrak{M},w \leftrightarrows \mathfrak{M}',w'$$

有穷模型性

给定模态逻辑语言类型 τ，令 M 是一个 τ-模型类。

- 我们称 τ 对 M 而言有有穷模型性 （finite model property），当且仅当对任意 τ-公式 ϕ，如果 ϕ 在 M 中的某个模型上可满足，那么 ϕ 在 M 中的某个有穷模型上可满足。
- 我们称 τ 有 有穷模型性 ，当且仅当 τ 对所有 τ-模型组成的类而言有有穷模型性

有穷模型性

有穷模型性意味着：

- 语言表达能力不足以迫使其模型是无穷的
- 往往会有可判定性

有穷模型性

定义（（模态词的）深度）

我们定义个模态逻辑公式的 深度 （degree）如下

$$
\begin{aligned}
\deg(p) &= 0 \\
\deg(\bot) &= 0 \\
\deg(\neg\phi) &= \deg(\phi) \\
\deg(\phi \vee \psi) &= \max\{\deg(\phi), \deg(\psi)\} \\
\deg(\triangle\ (\phi_1, \ldots, \phi_n)) &= 1 + \max\{\deg(\phi_1), \ldots . \deg(\phi_n)\}
\end{aligned}
$$

特别地，$\deg(\Diamond\phi) = 1 + \deg(\phi)$

有穷模型性

事实

令 τ 是一个有穷的模态语言类型，并且假设命题符号集 Φ 也是有穷的，那么

- 对任意 n，在模（命题）逻辑等价意义上，只有有穷多个深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ)-公式
- 对任意 n，任意 τ-模型 $\mathfrak{M}$ 以及 $\mathfrak{M}$ 中 w，在 w 上满足的所有深度 $\leq n$ 的 (τ, Φ)-公式集（命题）逻辑等价于一个公式

证明.

有穷模型性

习题

- 2.1.1, 2.1.6（bounded morphism 定义见书）
- 2.2.1, 2.2.4, 2.2.8

下期预告

- 有穷模型性（续）
- 标准翻译