

# 模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

# 前情提要

- 模态逻辑的语言, 模态语言类型
- 框架与模型
- 模态逻辑的语义概念:  $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ,  $\mathfrak{M} \Vdash \phi$ ,  $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$ ,  
 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$ ,  $F \Vdash \phi$

# 模态语义后承

## 记法

- 如果  $S$  是模型类, 称  $\mathfrak{M}$  是 **来自  $S$  的模型**, 即  $\mathfrak{M} \in S$
- 如果  $S$  是框架类, 称  $\mathfrak{M}$  是 **来自  $S$  的模型**, 即  $\mathfrak{M}$  是  $S$  中某个框架基础上的模型
- 给定模态逻辑语言类型  $\tau$ , 当我们提到一个  $\tau$ -结构类  $S$ , 要么  $S$  是一个  $\tau$ -模型类, 要么是一个  $\tau$ -框架类

# 模态语义后承

## 定义 (局部语义后承)

给定模态语言类型  $\tau$ , 和  $\tau$ -结构类  $S$ 。令  $\Sigma$  和  $\phi$  分别是语言  $ML(\tau, \Phi)$  的公式集和公式。我们称  $\phi$  是  $\Sigma$  的关于  $S$  的局部语义后承, 记作  $\Sigma \Vdash_S \phi$ , 当且仅当对任意来自  $S$  的模型  $\mathfrak{M}$  以及  $\mathfrak{M}$  中的任何状态  $w$  有,  $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$  蕴含  $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$

# 模态语义后承

例

- $\diamond\diamond p \Vdash_{\text{Tran}} \diamond p$
- $p \Vdash_{\mathbf{S}} \neg p$ , 其中  $\mathbf{S}$  是基本模态逻辑的模型类:

$$\mathbf{S} = \{(\mathfrak{F}, V) \mid V(p) = \emptyset\}$$

# 模态语义后承

## 定义 (全局语义后承)

同样给定  $\tau, S, \Sigma, \phi$ 。我们称  $\phi$  是  $\Sigma$  的关于  $S$  的全局语义后承，记作  $\Sigma \Vdash_S^g \phi$ ，当且仅当对每个来自  $S$  的结构  $\mathcal{G}$  都有， $\mathcal{G} \Vdash \Sigma$  蕴含  $\mathcal{G} \Vdash \phi$

## 例

$p \Vdash_S^g \Box p$ ，其中  $S$  可以是任何结构类

注意：我们一般关心基于框架类的局部语义后承

# K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**

## 定义

- **K** 的公理包括
  - 所有命题重言式例式

$$(K) \quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

$$(Dual) \quad \Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$$

# K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**  
定义

- **K 的证明规则** 包括
  - 分离规则 (*modus ponens*): 由  $\phi$  和  $\phi \rightarrow \psi$  可证  $\psi$
  - **必然化规则** (generalization): 由  $\phi$  可证  $\Box\phi$
  - **统一代入规则** (uniform substitution): 由  $\phi$  可证  $\phi^\sigma$



# K-系统

## 定义

- 定义一个 **K-证明** 为一个有穷公式序列，其中每条公式要么是 **K** 的公理，要么是由之前的公式应用 **K** 中证明规则得到的。
- 我们称一个公式  $\phi$  是 **K-可证的**，当且仅当  $\phi$  是某个 **K-证明** 的最后一条公式，记作  $\vdash_{\mathbf{K}} \phi$

# K-系统

## 例

- $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
- $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)))$
- $\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q))$
- $\Box(p \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(p \wedge q))$
- $\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$ , 即  $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$

# K 的可靠性

- 所有命题逻辑重言式例式、(Dual)和(K)都是有效的
- 分离规则保持框架类，框架全局/局部有效性，模型全局真和局部真（满足）
- 统一代入保持框架类，框架全局/局部有效性，不保持模型全局真或局部真
- 必然化规则保持框架类，框架（全局）有效性，模型全局真，不保持框架局部有效性或模型局部真

# K 的可靠性

我们一般期望用模态逻辑公理系统来刻画（框架类）**有效性**  
**事实**

**K** 是（针对所有框架类）可靠的，即对任意框架  $\mathfrak{F}$ ,  $\vdash_K \phi$   
蕴含  $\mathfrak{F} \Vdash \phi$

事实上，**K** 也是（针对所有框架类）完全的。在这个意义  
上，我们称 **K** 是（克里普克语义学意义上）**极小的**模态逻辑  
公理系统

# 正规模态逻辑

## 定义 (正规模态逻辑)

我们定义 **正规模态逻辑** (normal modal logic) 为一个公式集  $\Lambda$ , 它包含所有的命题逻辑重言式例式、(K)、(Dual) 并且在分离规则、统一替换规则和必然化规则下封闭。

## 例

- $\mathbf{K}$  是最小的正规模态逻辑
- $\mathbf{K4}$  是  $\mathbf{K}$  的基础上添加公理  $\diamond\diamond p \rightarrow \diamond p$  得到的
- 令  $F$  是所有基本模态逻辑框架组成的框架类, 定义

$$\Lambda_F = \{\phi \mid F \Vdash \phi\}$$

则  $\Lambda_F$  是一个正规模态逻辑

# 模态不变性

回忆：一阶谓词逻辑表达力的界限：同态、同构、子模型、初等等价

不变性 (invariance) 结果刻画了一种人工语言的表达力界限，同时勾勒出所关心的研究领域

# 模态不变性

## 定义

- 给定模态语言类型  $\tau$  和  $\tau$ -模型  $\mathfrak{M}$  和  $\mathfrak{M}'$  以及它们中的状态  $w$  和  $w'$ 。定义  $w$  的  $\tau$ -理论 为  $\{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$ 。我们称  $w$  和  $w'$  是模态等价的，记作  $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{M}', w'$  或  $w \leftrightarrow w'$ ，当且仅当它们有相同的  $\tau$ -理论
- 我们定义模型  $\mathfrak{M}$  的  $\tau$ -理论 为  $\{\phi \mid \mathfrak{M} \Vdash \phi\}$ 。我们称模型  $\mathfrak{M}$  和  $\mathfrak{M}'$  是模态等价的，记作  $\mathfrak{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}'$ ，当且仅当它们有相同的  $\tau$ -理论



# 模态不变性

## 事实

给定模态语言类型  $\tau$ , 索引集  $I$ 。对每个  $i \in I$ ,  $\mathfrak{M}_i$  是一个  $\tau$ -模型。对任意  $i \in I$  任意  $\mathfrak{M}_i$  中  $w$  有

$$\mathfrak{M}_i, w \leftrightarrow \bigsqcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w$$

即不交并保持模态不变性

证明.

对  $\tau$ -公式复杂度归纳证明

# 习题

- 1.5.1 (改为 " $\Box p \Vdash_{M(K)}^g p$ ")
- 1.5.2
- 1.5.3 (改为 "M denote the class of all models, ...  
 $\Vdash_M^g \dots \Vdash_M^g$ ")

教材勘误:

<https://staff.fnwi.uva.nl/y.venema/mlbook/errata.pdf>

# 下期预告

- 模态不变性与互模拟
- 有穷模型性