数学写作与习题

陈淇奥
21210160025@m.fudan.edu.cn

2021 年 9 月 23 日

Outline

数学写作

习题的一些问题

参考书

Knuth, Donald Ervin（高德纳）, et al.
Mathematical writing

- Author of *The art of computer programming*
- Creator of TEX

1

Symbols in different formulas must be separated by words.

$$\begin{aligned} \text{Bad}: &\quad \text{Consider } S_q, q < p. \\ \text{Good}: &\quad \text{Consider } S_q, \text{ where } q < p. \end{aligned}$$

我们应该用文字来分隔不同公式中的符号。

Don't start a sentence with a symbol.

$$\begin{aligned} \text{Bad}: &\quad x^n - a \text{ has } n \text{ distinct zeroes.} \\ \text{Good}: &\quad \text{The polynomial } x^n - a \text{ has } n \text{ distinct zeroes.} \end{aligned}$$

不要用符号作为一句话的开头。

Don't use the symbols $\therefore$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\ni$; replace them by the correspondence words. (Except in works on logic)

不要使用 $\therefore$，少使用 $\forall$，$\exists$，$\Rightarrow$，$\ni$。用对应的文字来替代他们。

这个问题是作业中最严重，过多的这种符号会让你的证明不便于阅读。

The word “we” is often useful to avoid passive voice; “We can now prove the following result” is much better than “The following result can now be proved.” But this use of “we” should be used in contexts where it means “you and me together”, not a formal equivalent of “I”. Think of a dialog between author and reader.

我们可以用用“我们”来避免被动语态。“我们能证明以下结果”比“以下结果可以被证明”要好。应该在表示“你和我”的情况下用“我们”，而不是“我们”当作“我”的等价物。我们可以把它想象成作者与读者间的对话。

In most technical writing, “I” should be avoided, unless the author’s persona is relevant.

在大多数技术写作中，我们应当被避免使用“我”，除非作者本人是相关的。

10

Don't use the style of homework papers, in which a sequence of formulas is merely listed. Tie the concepts together with a running commentary

不要仅仅是列公式，要用词汇把每句话连起来。

Don't use the same notation for two different things. Conversely, use consistent notation for the same thing when it appears in several places. For example, don't say "A_j for $i \leq j \leq n$" in one place and "A_k for $1 \leq k \leq n$" in another place unless there is a good reason. It is often useful to choose names for indices so that i varies from 1 to m and j from 1 to n, say, and to stick to consistent usage. Typographic conventions (like lowercase letters for elements of sets and uppercase for sets) are also useful.

我们要注意记号的一致性，不要用同一个符号代表不同的对象。

在作业中，有同学混用了一般交中的指标 i 与某个常数 i。

When in doubt, read *The Art of Computer Programming* for outstanding examples of good style.

反例

$L(C,P) \subset A_n$

$C \subset L \Rightarrow C \subset A_n$

Spse $p \in P$, $p \notin A_n \Rightarrow p_i < p_j$ for $i < j$

$c + p \in L \subset A_n$

$\therefore\ c_i + p_i \geq c_j + p_j$ but $c_i \geq c_j \geq 0, p_j \geq p_i \therefore (c_i - c_j) \geq (p_j - p_i)$

but $\exists$ a constant $k \ni c + kp \notin A_n$

let $k = (c_i - c_j) + 1 \qquad c + kp \in L \subset A_n$

$\therefore\ c_i + kp_i \geq c_j + kp_j \Rightarrow (c_i - c_j) \geq k(p_j - p_i)$

$\Rightarrow k - 1 \geq k \cdot m \qquad k, m \geq 1$ Contradiction

$\therefore\ p \in A_n$

$\therefore\ L(C,P) \subset A_n \Rightarrow C, P \subset A_n$ and the

" lemma is true.

参考资料

- Knuth 在 stanford 的授课视频。
- Knuth, Donald Ervin, et al. Mathematical writing。
- Halmos, Paul R. How to write mathematics。

名言警句

Often the experience of learning of the Model theory is similar to the one of learning of Physics: for a [short] while everything is so simple and so easily reformulated in familiar terms that "there is nothing to learn" but suddenly one find himself in a place when Model theoreticians "jump from a tussock to a hummock" while we mathematicians don't see where to "put a foot" and are at a complete loss.

David Kazhdan. Lecture notes in motivic integration

一张图

算术入门

先假设你有一只兔子。

假设有人又给了你另一只兔子。

现在，数一下你所拥有的兔子数量，你会得到结果是两只。也就是说一只兔子加一只兔子等于两只兔子，也就是一加一等于二。

$$1+1=2$$

这就是算术的运算方法了。

那么，现在你已经对算术的基本原理有了一定了解，就让我们来看一看下面这个简单的例子，来把我们刚刚学到的知识运用到实践中吧。

试试看！
例题 1.7

$$\log\Pi(N)=\left(N+\frac{1}{2}\right)\log N-N+A-\int_N^\infty\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{x},\quad A=1+\int_1^\infty\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{x}$$

$$\log\Pi(s)=\left(s+\frac{1}{2}\right)\log s-s+A-\int_0^\infty\frac{\overline{B}_1(t)\mathrm{d}t}{t+s}$$

$$\begin{aligned}
\log\Pi(s)&=\lim_{n\to\infty}\left[s\log(N+1)+\sum_{n=1}^{N}\log n-\sum_{n=1}^{N}\log(s+n)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[s\log(N+1)+\int_1^N\log x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\log N+\int_1^N\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{x}\right.\\
&\quad-\int_1^N\log(s+x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[\log(s+1)+\log(s+N)]\\
&\quad\left.-\int_1^N\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{s+x}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[s\log(N+1)+N\log N-N+1+\frac{1}{2}\log N+\int_1^N\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{x}\right.\\
&\quad-(s+N)\log(s+N)+(s+N)+(s+1)\log(s+1)\\
&\quad\left.-(s+1)-\frac{1}{2}\log(s+1)-\frac{1}{2}\log(s+N)-\int_1^N\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{s+x}\right]\\
&=\left(s+\frac{1}{2}\right)\log(s+1)+\int_1^\infty\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{x}-\int_1^\infty\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{s+x}\\
&\quad+\lim_{n\to\infty}\left[s\log(N+1)+\left(N+\frac{1}{2}\right)\log N\right.\\
&\quad\left.-\left(s+N+\frac{1}{2}\right)\log(s+N)\right]\\
&=\left(s+\frac{1}{2}\right)\log(s+1)+(A-1)-\int_1^\infty\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{s+x}
\end{aligned}$$

″

证明两个集合相等

如果我们要证明两个集合 A 和 B 相等，我们现在的工具只有外延原理。

外延原理：$A = B$ 当且仅当 A 和 B 有相同的元素。

证明：如果 $X \subset Y$，那么 $X \cap Y = X$。

思路：由外延原理可知，我们要证明 $X \cap Y = X$，我们就要证明 $X \cap Y$ 的所有元素属于 X 并且 X 的所有元素属于 $X \cap Y$，即我们要证明 $X \cap Y \subset X$ 并且 $X \subset X \cap Y$。

交与一般交

考虑 $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$，对 $i \in \mathbb{N}$，定义 $Y_i = \bigcap_{j \leq i} X_j$。证明：$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$。

有同学试图这样表示一般交

$$\bigcap \mathcal{F} = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n \cap \cdots$$

我们来看这为什么是错的。

交与一般交

定义

如果 A 和 B 是集合，那么 A 与 B 的 **交集** 为

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 并且} x \in B\}$$

对于集合族 $\mathcal{F} = \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$，它的 **一般交** 为

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x : \text{对于每一个} F \in \mathcal{F}, \text{我们有} x \in F\}$$

交与一般交

我们可以看到，交这个操作是作用在两个集合上的，但同时我们可以用它表示有限个元素的交。对于有限个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 \cap (A_2 \cap (\cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n) \cdots))$$

而对于集合族 $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，我们可以证明

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{F} &= \{x : \text{对于每一个} A_i \in \mathcal{F} (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \text{我们有} x \in F\} \\ &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \end{aligned}$$

因此对于有限个元素，它们的交与仅包含它们的集合族的一般交是一样的。

交与一般交

但是对于无穷个集合 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，因为交操作只能在作用有限个集合上，因此我们无法利用交操作得到所有集合的交集。

因此我们不能把 $\bigcap\mathcal{F}$ 表示为

$$X_1\cap X_2\cap\cdots\cap X_n\cap\cdots$$

并与一般并

并与一般并分别依赖于对集公理和并集公理。

偏序与严格偏序

定义

令 $\leq$ 为 X 上的二元关系，如果 $\leq$ 满足

1. $\leq$ 是自反的，即对所有的 $x \in X$，$x \leq x$。
2. $\leq$ 是反对称 (antisymmetric) 的，即对所有的 $x, y \in X$，如果 $x \leq y$ 且 $y \leq x$，则 $x = y$。
3. $\leq$ 是传递的，即对所有的 $x, y, z \in X$, 如果 $x \leq y$ 且 $y \leq z$，则 $x \leq z$。

就称 $\leq$ 是 X 上的一个 **偏序** 。

偏序与严格偏序

定义

令 $<$ 为 X 上的二元关系，如果 $<$ 满足

1. $<$ 是非自反的，即对所有的 $x \in X$，$x < x$ 不成立。
2. $<$ 是非对称（asymmetric）的，即对所有的 x，$y \in X$，如果 $x < y$，那么并非 $y < x$。
3. $<$ 是传递的，即对所有的 x，y，$z \in X$, 如果 $x < y$ 且 $y < z$，则 $x < z$。

就称 $<$ 是 X 上的一个 严格偏序 。

偏序与严格偏序

对于这两个定义，我们要关注反对称和非对称这两个性质。在非自反的条件下，这两个性质是等价的。

命题

令 R 是 X 上的二元关系，如果 R 是非自反的，那么 R 是反对称的当且仅当 R 是非对称的。

偏序与严格偏序

命题

令 R 是 X 上的二元关系，如果 R 是非自反的，那么 R 是反对称的当且仅当 R 是非对称的。

证明.

1. 如果 R 是反对称的，我们使用反证法，假设 R 不是非对称的，对于任意 x, y，$xRy \to \neg yRx$ 是错的，即存在 $x, y \in X$ 使得 xRy 并且 yRx，由于 R 是反对称的，于是 $x = y$，因此我们有 xRx，与非自反性矛盾。
2. 如果 R 是非对称的，对于任意 $x, y \in X$，如果 xRy 并且 yRx，我们知道这是错误的，于是 R 是反对称的。

因此在非自反的条件下，这两个概念是等价的。 $\square$

推荐阅读

Guide to proofs on sets