数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021-2022 冬季

前情提要

可靠性定理:

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明要点:

- 对证明序列归纳证明
- 检验每条公理都是有效的
- 替换引理: $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \iff (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$

前情提要

- 一阶逻辑的紧致性定理：

  $$\Sigma \text{ 是有穷可满足的} \Rightarrow \Sigma \text{ 是可满足的}$$

- 紧致性定理的应用
  - 有穷结构组成的类不是广义初等类，无穷结构组成的类不是初等类
  - 连通图不是广义初等类

  ……

完全性定理

完全性定理

定理 (完全性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$. Γ 是 $\mathcal{L}$ 公式集，φ 是 $\mathcal{L}$ 公式，则

$$\Gamma \vDash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$

也即，对任意公式集 Σ，如果 Σ 一致，那么 Σ 可满足

完全性定理

证明思路：给定一致的 $\mathcal{L}$ 公式集 Σ，我们要构造一个它的 $\mathcal{L}$ 模型 $\mathfrak{A}$ 以及赋值 s：

- 将 Σ 扩张为一个极大一致集 Δ，以获得足够多的信息
- 将 $\mathcal{L}$ 中的所有项作为论域中元素
- 变元、常数符号、函数符号解释依据项本身的构造
- 关系依据 Δ 中原子公式的提示
- 证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Delta$，即对任意 φ，$\varphi \in \Delta \Rightarrow (\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

完全性定理

难点:

- 否定式: $\neg\beta$

  假设 $\neg\alpha \in \Delta$，要证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \neg\alpha$，需要有 "$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Rightarrow \alpha \in \Delta$" 作为归纳假设。因此，我们需要证明更强的命题：$\varphi \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

- 等式: $t_1 \approx t_2$

  如果对任意项 t，$\bar{s}(t) = t$，那么对不同的项 t_1, t_2，有 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash t_1 \approx t_2$，但可能同时也有 $t_1 \approx t_2 \in \Delta$

完全性定理

难点:

- 全称式: $\forall x\beta$

  假设 $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$，为了证明 $\forall x\beta \in \Delta$，我们也可以证明 $(\neg\forall x\beta) \notin \Delta$。但由 $\models \forall x\beta \rightarrow \beta^x_t$，我们最多得到 $\beta^x_t \in \Delta$，或等价地 $\neg\beta^x_t \notin \Delta$

  解决思路: 我们事先在 Δ 中加入一些诸如

$$\neg\forall x\beta \rightarrow \neg\beta^x_t$$

  的公式

完全性定理

给定语言 $\mathcal{L}$ 和一致的公式集 Σ。

首先，我们在语言中添加可数无穷多个新的常数符号 $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$，令 $\mathcal{L}_C = \mathcal{L} \cup C$

由于语言改变了，Σ 在新的语言中能证明的公式多了。我们要证明 Σ 在新的语言中仍然是一致的。

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$ 且推演中不出现 c

完全性定理

其次，对每一对 $\mathcal{L}_C$ 中公式 φ 和变元 x 的组合，添加一条 亨金公理：

$$\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c$$

其中，每个 c 对应唯一一组 (φ, x)，且不在所对应的 φ 中出现（否则可能导致不一致，例如 φ 是 $x \not\approx c$）

完全性定理

添加亨金公理的做法:

- 枚举有序对 (φ, x): $\{(\varphi_1, x_1), (\varphi_2, x_2), \ldots\}$

  注意: 对 $i \neq j$, 可能 $\varphi_i = \varphi_j$ 或 $x_i = x_j$

- 令 $\theta_k = (\neg \forall x_k \varphi_k \to \neg (\varphi_k)^{x_k}_{c_{i_k}})$

  其中, c_{i_k} 是 $\{c_0, c_1, \ldots\}$ 枚举中, 第一个不在任何已定义的 θ_i ($i < k$) 和 φ_k 中出现的常数符号

- 令 $\Theta = \{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

完全性定理

我们需要证明，添加亨金公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$

  假设 $\theta_{m+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi^x_c$

  [因为 $(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \to \neg\forall x\varphi)^P$ 和

  $(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \to \varphi^x_c)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加亨金公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$

  假设 $\theta_{m+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi^x_c$

  [因为 $(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \to \neg\forall x\varphi)^P$ 和

  $(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \to \varphi^x_c)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加亨金公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$

  假设 $\theta_{m+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

  [因为 $(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \neg\forall x\varphi)^P$ 和

  $(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \varphi_c^x)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加亨金公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$

  假设 $\theta_{m+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

  [因为 $(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \neg\forall x\varphi)^P$ 和

  $(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \varphi_c^x)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

将一致的公式集 $\Sigma \cup \Theta$ 扩张为极大一致集 Δ

极大一致集性质: 对任意公式 φ

- 或者 $\varphi \in \Delta$，或者 $\neg\varphi \in \Delta$
- 若 $\Delta \vdash \varphi$，则 $\varphi \in \Delta$

完全性定理

运用极大一致集 Δ 丰富的信息，构造一个它的模型 $\mathfrak{A}$:

- 令 $\mathcal{T}$ 是语言 $\mathcal{L}_C$ 中所有项的集合。定义

$$|\mathfrak{A}| = \mathcal{T}/E = \{\, [t]_E \mid t \in \mathcal{T} \,\}$$

其中，E 是 $\mathcal{T}$ 上的二元关系，定义如下:

$$(t_1, t_2) \in E \iff t_1 \approx t_2 \in \Delta$$

需要证明: E 是等价关系

完全性定理

回顾:

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

完全性定理

- 对 n 元谓词符号 P，定义 $P^{\mathfrak{A}}$ 为 $|\mathfrak{A}|$ 上 n 元关系：

$$([t_1]_E, \ldots, [t_n]_E) \in P^{\mathfrak{A}} \;\Leftrightarrow\; Pt_1 \ldots t_n \in \varDelta$$

需要证明：若 $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n) \in E$，则

$Pt_1 \ldots t_n \in \varDelta \;\Leftrightarrow\; Pu_1 \ldots u_n \in \varDelta$

考虑：

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

完全性定理

- 对 n 元函数符号 f，定义 $f^{\mathfrak{A}}$ 为 $|\mathfrak{A}|$ 上 n 元函数：

$$f^{\mathfrak{A}}([t_1]_E, \ldots, [t_n]_E) = [f t_1 \ldots f_n]_E$$

需要证明：若 $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n) \in E$，则 $(f t_1 \ldots t_n, f u_1 \ldots u_n) \in E$

考虑：

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow f x_1 \ldots x_n \approx f y_1 \ldots y_n)$

完全性定理

- 对 $\mathcal{L}_C$ 中的常数符号 c，令 $c^{\mathfrak{A}} = [c]_E$

以上，完成了对 $\mathfrak{A}$ 的构造。

还需定义 $\mathfrak{A}$ 赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$：

$$s(x) = [x]_E$$

验证：对任意项 t，$\bar{s}(t) = [t]_E$

完全性定理

- 对 $\mathcal{L}_C$ 中的常数符号 c，令 $c^{\mathfrak{A}} = [c]_E$

以上，完成了对 $\mathfrak{A}$ 的构造。

还需定义 $\mathfrak{A}$ 赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$:

$$s(x) = [x]_E$$

验证: 对任意项 t，$\bar{s}(t) = [t]_E$

完全性定理

我们证明: 对任何 $\mathcal{L}$ 公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \iff \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳:

- $\alpha = t_1 \approx t_2$

完全性定理

我们证明: 对任何 $\mathcal{L}$ 公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳:

- $\alpha = Pt_1 \ldots t_n$

完全性定理

我们证明: 对任何 $\mathcal{L}$ 公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \iff \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳:

- $\alpha = \neg\beta$

完全性定理

我们证明: 对任何 $\mathcal{L}$ 公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳:

- $\alpha = \beta \to \gamma$

完全性定理

我们证明: 对任何 $\mathcal{L}$ 公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳:

- $\alpha = \forall x \beta$

完全性定理

回顾：

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换 φ 中的变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \models \varphi$$

完全性定理

因此，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Delta$ ，由于 $\Sigma \subset \Delta$，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Sigma$

注意:

我们需要证明的是，Σ 作为一个 $\mathcal{L}$-公式 集是可满足的。

对此，只需把 $\mathfrak{A}$ 限制在 $\mathcal{L}$ 上，它就是一个满足 Σ 的 $\mathcal{L}$-结构

紧致性定理及其应用

定理 (紧致性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$，Γ 是一集 $\mathcal{L}$ 公式。那么 Γ 是可满足的当且仅当它的每个有穷子集是可满足的。

证明.

紧致性定理及其应用

定理

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$，Σ 是 $\mathcal{L}$ 的一个闭语句集。假设它有任意大的有穷模型，那么它就有无穷模型。

推论

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$。所有有穷 $\mathcal{L}$ 结构组成的类不是广义初等类，所有无穷结构组成的类不是初等类。

紧致性定理及其应用

类似地：

定理

- 连通图不是广义初等类
- 所有 Torsion 群组成的类不是广义初等类
- 所有 Torsion-free 的群组成的类不是初等类
- 所有特征 0 的域组成的类不是初等类。因此，对任何域的一阶语言的闭语句 σ，如果它在所有特征 0 的域中成立，那么它也在某个特征 p 的域中成立

……

存在非标准的算术模型

定理

令 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$ 是标准算术模型。那么存在一个非标准算术模型 $\mathfrak{N}^*$，$\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}^*$ 且 $\mathfrak{N}^*$ 含有“无穷”（非标准）自然数

勒文海姆-斯寇伦定理

定理 (勒文海姆-斯寇伦定理)

假设语言 $\mathcal{L}$ 可数。

下行的勒文海姆-斯寇伦定理

令 Σ 是一集 $\mathcal{L}$-公式。如果 Σ 是可满足的，那么存在一个可数的 Σ 模型。因此，对任何 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$，存在可数的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $|\mathfrak{A}| \equiv |\mathfrak{B}|$

上行的勒文海姆-斯寇伦定理

如果 $\mathcal{L}$-公式集 Σ 有无穷模型，那么对任何无穷基数 κ，存在 Σ 的基数为 κ 的模型。

一阶逻辑完全性定理在告诉我们希尔伯特公理系统可以完全刻画一阶逻辑的同时也告诉我们一阶逻辑表达力的限度

二阶逻辑与集合论

皮亚诺算术公理系统 (PA)：语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} = \{0, S, +, \cdot\}$

1. $\forall x\, S x \neq 0$ 非零数都有后继
2. $\forall x \forall y\, S x = S x \rightarrow x = y$ 后继函数是一一的
3. $\forall x\, x + 0 = x$ 加法递归定义
4. $\forall x \forall y\, x + S y = S(x + y)$
5. $\forall x\, x \cdot 0 = 0$ 乘法递归定义
6. $\forall x \forall y\, x \cdot S y = x \cdot y + x$
7. 对每个 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ 有: 归纳原理

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\varphi(0) \rightarrow \forall x\, (\varphi(S) \rightarrow \varphi(S x)) \rightarrow \forall x \varphi(x)\right)$$

二阶逻辑与集合论

显然，$\mathrm{PA} \subset \mathrm{Th}(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$

根据紧致性定理，无论 PA 还是 $\mathrm{Th}\mathfrak{N}$ 都有非标准模型

根据勒文海姆-斯寇伦定理，PA / $\mathrm{Th}\mathfrak{N}$ 有任意大的无穷模型

二阶逻辑与集合论

二阶谓词逻辑:

- 在表示论域中一阶对象的变元 $v_0, v_1, \ldots$ 之外，加入表示二阶对象（如论域上集合、关系、函数）的二阶变元：$X_0, X_1, \ldots$、$Y_0^{(n)}, Y_1^{(n)}, \ldots$ 等
- 加入连接一阶变元、常元与二阶变元、常元（谓词、函数符号）的“谓词”或句法构造。如：$x \in X$ 或 Xx
- 语义解释：例如，$x \in X$ 或 Xx 表示“对象 x 属于集合 X”；$\forall X \varphi$ 表示对论域的任意子集 X 有 φ

二阶逻辑与集合论

考虑二阶版本的归纳原理：

$$\forall X\ (0 \in X \to \forall x\ (x \in X \to Sx \in X) \to \forall x\ x \in X)$$

PA 加二阶版本的归纳原理是没有非标准模型的

所以，二阶逻辑没有紧致性定理（好事?），没有完全性定理（坏事）

二阶逻辑与集合论

蒯因：二阶逻辑是“set theory in sheep's clothing”

Zermelo-Fraenkel 集合论公理系统（ZF）：

- $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ 外延公理
- $\forall x \forall y \exists z \forall w\, (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$ 对集公理
- $\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in x))$ 并集公理
- $\exists x (0 \in x \wedge \forall z\, (z \in x \rightarrow z \cup \{z\} \in x))$ 无穷公理
- $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subset x)$ 幂集公理

……

二阶逻辑与集合论

作为一阶理论的集合论可以“决定”自然数集：

$$\mathsf{ZF} \vdash \exists ! x\ (x \text{ 是 } \subset\text{-最小的见证无穷公理成立的集合})$$

集合论是被广泛接受的数学基础：做数学证明就是在 ZF 下做内定理证明

斯寇伦佯谬

注意: ZF 是一阶集合论语言 $\{\in\}$ 的一阶理论

- ZF $\vdash$ 存在不可数的集合
- 如果 ZF 一致，那么 ZF 有一个可数模型 $\mathfrak{M}$
- $\mathfrak{M} \models$ 存在不可数的集合

当然，ZF 也有非标准模型

哥德尔不完全性定理

定理 (哥德尔不完全性定理)

任何一阶公理系统，如果能它能解释 PA – 归纳原理，那么它要么是不一致的，要么是不完全的。如果它能解释 PA 并且是一致的，那么它证明不了自己的一致性

例

- PA
- ZF

推论

如果 PA 一致，那么 $\mathrm{PA}+\neg\mathrm{Con}(\mathrm{PA})$ 一致

你能想象一个 $\mathrm{PA}+\neg\mathrm{Con}(\mathrm{PA})$ 的模型吗?

哥德尔不完全性定理

既然允许公理集是无穷的，我们为什么不干脆使用 $\mathrm{Th}\mathfrak{N}$ 和 $\mathrm{Th}(V, \in)$ 做公理？

完全的公理化理论

定义

一个 $\mathcal{L}$ 语言的理论 T 是 κ-范畴的（categorical），当且仅当对任意 κ 大的结构 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 有 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。

事实

令 T 是可数语言 $\mathcal{L}$ 的理论。如果 T 的模型都是无穷模型，并且存在 κ 使得 T 是 κ-范畴的，那么 T 是完全的

完全的公理化理论

例

无端点稠密线性序是 ω-范畴的。特别地，

$\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, \leq) = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq)$

完全的公理化理论

考虑 实数域：$(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$

事实

- $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 不是 ω-范畴的：代数数 vs 代数数 $+\{\pi\}$
- $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 不是 $|\mathbb{R}|$-范畴的：非标准分析
- $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 不是任何 κ-范畴的

完全的公理化理论

$\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 有一个完全的公理化——实闭域理论 (real closed field)：

- 有序域公理
  - 域公理
  - $\forall x \forall y \forall z\ (x < y \rightarrow x + z < y + z)$
  - $\forall x \forall y\ (0 < x \rightarrow 0 < b \rightarrow 0 < a \cdot b$
- 每个正数都有一个平方根
- 任何奇数次多项式都有解（公理模式）

完全的公理化理论

定理

实闭域理论 T 允许量词消去。即，对任意 $\{\leq, 0, 1, +, \cdot\}$ 语言中公式 φ，存在一个无量词的公式 ψ，使得

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

推论

- 实闭域理论是完全的
- 实闭域理论 $\{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$ 是可判定的

完全的公理化理论

考虑： 复数域 $(\mathbb{C}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$

事实

$\mathrm{Th}(\mathbb{C}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 有一个完全的公理化——特征 0 的代数闭域（algebraically closed field）：

- 域公理
- 每个多项式都有解
- $1 + \cdots + 1 \neq 0$

完全的公理化理论

事实

- 特征 0 的代数闭域是 $|\mathbb{R}|$-范畴的
- 特征 0 的代数闭域允许量词消去
- 特征 0 的代数闭域是完备的可判定的理论

完全的公理化理论

注意，这不意味着我们就可以用一台电子计算机代替所有实分析学家的工作。一些关于 $(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 的陈述不是一阶的。

例

$\mathbb{R}$ 是完备的，即每个 R 的有上界子集都有上确界

The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible.

习题

无