数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021-2022 冬季

前情提要

前情提要

我们定义了两种“定义”

- 结构内的可定义性: 给定结构
  - 定义的是该结构论域上的某个 k-元关系
  - 由一个 公式 定义
- 定义结构类: 给定语言
  - 定义的是该语言的某个结构类
  - 由 一则 闭语句定义（初等类）；由 一集 闭语句定义（广义初等类）

同态与同构

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 **同态** （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 谓词符号 P，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 (homomorphism),当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 谓词符号 P,和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$,有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 函数符号 f，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 常数符号 c，有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢？

同态与同构

定义 (嵌入与同构)

令 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态

- 如果同态 h 是 单射 的，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 嵌入 （embedding）；
- 如果 h 是双射（既是单射，又是满射），我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同构 （isomorphism）。此时，我们称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构，记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，
$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$
3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定义

如果 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的一个同构，那么我们称 h 是 $\mathfrak{A}$ 上的 自同构 （automorphism）

推论

令 h 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个自同构，并且 $R \subset |\mathfrak{A}|^n$ 是一个 $\mathfrak{A}$ 中 可定义的 n 元关系，则对任意 $|\mathfrak{A}|$ 中元素 $a_1, \ldots, a_n$ 有，

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R$$

同态与同构

上述定理为我们提示了一种证明“不可定义”的方法。

例

还是考虑结构

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 $\{b\}$ 是不可定义的

初等等价

定义

给定语言 $\mathcal{L}$。我们说两个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ **初等等价**，记作 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 闭语句 σ 有，

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \sigma$$

初等等价

一些推论：

给定语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，反之未必
- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-初等类 $\mathcal{K}$ 有

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$$

一阶逻辑希尔伯特系统的可靠性

可靠性定理

定理 (可靠性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$ 的公式集 Γ 和公式 φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明.

对证明序列归纳

可靠性定理

假设 $\langle \beta_1, \ldots, \beta, n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明：对任意 $1 \le i \le n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

可靠性定理

假设 $\langle \beta_1, \ldots, \beta, n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明：对任意 $1 \le i \le n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

可靠性定理

假设 $\langle \beta_1, \ldots, \beta, n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明：对任意 $1 \le i \le n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

可靠性定理

假设 $\langle \beta_1, \ldots, \beta, n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明：对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

接下来，我们只需要证明所有公理是有效的

可靠性定理

回顾一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

首先，公理包括所列公式（模式）的所有 全称概括。所以，我们需要证明：

如果公式 φ 是普遍有效的，那么 $\forall x\varphi$ 也是 （习题 5.1.11）

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可无冲替代 α 中 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可无冲替代 α 中 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

任给 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$-赋值 s，定义命题逻辑真值指派 $v_{(\mathfrak{A},s)}$ ，使得对任意 $\mathcal{L}$ 中素公式 β 有，

$$v_{(\mathfrak{A},s)}(\beta^P) = 1 \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \vDash \beta$$

归纳证明，对所有 $\mathcal{L}$-公式 α 有，

$$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1 \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha$$

若 α^P 是重言式，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$ 有，$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1$

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理:

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可无冲替代 α 中 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

假设 t 可以无冲突地替换公式 φ 中的 x 并且 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，我们只需证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x$。而由下述引理，

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$$

我们只需证：$(\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$，而由 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，这显然成立

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- φ 是原子公式　　引理: $\bar{s}(u_t^x) = \overline{s_{\bar{s}(t)}^x}(u)$

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- φ 是几个子公式的布尔组合

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- $\varphi = \forall y \psi$

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可无冲替代 α 中 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$ (习题 5.1.8)
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可无冲替代 α 中 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$ （习题 5.1.8）
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现 （习题 5.19）

可靠性定理

若语言中含有等词，则还有

1. $x \approx x$
2. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 替换为 y 所得到的公式 (习题 5.1.10)

完全性定理

完全性定理

定理 (完全性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$. Γ 是 $\mathcal{L}$ 公式集，φ 是 $\mathcal{L}$ 公式，则

$$\Gamma \vDash \varphi \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash \varphi$$

也即，对任意公式集 Σ，如果 Σ 一致，那么 Σ 可满足

定理 (紧致性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$，Γ 是一集 $\mathcal{L}$ 公式。那么 Γ 是可满足的当且仅当它的每个有穷子集是可满足的。

证明.

紧致性定理及其应用

定理

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$，Σ 是 $\mathcal{L}$ 的一个闭语句集。假设它有任意大的有穷模型，那么它就有无穷模型。

推论

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$。所有有穷 $\mathcal{L}$ 结构组成的类不是广义初等类，所有无穷结构组成的类不是初等类。

紧致性定理及其应用

类似地：

定理

- 连通图不是广义初等类
- 所有 Torsion 群组成的类不是广义初等类
- 所有 Torsion-free 的群组成的类不是初等类
- 所有特征 0 的域组成的类不是初等类。因此，对任何域的一阶语言的闭语句 σ，如果它在所有特征 0 的域中成立，那么它也在某个特征 p 的域中成立

……

紧致性定理及其应用

存在非标准的算术模型

定理

令 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$ 是标准算术模型。那么存在一个非标准算术模型 $\mathfrak{N}^*$，$\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}^*$ 且 $\mathfrak{N}^*$ 含有“无穷”（非标准）自然数

下期预告

- 一阶逻辑希尔伯特公理系统的完全性
- 勒文海姆-斯寇伦定理

习题

- 5.3.6 (1), 5.3.8