

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021-2022 冬季

前情提要

前情提要

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α' (形如 $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\beta$), 使得

$$\alpha \vdash \alpha'$$

前情提要

一阶逻辑的语义

- 语言 \mathcal{L} 中参数符号的语义—— \mathcal{L} 结构
- 自由变元的语义——赋值 $s : V \rightarrow |\mathfrak{A}|$
- 项的语义——由 \mathfrak{A} 和 s 唯一决定的 $\bar{s} : \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \rightarrow |\mathfrak{A}|$
- 公式的语义——满足关系： $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

前情提要

- 合同引理
- 记法:
 - $\varphi(x_1, \dots, x_n)$
 - $\mathfrak{A} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$
- 闭语句与真: $\mathfrak{A} \models \sigma, \mathfrak{A} \models \Sigma$
 - 此时, 我们称 \mathfrak{A} 是 σ (或 Σ) 的模型
- 逻辑蕴含: $\Gamma \models \varphi, \alpha \models \beta$

前情提要

定义 (语义蕴含)

给定语言 \mathcal{L} 。称公式集 Γ 逻辑蕴含 φ ，记 $\Gamma \models \varphi$ ，当且仅当对任意 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 和任意 \mathfrak{A} -赋值 s 都有：如果 \mathfrak{A} 和 s 满足 Γ 中所有公式 (记 $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$)，那么 $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

约定

- 以后 \models 依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- $\alpha \models \beta$ 即 $\{\alpha\} \models \beta$; $\alpha \models \beta$ (逻辑等效)
- $\models \alpha$ 即 $\emptyset \models \alpha$ (逻辑有效)

可定义性

Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

结构内的可定义性

定义

给定语言 \mathcal{L} , \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 以及 \mathcal{L} 中公式 $\varphi(x_1, \dots, x_k)$, 我们称 φ 在结构 \mathfrak{A} 中定义了 ($|\mathfrak{A}|$ 上的) k -元关系 R , 当且仅当

$$R = \{(a_1, \dots, a_k) \in |\mathfrak{A}|^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k]\}$$

我们称一个 k -元关系 $R \subset |\mathfrak{A}|^k$ 是 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 中可定义的, 当且仅当存在一个 \mathcal{L} 公式在结构 \mathfrak{A} 中定义它

结构内的可定义性

例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$, 以及 \mathcal{L} 结构 $(\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\})$, 如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

- $\{a, b, c\}$ 的哪些子集是可定义的?
- 哪些 $\{a, b, c\}$ 上的二元关系是可定义的?

结构内的可定义性

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ 。令 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{N} 的论域为自然数集 \mathbb{N} ，其他的符号都按照通常的解释，则

- 序关系 $\{(m, n) \mid m < n\}$ 在 \mathfrak{N} 中是可定义的
- 对每一个自然数 n ，单点集 $\{n\}$ 都是 \mathfrak{N} 中可定义的
- 所有素数的集合在 \mathfrak{N} 中是可定义的

思考：有否不可定义的自然数的子集？能不能举出例子？

定义结构类

回顾:

- 在命题逻辑中, 我们会说一个布尔函数 $G : 2^n \rightarrow 2$ 被一个命题逻辑公式 α 定义, 当且仅当 $G = B_\alpha^n$
- 命题逻辑中赋值 $v : \mathcal{A} \rightarrow 2$ 的角色类似谓词逻辑中的结构 \mathfrak{A}
- 一个布尔函数 $G = B_\alpha^n$ 对应与一个赋值集合 $\{v : \mathcal{A} \rightarrow 2 \mid \bar{v}(\alpha) = 1\}$

定义结构类

定义

给定语言 \mathcal{L} 。令 Σ 是 \mathcal{L} 闭语句集。我们称

$$\text{Mod } \Sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ 是 } \mathcal{L} \text{ 结构且, } \mathfrak{A} \models \Sigma\}$$

是 Σ 所定义的 \mathcal{L} 结构类 (所有 Σ 的模型组成的类)

若 $\Sigma = \{\tau\}$, 我们记 $\{\tau\}$ 所定义的结构类为 $\text{Mod } \tau$

定义结构类

定义

给定语言 \mathcal{L} ,

- 我们称一个 \mathcal{L} 结构类 \mathcal{K} 是 \mathcal{L} -初等类 (elementary class), 当且仅当存在 **一个** \mathcal{L} 闭语句 τ 使得
$$\mathcal{K} = \text{Mod } \tau$$
- 我们称 \mathcal{K} 是 \mathcal{L} -广义初等类, 当且仅当存在一个 \mathcal{L} 闭语句集 Σ 使得 $\mathcal{K} = \text{Mod } \Sigma$

广义初等类与初等类到底有何区别?

定义结构类

例

令语言 \mathcal{L} 只含有等词。

- 语句 $\varepsilon_2 : \exists x \exists y (x \neq y)$ 定义的 \mathcal{L} -结构类是什么?
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 \mathcal{L} -初等类?
- 所有无穷集合组成的类是不是 \mathcal{L} -广义初等类? 是不是初等类?

定义结构类

例

考虑含有等词和一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$

- 令 $\tau_1 = \forall x Rxx$, $\tau_2 = \forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow Ryz \rightarrow Rxz)$,

$\text{Mod}\{\tau_1, \tau_2\}$ 是什么?

- 给出定义偏序类、全序类的闭语句 (集)
- 给出定义等价关系的闭语句 (集)

定义结构类

例

群论语言 $\mathcal{L} = \{\approx, \circ, ^{-1}, e\}$, 则下列闭语句

$$\forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了 **群** 这个初等类

阿贝尔群 是不是初等类? **无扭的阿贝尔群** 呢?

以上，我们给出了结构中 **可定义** 的严格定义，意味着我们可以证明形如“XXX 是不可定义的”的命题了。

同态与同构

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **同态** (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 **谓词符号** P , 和每组 $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, 有

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

对每个 n 元 **函数符号** f , 和每组 $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, 有

同态与同构

例

考虑有理数有序域 $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, 0^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, <^{\mathbb{Q}})$ 。定义函数

$h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$: 对任意 $q \in \mathbb{Q}$, 令

$n_q = \min \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid q \cdot n \in \mathbb{Z}\}$, 而 $i_q = q \cdot n_q$, $h(q) = (i_1, n_q)$ 。

定义 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ 上函数 $+^*$ 和 \cdot^* :

$$\blacksquare (i, n) +^* (j, m) = (im +^{\mathbb{Z}} jn, nm)$$

$$\blacksquare (i, n) \cdot^* (j, m) = (ij, nm)$$

定义 $(i, n) <^* (j, m)$, 当且仅当 $im <^{\mathbb{Z}} jn$ 。则 h 是从 \mathcal{Q} 到

$(\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}), (0, 1), +^*, \cdot^*, <^*)$ 的同态

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢？

同态与同构

定义 (嵌入与同构)

令 $h: |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ 是从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态

- 如果同态 h 是 **单射** 的, 我们称 h 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **嵌入** (embedding);
- 如果 h 是双射 (既是单射, 又是满射), 我们称 h 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **同构** (isomorphism)。此时, 我们称 \mathfrak{A} 与 \mathfrak{B} 同构, 记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态, s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

1 对任意项 t , $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$ (习题)

2 对任何不含量词且不含等词的公式 α ,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

3 若 h 是单射, 则 α 可含等词; 若 h 是双射, 可含量词

同态与同构

定义

如果 $h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ 是从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{A} 的一个同构, 那么我们称 h 是 \mathfrak{A} 上的 **自同构** (automorphism)

推论

令 h 是 \mathfrak{A} 上的一个自同构, 并且 $R \subset \mathfrak{A}^n$ 是一个 \mathfrak{A} 中 **可定义的** n 元关系, 则对任意 \mathfrak{A} 中元素 a_1, \dots, a_n 有,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R \Leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R$$

同态与同构

上述定理为我们提示了一种证明“不可定义”的方法。

例

还是考虑结构

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 $\{b\}$ 是不可定义的

下期预告

- 初等等价
- 一阶逻辑的可靠性定理

习题

- 5.1.2 - 5.1.6
- 5.2.2 - 5.2.4
- 5.3.1 (如果课上没讲) , 5.3.2, 5.3.4, 5.3.5