# 数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021-2022 冬季

定理 (前束范式定理)

对任何公式  $\alpha$  都存在量词前束公式  $\alpha'$  (形如

 $Q_1x_1\dots Q_nx_n\beta$ ), 使得

$$\alpha \vdash \dashv \alpha'$$

定理 (前束范式定理)

对任何公式  $\alpha$  都存在量词前束公式  $\alpha'$  (形如

 $Q_1x_1\dots Q_nx_n\beta$ ), 使得

 $\alpha \vdash \dashv \alpha'$ 

#### 一阶逻辑的语义

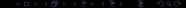
- 语言  $\mathcal{L}$  中参数符号的语义—— $\mathcal{L}$  结构
- 自由变元的语义——赋值  $s: V \to |\mathfrak{A}|$
- 项的语义——由  $\mathfrak{A}$  和 s 唯一决定的  $\bar{s}: \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \to |\mathfrak{A}|$
- 公式的语义——满足关系: (¾, s) = φ

- 合同引理
- 记法:
  - $\blacksquare \varphi(x_1,\ldots,x_n)$
  - $\blacksquare \mathfrak{A} \models \varphi[d_1,\ldots,d_n]$
- 闭语句与真: ¾ ⊧ σ, ¾ ⊧ Σ
  - 此时, 我们称  $\mathfrak{A}$  是  $\sigma$  (或  $\Sigma$ ) 的模型
- 逻辑蕴含: Γ ⊧ φ, α ⊧ β

### 定义 (语义蕴含)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。称公式集  $\Gamma$  逻辑蕴含  $\varphi$ ,记  $\Gamma \models \varphi$  ,当且仅当对任意  $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$  和任意  $\mathfrak{A}$ -赋值 s 都有:如果  $\mathfrak{A}$  和 s 满足  $\Gamma$  中所有公式(记  $(\mathfrak{A},s) \models \Gamma$ ),那么  $(\mathfrak{A},s) \models \varphi$  约定

- 以后 = 依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- |■ α ⊨ β 即 {α} ⊨ β; α ⊨ β ( 逻辑等效 )
- $\models \alpha$  即  $\emptyset \models \alpha$  (逻辑有效)



# 可定义性

#### Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

#### Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

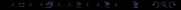
## 结构内的可定义性

### 定义

给定语言  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$  以及  $\mathcal{L}$  中公式  $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ , 我们称  $\varphi$  在结构  $\mathfrak{A}$  中定义了 ( $|\mathfrak{A}|$  上的) k- 元关系 R , 当且仅当

$$R = \{(a_1, \dots, a_k) \in |\mathfrak{A}|^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k]\}$$

我们称一个 k-元关系  $R \subset |\mathfrak{A}|^k$  是  $\mathcal{L}$  结构  $\mathfrak{A}$  中可定义的, 当且仅当存在一个  $\mathcal{L}$  公式在结构  $\mathfrak{A}$  中定义它



# 结构内的可定义性

例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言  $\mathcal{L} = \{R\}$ ,以及  $\mathcal{L}$  结构  $(\{a,b,c\},\{(a,b),(a,c)\})$ ,如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

- {*a*, *b*, *c*} 的哪些子集是可定义的?
- 哪些  $\{a,b,c\}$  上的二元关系是可定义的?



## 结构内的可定义性

### 例

考察关于数论的语言  $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$ 。 令  $\mathcal{L}$  结构  $\mathfrak{N}$  的论域 为自然数集  $\mathbb{N}$ ,其他的符号都按照通常的解释,则

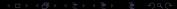
- 序关系  $\{(m,n) \mid m < n\}$  在  $\mathfrak{N}$  中是可定义的
- 对每一个自然数 n, 单点集  $\{n\}$  都是  $\mathfrak{N}$  中可定义的
- 所有素数的集合在 沉 中是可定义的

思考:有否不可定义的自然数的子集?能不能举出例子?



#### 回顾:

- 在命题逻辑中,我们会说一个布尔函数  $G: 2^n \to 2$  被一个命题逻辑公式  $\alpha$  定义,当且仅当  $G = B^n_\alpha$
- 命题逻辑中赋值  $v: \mathcal{A} \to 2$  的角色类似谓词逻辑中的 结构  $\mathfrak{A}$
- 一个布尔函数  $G = B_{\alpha}^{n}$  对应与一个赋值集合  $\{v: \mathcal{A} \to 2 \mid \bar{v}(\alpha) = 1\}$



定义

给定语言  $\mathcal{L}$ 。 令  $\mathcal{L}$  是  $\mathcal{L}$  闭语句集。我们称

 $\operatorname{Mod} \Sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \neq \mathcal{L} \text{ 结构且}, \ \mathfrak{A} \models \mathcal{L} \}$ 

是  $\Sigma$  所定义的  $\mathcal{L}$  结构类 (所有  $\Sigma$  的模型组成的类) 若  $\Sigma = \{\tau\}$ ,我们记  $\{\tau\}$  所定义的结构类为  $Mod \tau$ 



### 定义

#### 给定语言 $\mathcal{L}$ ,

- 我们称一个  $\mathcal{L}$  结构类  $\mathcal{K}$  是  $\mathcal{L}$ -初等类 (elementary class), 当且仅当存在 一个  $\mathcal{L}$  闭语句  $\tau$  使得  $\mathcal{K} = \operatorname{Mod} \tau$
- 我们称  $\mathcal{K}$  是  $\mathcal{L}$ -广义初等类 ,当且仅当存在一个  $\mathcal{L}$  闭 语句集  $\mathcal{L}$  使得  $\mathcal{K}$  =  $\mathrm{Mod}\,\mathcal{L}$

广义初等类与初等类到底有何区别?



### 例

#### 令语言 ∠ 只含有等词。

- 语句 ε<sub>2</sub>:∃x∃y(x ≉ y) 定义的 £-结构类是什么?
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 £-初等类?
- 所有无穷集合组成的类是不是 £-广义初等类? 是不是初等类?

### 例

#### 考虑含有等词和一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$

- 令  $\tau_1 = \forall x R x x$ ,  $\tau_2 = \forall x \forall y \forall z (R x y \rightarrow R y z \rightarrow R x z)$ , Mod $\{\tau_1, \tau_2\}$  是什么?
- 给出定义偏序类、全序类的闭语句(集)
- 给出定义等价关系的闭语句(集)

### 例

#### 考虑含有等词和一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$

- 令  $\tau_1 = \forall x R x x, \ \tau_2 = \forall x \forall y \forall z (R x y \rightarrow R y z \rightarrow R x z),$   $Mod\{\tau_1, \tau_2\}$  是什么?
- 给出定义偏序类、全序类的闭语句(集)
- 给出定义等价关系的闭语句(集)

例

#### 群论语言 $\mathcal{L} = \{ \approx, \circ, ^{-1}.e \}$ ,则下列闭语句

$$\forall x \forall y \forall z \ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x \ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x \ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

#### 定义了群 这个初等类

阿贝尔群 是不是初等类? 无扭的阿贝尔群 呢?

例

#### 群论语言 $\mathcal{L} = \{ \approx, \circ, ^{-1}.e \}$ ,则下列闭语句

$$\forall x \forall y \forall z \ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x \ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x \ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

#### 定义了群 这个初等类

阿贝尔群 是不是初等类? 无扭的阿贝尔群 呢?

以上,我们给出了结构中 可定义 的严格定义,意味着我们可以证明形如 "XXX 是不可定义的"的命题了。

## 定义 (同态)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。令  $\mathfrak{A}$  和  $\mathfrak{B}$  为两个  $\mathcal{L}$  结构。我们称函数  $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$  是一个从  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的 同态 (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

■ 对每个 n 元 **谓词符号** P, 和每组  $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ , 有

 $(a_1,\ldots,a_n)\in P^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow (h(a_1),\ldots,h(a_n))\in P^{\mathfrak{A}}$ 

### 定义 (同态)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。 令  $\mathfrak{A}$  和  $\mathfrak{B}$  为两个  $\mathcal{L}$  结构。我们称函数  $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$  是一个从  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的 同态 (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

■ 对每个 n 元 <mark>谓词符号 P</mark>, 和每组  $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ , 有

$$(a_1,\ldots,a_n)\in P^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow (h(a_1),\ldots,h(a_n))\in P^{\mathfrak{B}}$$



### 定义 (同态)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。 令  $\mathfrak{A}$  和  $\mathfrak{B}$  为两个  $\mathcal{L}$  结构。我们称函数  $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$  是一个从  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的 同态 (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

■ 对每个 n 元 函数符号 f, 和每组  $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ , 有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n))=f^{\mathfrak{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_n))$$



### 定义 (同态)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。 令  $\mathfrak{A}$  和  $\mathfrak{B}$  为两个  $\mathcal{L}$  结构。我们称函数  $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$  是一个从  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的 同态 (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

■ 对每个 常数符号 c, 有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$



例

考虑有理数有序域  $\mathfrak{Q}=(\mathbb{Q},0^{\mathbb{Q}},+^{\mathbb{Q}},\cdot^{\mathbb{Q}},<^{\mathbb{Q}})$ 。 定义函数  $h:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ : 对任意  $q\in\mathbb{Q}$ ,令  $n_q=\min\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\ \big|\ q\cdot n\in\mathbb{Z}\}$ ,而  $i_q=q\cdot n_q$ , $h(q)=(i_1,n_q)$ 。 定义  $\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$  上函数  $+^*$  和  $\cdot^*$ :

- $(i,n) +^* (j,m) = (im +^{\mathbb{Z}} jn, nm)$
- $(i,n) \cdot^* (j,m) = (ij,nm)$

定义  $(i,n) <^* (j,m)$ , 当且仅当  $im <^{\mathbb{Z}} jn$ 。则 h 是从  $\mathfrak Q$  到  $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}), (0,1), +^*, \cdot^*, <^*)$  的同态

直观上,同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么,什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢?

### 定义(嵌入与同构)

令 h: |XI| → |XI| 是从 XI 到 X3 的同态

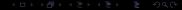
- 如果同态 h 是 单射 的, 我们称 h 是一个从 ¾ 到 ♥
   的 嵌入 (embedding);
- 如果 h 是双射 (既是单射,又是满射),我们称 h 是一个从 纽 到 妥 的 同构 (isomorphism)。此时,我们称 纽 与 妥 同构,记 纽 ≅ 妥

### 定理 (同态定理)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。假定 h 是从  $\mathcal{L}$  结构  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的同态, s 是  $\mathfrak{A}$  赋值。则

- 对任意项 t,  $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$  (习题)
- ☑ 对任何不含量词且不含等词的公式 α,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

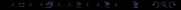


### 定理 (同态定理)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。假定 h 是从  $\mathcal{L}$  结构  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的同态, s 是  $\mathfrak{A}$  赋值。则

- 对任意项 t,  $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$  (习题)
- ☑ 对任何不含量词且不含等词的公式 α,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

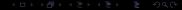


### 定理 (同态定理)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。假定 h 是从  $\mathcal{L}$  结构  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的同态, s 是  $\mathfrak{A}$  赋值。则

- 对任意项 t,  $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$  (习题)
- ☑ 对任何不含量词且不含等词的公式 α,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

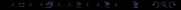


### 定理 (同态定理)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。假定 h 是从  $\mathcal{L}$  结构  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的同态, s 是  $\mathfrak{A}$  赋值。则

- 对任意项 t,  $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$  (习题)
- ☑ 对任何不含量词且不含等词的公式 α,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

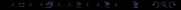


### 定理 (同态定理)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。假定 h 是从  $\mathcal{L}$  结构  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{B}$  的同态, s 是  $\mathfrak{A}$  赋值。则

- 对任意项 t,  $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$  (习题)
- ☑ 对任何不含量词且不含等词的公式 α,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$



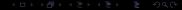
### 定义

如果  $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$  是从  $\mathfrak{A}$  到  $\mathfrak{A}$  的一个同构,那么我们称 h 是  $\mathfrak{A}$  上的 自同构 (automorphism)

### 推论

令  $h \in \mathbb{N}$  上的一个自同构,并且  $R \subset |\mathfrak{A}|^n$  是一个  $\mathfrak{N}$  中 可定义的 n 元关系,则对任意  $|\mathfrak{A}|$  中元素  $a_1, \ldots, a_n$  有,

$$(a_1,\ldots,a_n)\in R \Leftrightarrow (h(a_1),\ldots,h(a_n))\in R$$



上述定理为我们提示了一种证明"不可定义"的方法。

例

还是考虑结构

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 {b} 是不可定义的

# 下期预告

- 初等等价
- 一阶逻辑的可靠性定理

## 习题

- **5.1.2 5.1.6**
- **5.2.2 5.2.4**
- 5.3.1 (如果课上没讲), 5.3.2, 5.3.4, 5.3.5