数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021-2022 冬季

前情提要

前情提要

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α'（形如 $Q_1x_1\ldots Q_nx_n\beta$），使得

$$\alpha \vdash\dashv \alpha'$$

前情提要

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α' (形如 $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\beta$)，使得

$$\alpha \vdash\dashv \alpha'$$

前情提要

一阶逻辑的语义

- 语言 $\mathcal{L}$ 中参数符号的语义——$\mathcal{L}$ 结构
- 自由变元的语义——赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$
- 项的语义——由 $\mathfrak{A}$ 和 s 唯一决定的 $\bar{s} : \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \to |\mathfrak{A}|$
- 公式的语义——满足关系：$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

前情提要

- 合同引理
- 记法:
  - $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$
  - $\mathfrak{A} \vDash \varphi[d_1, \ldots, d_n]$
- 闭语句与真：$\mathfrak{A} \vDash \sigma$, $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$
  - 此时，我们称 $\mathfrak{A}$ 是 σ（或 Σ）的模型
- 逻辑蕴含：$\Gamma \vDash \varphi$, $\alpha \vDash \beta$

前情提要

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含 φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和任意 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有：如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式（记 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Gamma$ ），那么 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$；$\alpha \vDash\Dashv \beta$ （ 逻辑等效 ）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$ （ 逻辑有效 ）

可定义性

Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

结构内的可定义性

定义

给定语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 以及 $\mathcal{L}$ 中公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$，我们称 φ 在结构 $\mathfrak{A}$ 中定义了（$|\mathfrak{A}|$ 上的）k- 元关系 R ，当且仅当

$$R = \{(a_1, \ldots, a_k) \in |\mathfrak{A}|^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k]\}$$

我们称一个 k-元关系 $R \subset |\mathfrak{A}|^k$ 是 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 中可定义的，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 公式在结构 $\mathfrak{A}$ 中定义它

结构内的可定义性

例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，以及 $\mathcal{L}$ 结构 $(\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\})$，如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

- $\{a, b, c\}$ 的哪些子集是可定义的?
- 哪些 $\{a, b, c\}$ 上的二元关系是可定义的?

结构内的可定义性

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$。令 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{N}$ 的论域为自然数集 $\mathbb{N}$，其他的符号都按照通常的解释，则

- 序关系 $\{(m, n) \mid m < n\}$ 在 $\mathfrak{N}$ 中是可定义的
- 对每一个自然数 n，单点集 $\{n\}$ 都是 $\mathfrak{N}$ 中可定义的
- 所有素数的集合在 $\mathfrak{N}$ 中是可定义的

思考：有否不可定义的自然数的子集？能不能举出例子？

定义结构类

回顾：

- 在命题逻辑中，我们会说一个布尔函数 $G : 2^n \to 2$ 被一个命题逻辑公式 α 定义，当且仅当 $G = B^n_\alpha$
- 命题逻辑中赋值 $v : \mathcal{A} \to 2$ 的角色类似谓词逻辑中的结构 $\mathfrak{A}$
- 一个布尔函数 $G = B^n_\alpha$ 对应与一个赋值集合 $\{v : \mathcal{A} \to 2 \mid \bar{v}(\alpha) = 1\}$

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$。令 Σ 是 $\mathcal{L}$ 闭语句集。我们称

$$\mathrm{Mod}\,\Sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ 是 } \mathcal{L} \text{ 结构且，} \mathfrak{A} \models \Sigma\}$$

是 Σ 所定义的 $\mathcal{L}$ 结构类 （所有 Σ 的模型组成的类）

若 $\Sigma = \{\tau\}$，我们记 $\{\tau\}$ 所定义的结构类为 $\mathrm{Mod}\,\tau$

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$,

- 我们称一个 $\mathcal{L}$ 结构类 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{L}$-初等类 （elementary class），当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句 τ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\tau$
- 我们称 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{L}$-广义初等类，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句集 Σ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$

广义初等类与初等类到底有何区别?

定义结构类

例

令语言 $\mathcal{L}$ 只含有等词。

- 语句 ε_2 : $\exists x \exists y (x \not\approx y)$ 定义的 $\mathcal{L}$-结构类是什么?
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 $\mathcal{L}$-初等类?
- 所有无穷集合组成的类是不是 $\mathcal{L}$-广义初等类? 是不是初等类?

定义结构类

例

考虑含有等词和一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$

- 令 $\tau_1 = \forall x Rxx$, $\tau_2 = \forall x \forall y \forall z (Rxy \to Ryz \to Rxz)$,
  $\mathrm{Mod}\{\tau_1, \tau_2\}$ 是什么?
- 给出定义偏序类、全序类的闭语句（集）
- 给出定义等价关系的闭语句（集）

定义结构类

例

考虑含有等词和一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$

- 令 $\tau_1 = \forall x Rxx$, $\tau_2 = \forall x \forall y \forall z (Rxy \to Ryz \to Rxz)$,

  $\mathrm{Mod}\{\tau_1, \tau_2\}$ 是什么?
- 给出定义偏序类、全序类的闭语句（集）
- 给出定义等价关系的闭语句（集）

定义结构类

例

群论语言 $\mathcal{L} = \{\approx, \circ, ^{-1}. e\}$，则下列闭语句

$$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x\ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x\ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了 群 这个初等类

阿贝尔群 是不是初等类？ 无扭的阿贝尔群 呢？

定义结构类

例

群论语言 $\mathcal{L} = \{\approx, \circ, {}^{-1}.e\}$，则下列闭语句

$$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x\ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x\ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了 群 这个初等类

阿贝尔群 是不是初等类？ 无扭的阿贝尔群 呢？

以上，我们给出了结构中 可定义 的严格定义，意味着我们可以证明形如 “XXX 是不可定义的” 的命题了。

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 谓词符号 P，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 谓词符号 P，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 函数符号 f，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 常数符号 c，有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

例

考虑有理数有序域 $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, 0^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, <^{\mathbb{Q}})$。定义函数 $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$：对任意 $q \in \mathbb{Q}$，令 $n_q = \min \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid q \cdot n \in \mathbb{Z}\}$，而 $i_q = q \cdot n_q$，$h(q) = (i_1, n_q)$。

定义 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ 上函数 $+^*$ 和 $\cdot^*$：

- $(i, n) +^* (j, m) = (im +^{\mathbb{Z}} jn, nm)$
- $(i, n) \cdot^* (j, m) = (ij, nm)$

定义 $(i, n) <^* (j, m)$，当且仅当 $im <^{\mathbb{Z}} jn$。则 h 是从 $\mathfrak{Q}$ 到 $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}), (0, 1), +^*, \cdot^*, <^*)$ 的同态

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢?

同态与同构

定义 (嵌入与同构)

令 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态

- 如果同态 h 是 单射 的，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 嵌入 （embedding）；
- 如果 h 是双射（既是单射，又是满射），我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同构 （isomorphism）。此时，我们称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构，记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$ （习题）
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$ （习题）
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$ （习题）
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$ （习题）
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$ （习题）
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定义

如果 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的一个同构，那么我们称 h 是 $\mathfrak{A}$ 上的 自同构 （automorphism）

推论

令 h 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个自同构，并且 $R \subset |\mathfrak{A}|^n$ 是一个 $\mathfrak{A}$ 中 可定义的 n 元关系，则对任意 $|\mathfrak{A}|$ 中元素 $a_1, \ldots, a_n$ 有，

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R$$

上述定理为我们提示了一种证明“不可定义”的方法。

例

还是考虑结构

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 $\{b\}$ 是不可定义的

下期预告

- 初等等价
- 一阶逻辑的可靠性定理

习题

- 5.1.2 - 5.1.6
- 5.2.2 - 5.2.4
- 5.3.1 （如果课上没讲），5.3.2, 5.3.4, 5.3.5