

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

- 循环替换引理
- 常数概括定理及其推论
- 约束变元替换定理

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P x_1 \dots x_n \rightarrow P y_1 \dots y_n)$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f x_1 \dots x_n \approx f y_1 \dots y_n)$$

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证明什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$$\vdash \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$, 只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
 - 如果 x 不在 Γ 中自由出现, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 如果 x 在 Γ 中自由出现, 我们找一个“全新”的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$, 从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$, 而 $\forall y\psi_y^x \vdash \forall x\psi$

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况:
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

例

- $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi)$
- $\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \exists x\psi)$

元定理的应用

以上策略可以应付几乎所有作业，是否能应付所有情况呢？
问题出在哪儿呢？

前束范式

前束范式

定义 (量词前束公式)

我们称具有

$$Q_1x_1 \dots Q_nx_n\alpha$$

形式 (其中 Q_i 是 \forall 或 \exists , 且 α 不含量词) 的公式为 **量词前束公式**

前束范式

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α' , 使得

$$\alpha \vdash \alpha'$$

前束范式

用到的元定理

$$Q1a \quad \neg \forall x \alpha \vdash \exists x \neg \alpha$$

$$Q1b \quad \neg \exists x \alpha \vdash \forall x \neg \alpha$$

$$Q2a \quad (\alpha \rightarrow \forall x \beta) \vdash \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{如果 } x \text{ 不在 } \alpha \text{ 中自由出现}$$

$$Q2b \quad (\alpha \rightarrow \exists x \beta) \vdash \exists x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{如果 } x \text{ 不在 } \alpha \text{ 中自由出现}$$

$$Q3a \quad (\forall x \alpha \rightarrow \beta) \vdash \exists x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{如果 } x \text{ 不在 } \beta \text{ 中自由出现}$$

$$Q3b \quad (\exists x \alpha \rightarrow \beta) \vdash \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{如果 } x \text{ 不在 } \beta \text{ 中自由出现}$$

前束范式

证明.

对公式 α 归纳证明:

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$
- 若 $\alpha = \forall x\beta$

一阶逻辑语言的语义

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$

回顾命题逻辑的语义

命题逻辑的语义：

- 命题符号的语义由真值指派给出： $v : \mathcal{A} \rightarrow 2$
- 命题（公式）的语义 $\bar{v} : \mathcal{F} \rightarrow 2$ 取决于命题符号的语义、命题联词（逻辑符号）的语义及其自身构造
- 而命题联词的语义体现于 $v \rightarrow \bar{v}$ 的扩张，不依赖于特定的语义解释 v

一阶逻辑的语义

具有固定语义解释的符号（逻辑符号）：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号（参数符号）：

- 常数符号
- 谓词符号（不包括等词）
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑的语义

需要特殊处理的符号

- 变元
 - 约束出现的变元
 - 自由出现的变元

一阶逻辑的语义

对参数符号的解释——结构

定义 (结构)

\mathcal{L} 是一阶语言, 一个 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 是一个以 \mathcal{L} 中 **参数符号** 集为定义域的函数并满足:

- $\mathfrak{A}(\forall)$ 是一个 **非空** 集合, 记 $|\mathfrak{A}|$, 称作 \mathfrak{A} 的 **论域**
- 对 n 元谓词符号 P , $\mathfrak{A}(P)$ 记作 $P^{\mathfrak{A}}$, $P^{\mathfrak{A}} \subset |\mathfrak{A}|^n$
- 对 n 元函数符号 f , $\mathfrak{A}(f)$ 记作 $f^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \rightarrow |\mathfrak{A}|$
- 对常数符号 c , $\mathfrak{A}(c)$ 记作 $c^{\mathfrak{A}}$, $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$

一阶逻辑的语义

约定

考虑语言 $\mathcal{L} = \{P_1, \dots, P_n, f_1, \dots, f_m, c_1, \dots, c_k\}$ 。我们常把一个 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 记作 $(|\mathfrak{A}|, P_1^{\mathfrak{A}}, \dots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \dots, f_m^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_k^{\mathfrak{A}})$

一阶逻辑的语义

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$, R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 \mathfrak{A} 是一个 \mathcal{L} -结构, 且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$, $R^{\mathfrak{A}}$ 是 \mathbb{N} 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$, 那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢?

一阶逻辑的语义

对变元的解释——赋值

定义 (赋值)

给定语言 \mathcal{L} 以及 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 。我们称 s 是一个 \mathfrak{A} -赋值，当且仅当 s 是从所有变元的集合 \mathcal{V} 到 $|\mathfrak{A}|$ 的函数 $s : \mathcal{V} \rightarrow |\mathfrak{A}|$

一阶逻辑的语义

对项的解释

定义 (项的赋值)

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 。令 s 是一个 \mathfrak{A} -赋值, 我们递归定义对项的解释 $\bar{s} : \mathcal{T} \rightarrow |\mathfrak{A}|$ 如下:

- 对每个变元符号 x , $\bar{s}(x) = s(x)$;
- 对每个常数符号 c , $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
- 如果 t_1, \dots, t_n 是项, f 是一个 n 元函数符号, 则

$$\bar{s}(f t_1 \dots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$$

一阶逻辑的语义

对公式的解释

定义 (满足关系)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 是一个 \mathcal{L} -结构, s 是一个 \mathfrak{A} -赋值, α 是一个 \mathcal{L} 公式, 我们对 α 递归定义 \mathfrak{A} 和 s 满足 α (记 $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha$) 如下

- α 是原子公式

- $(\mathfrak{A}, s) \models t_1 \approx t_2$, 当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$

- $(\mathfrak{A}, s) \models Pt_1 \dots t_n$, 当且仅当 $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$, 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \rightarrow \gamma$, 当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$, 当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$, 有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \beta$

其中 s_d^x 是通过对 s 改造得到的 \mathfrak{A} -赋值:

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

例

令语言 $\mathcal{L} = \{\leq\}$, 令 \mathcal{L} -结构 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$ 。其中, $\leq^{\mathbb{N}}$ 是自然数上通常的小于等于关系。考虑

$$(\mathfrak{N}, s) \models \forall v_1 v_0 \leq v_1$$

其中, $s(v_0) = 0$, $s(v_1) = 2$

一阶逻辑的语义

引理 (合同引理)

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 。任给 \mathfrak{A} -赋值 s_1, s_2 。如果它们关于在公式 φ 中 **自由出现** 的变元的赋值相同, 那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi$

证明.

- 对项 t 归纳证明: $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$
- 对公式 φ 归纳证明引理

一阶逻辑的语义

约定

- 我们用 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 x_1, \dots, x_n
- 对 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, 我们用 $\mathfrak{A} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$, 其中 $s(x_i) = d_i$ ($1 \leq i \leq n$)

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 。给定语言对任何闭语句 σ ，或者

(1) 对所有 \mathfrak{A} -赋值 s 都有, $(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$; 或者

(2) 对所有 \mathfrak{A} -赋值 s 都有, $(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 \mathcal{L} 、 \mathcal{L} -结构、 \mathcal{L} 中闭语句 σ 。我们称 σ 在 \mathfrak{A} 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$ ，当且仅当 (1) 成立

一阶逻辑的语义

定义 (语义蕴含)

给定语言 \mathcal{L} 。称公式集 Γ 逻辑蕴含 φ , 记 $\Gamma \models \varphi$, 当且仅当对任意 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 和任意 \mathfrak{A} -赋值 s 都有: 如果 \mathfrak{A} 和 s 满足 Γ 中所有公式 (记 $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$), 那么 $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

约定

- 以后 \models 依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- $\alpha \models \beta$ 即 $\{\alpha\} \models \beta$; $\alpha \models \beta$ (逻辑等效)
- $\models \alpha$ 即 $\emptyset \models \alpha$ (逻辑有效)

习题

- 证明 (Eq3) - (Eq5) 是一阶逻辑公理系统中可证的
- 4.4.1, 4.4.2
- 5.1.8 - 5.1.12

下期预告

- 在结构内定义结构上的关系、函数以及结构论域中的对象
- 定义结构类