数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

- 循环替换引理
- 常数概括定理及其推论
- 约束变元替换定理

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to P x_1 \ldots x_n \to P y_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to f x_1 \ldots x_n \approx f y_1 \ldots y_n)$

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x \psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 Γ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi^x_y$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y \psi^x_y$，而 $\forall y \psi^x_y \vdash\dashv \forall x \psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x \psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 Γ 中自由出现，我们找一个"全新"的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi^x_y$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y \psi^x_y$，而 $\forall y \psi^x_y \vdash\dashv \forall x \psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x \psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 Γ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi^x_y$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y \psi^x_y$，而 $\forall y \psi^x_y \vdash\dashv \forall x \psi$

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

例

- $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$
- $\forall x\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg(\varphi \to \exists x\psi)$

元定理的应用

以上策略可以应付几乎所有作业，是否能应付所有情况呢?
问题出在哪儿呢?

前束范式

前束范式

定义 (量词前束公式)

我们称具有

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \alpha$$

形式（其中 Q_i 是 $\forall$ 或 $\exists$，且 α 不含量词）的公式为 **量词前束公式**

前束范式

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α'，使得

$$\alpha \vdash\dashv \alpha'$$

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \vdash\dashv \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \vdash\dashv \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

证明.

对公式 α 归纳证明:

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$
- 若 $\alpha = \forall x\beta$

一阶逻辑语言的语义

$$\forall x \forall y\big(x < y \rightarrow \exists z(x < z \land z < y)\big)$$

回顾命题逻辑的语义

命题逻辑的语义:

- 命题符号的语义由真值指派给出: $v : \mathcal{A} \to 2$
- 命题(公式)的语义 $\bar{v} : \mathcal{F} \to 2$ 取决于命题符号的语义、命题联词(逻辑符号)的语义及其自身构造
- 而命题联词的语义体现于 $v \to \bar{v}$ 的扩张,不依赖于特定的语义解释 v

一阶逻辑的语义

具有固定语义解释的符号 （逻辑符号）：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号 （参数符号）：

- 常数符号
- 谓词符号（不包括等词）
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑的语义

需要特殊处理的符号

- 变元
  - 约束出现的变元
  - 自由出现的变元

一阶逻辑的语义

对参数符号的解释——结构

定义 (结构)

$\mathcal{L}$ 是一阶语言，一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 是一个以 $\mathcal{L}$ 中 参数符号 集为定义域的函数并满足：

- $\mathfrak{A}(\forall)$ 是一个 非空 集合，记 $|\mathfrak{A}|$ ，称作 $\mathfrak{A}$ 的 论域
- 对 n 元谓词符号 P，$\mathfrak{A}(P)$ 记作 $P^{\mathfrak{A}}$ ，$P^{\mathfrak{A}} \subset |\mathfrak{A}|^n$
- 对 n 元函数符号 f，$\mathfrak{A}(f)$ 记作 $f^{\mathfrak{A}}$ ，$f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$
- 对常数符号 c，$\mathfrak{A}(c)$ 记作 $c^{\mathfrak{A}}$ ，$c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$

一阶逻辑的语义

约定

考虑语言 $\mathcal{L} = \{P_1, \ldots, P_n, f_1, \ldots, f_m, c_1, \ldots, c_k\}$。我们常把一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 记作 $(|\mathfrak{A}|, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_m^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}})$

一阶逻辑的语义

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢?

例

给定语言 $\mathcal{L}=\{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}|=\mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}|=\{0,1,2,3,4,5\}$ 呢?

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢?

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢?

一阶逻辑的语义

对变元的解释——赋值

定义 (赋值)

给定语言 $\mathcal{L}$ 以及 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。我们称 s 是一个 $\mathfrak{A}$-赋值，当且仅当 s 是从所有变元的集合 $\mathcal{V}$ 到 $|\mathfrak{A}|$ 的函数 $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$

对项的解释

定义 (项的赋值)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。令 s 是一个 $\mathfrak{A}$-赋值，我们递归定义对项的解释 $\bar{s}: \mathcal{T} \to |\mathfrak{A}|$ 如下：

- 对每个变元符号 x， $\bar{s}(x) = s(x)$；
- 对每个常数符号 c， $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
- 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项，f 是一个 n 元函数符号，则 $\bar{s}(ft_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$

定义 (满足关系)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，s 是一个 $\mathfrak{A}$-赋值，α 是一个 $\mathcal{L}$ 公式，我们对 α 递归定义 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 α （记 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha$ ）如下

- α 是原子公式
  - $(\mathfrak{A}, s) \vDash t_1 \approx t_2$ ，当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$
  - $(\mathfrak{A}, s) \vDash Pt_1 \dots t_n$ ，当且仅当 $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$ ，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \rightarrow \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$ ，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \beta$

其中 s_d^x 是通过对 s 改造得到的 $\mathfrak{A}$-赋值：

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \neg\beta$ ，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \beta \to \gamma$ ，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\beta$ ，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s^x_d) \vDash \beta$

  其中 s^x_d 是通过对 s 改造得到的 $\mathfrak{A}$-赋值：

$$s^x_d(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

例

令语言 $\mathcal{L} = \{\leq\}$，令 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$。其中，$\leq^{\mathbb{N}}$ 是自然数上通常的小于等于关系。考虑

$$(\mathfrak{N}, s) \models \forall v_1 \; v_0 \leq v_1$$

其中，$s(v_0) = 0$，$s(v_1) = 5$

一阶逻辑的语义

例

令语言 $\mathcal{L} = \{\leq\}$，令 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$。其中，$\leq^{\mathbb{N}}$ 是自然数上通常的小于等于关系。考虑

$$(\mathfrak{N}, s) \vDash \forall v_1 \; v_0 \leq v_1$$

其中，$s(v_0) = 0$，$s(v_1) = 2$

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$-赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中 自由出现 的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi$

证明.

- 对项 t 归纳证明：$\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$
- 对公式 φ 归纳证明引理

一阶逻辑的语义

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$-赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中 自由出现 的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \vDash \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \vDash \varphi$

证明.

- 对项 t 归纳证明：$\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$
- 对公式 φ 归纳证明引理

一阶逻辑的语义

约定

- 我们用 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1, \ldots, x_n$
- 对 $\varphi(x_1, \ldots x_n)$，我们用 $\mathfrak{A} \vDash \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$，其中 $s(x_i) = d_i \quad (1 \leq i \leq n)$

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathcal{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$，当且仅当 (1) 成立

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathcal{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$，当且仅当 (1) 成立

一阶逻辑的语义

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含 φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$ ，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和任意 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有：如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式（记 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Gamma$ ），那么 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$； $\alpha \vDash\Dashv \beta$ （ 逻辑等效 ）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$ （ 逻辑有效 ）

一阶逻辑的语义

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含 φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$ ，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和任意 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有：如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式（记 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Gamma$ ），那么 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$；$\alpha \vDash\dashv \beta$ （ 逻辑等效 ）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$ （ 逻辑有效 ）

习题

- 证明 (Eq3) - (Eq5) 是一阶逻辑公理系统中可证的
- 4.4.1, 4.4.2
- 5.1.8 - 5.1.12

下期预告

- 在结构内定义结构上的关系、函数以及结构论域中的对象
- 定义结构类