

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 命题逻辑紧致性定理及其应用
- 一阶谓词逻辑的语言
 - 符号
 - 项与合式公式
 - 自由出现与约束出现, 对自由出现的代入

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义 (全称概括)

称公式 φ 是公式 ψ 的 **全称概括**，当且仅当存在自然数 n 和变元 x_1, \dots, x_n 使得

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$$

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义 (素公式)

我们称原子公式或形如 $\forall x\beta$ 的公式为 **素公式**

令 $\langle \beta_1, \beta_2, \dots \rangle$ 是对所有素公式的**枚举**。我们定义一个一阶逻辑公式 α 的命题逻辑公式对应 α^P :

■ 当 $\alpha = \beta_i$ 是一个素公式: $\alpha^P = \beta_i^P = A_i$

■ 当 $\alpha = \neg\beta$: $\alpha^P = \neg\beta^P$

■ 当 $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$: $\alpha^P = \beta^P \rightarrow \gamma^P$

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中变元 x 不在 α 中自由出现

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

若语言中含有等词，则还有

5 $x \approx x$

6 $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$ ，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

并非无冲突替代的例子

令 $\alpha = \exists yx \neq y$ 。分别考虑

- $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_z^x$

- $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_y^x$

如果我们希望定义 项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x 为“替换后 t 中的变元不会被 α 中已有的量词抓住”，我们该怎样严格地给出定义？

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义 (无冲突替换)

给定项 t 和变元 x , 对公式 φ 递归定义关系 t 可以在 φ 中无冲突地替换 x , 暂时记作 $\mathcal{R}(\varphi, t, x)$

- 若 φ 是原子公式, 总有 $\mathcal{R}(\varphi, t, x)$
- 若 $\varphi = \neg\psi$, $\mathcal{R}(\varphi, t, x)$ 当且仅当 $\mathcal{R}(\psi, t, x)$
- 若 $\varphi = \psi \rightarrow \gamma$, $\mathcal{R}(\varphi, t, x)$ 当且仅当 $\mathcal{R}(\psi, t, x)$ 且 $\mathcal{R}(\gamma, t, x)$
- 若 $\varphi = \forall y\psi$, 则 $\mathcal{R}(\varphi, t, x)$ 当且仅当
 - x 不在 φ 中自由出现, 或者
 - y 不在 t 中出现且 $\mathcal{R}(\psi, t, x)$

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

令 Λ 表示所有一阶逻辑公理组成的集合

关键：“任给一个表达式 ε , 是否有 $\varepsilon \in \Lambda$ ” 是 能行可判定的

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义 ((一阶逻辑的) 推演 / 证明 / 演绎)

从公式集 Γ 到公式 φ 的一个推演 (或证明或演绎) 是一个有穷的公式序列 $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, 满足 $\alpha_n = \varphi$ 并且对所有 $i \leq n$ 或者

(a) α_i 属于 $\Gamma \cup \Lambda$; 或者

(b) 存在 $j, k < i$, 使得 $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$

$\Gamma \vdash \varphi$ 即存在一个从 Γ 到 φ 的推演; $\vdash \varphi$ 即 $\emptyset \vdash \varphi$

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (概括定理)

如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 并且 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现, 那么

$$\Gamma \vdash \forall x\varphi$$

证明.

对见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 的证明序列归纳

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (重言规则 (rule T))

如果 $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$ 并且 $(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$ 是重言式, 那么

$$\Gamma \vdash \beta$$

证明.

$(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$ 是重言式, 则 $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$ 是公理。运用 n 次分离规则。

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$, 当且仅当 $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$

证明.

与命题逻辑相同

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

推论 (逆否命题)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ 当且仅当 $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$

证明.

由演绎定理和有关重言式

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是 **不一致的**，当且仅当存在公式 β ， $\Sigma \vdash \beta$ 且 $\Sigma \vdash \neg\beta$ （也即对任意公式 α 有， $\Sigma \vdash \alpha$ ）

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

证明.

运用演绎定理

“高一阶逻辑”的元定理

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$, 且常数符号 c 不在 Γ 中出现, 则存在不在 φ 中出现的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$ 且推演中不出现 c

证明.

假设 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$. 取 y 不在任何 α_i ($i \leq n$) 中出现. 对 $i \leq n$ 归纳证明 $\langle (\alpha_0)_y^c, \dots, (\alpha_i)_y^c \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash (\alpha_i)_y^c$. 利用概况引理的技巧, 将其改造为见证 $\Gamma \vdash \forall y (\alpha_i)_y^c$ 的推演序列

习题

- 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3*
- 4.2.1, 4.2.3 (1)

下期预告

- 更多关于一阶逻辑希尔伯特公理系统的元定理