数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 命题逻辑紧致性定理及其应用
- 一阶谓词逻辑的语言
  - 符号
  - 项与合式公式
  - 自由出现与约束出现，对自由出现的代入

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义 (全称概括)

称公式 φ 是公式 ψ 的 全称概括 ， 当且仅当存在自然数 n 和变元 $x_1, \ldots, x_n$ 使得

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$$

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义 (素公式)

我们称原子公式或形如 $\forall x\beta$ 的公式为 素公式

令 $\langle\beta_1,\beta_2,\ldots\rangle$ 是对所有素公式的枚举。我们定义一个一阶逻辑公式 α 的命题逻辑公式对应 α^P ：

- 当 $\alpha=\beta_i$ 是一个素公式： $\alpha^P=\beta_i^P=A_i$
- 当 $\alpha=\neg\beta$： $\alpha^P=\neg\beta^P$
- 当 $\alpha=\beta\to\gamma$： $\alpha^P=\beta^P\to\gamma^P$

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理 是由下列公式的全称概括组成的

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中变元 x 不在 α 中自由出现

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理 是由下列公式的全称概括组成的

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中变元 x 不在 α 中自由出现

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理 是由下列公式的全称概括组成的

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中变元 x 不在 α 中自由出现

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理 是由下列公式的全称概括组成的

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中变元 x 不在 α 中自由出现

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理 是由下列公式的全称概括组成的

若语言中含有等词，则还有

5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

并非无冲突替代的例子

令 $\alpha = \exists y x \not\approx y$。分别考虑

- $\forall x\alpha \to \alpha_z^x$
- $\forall x\alpha \to \alpha_y^x$

如果我们希望定义 项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x 为 "替换后 t 中的变元不会被 α 中已有的量词抓住"，我们该怎样严格地给出定义？

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义 (无冲突替换)

给定项 t 和变元 x，对公式 φ 递归定义关系 t 可以在 φ 中无冲突地替换 x，暂时记作 $\mathcal{R}(\varphi, t, x)$

- 若 φ 是原子公式，总有 $\mathcal{R}(\varphi, t, x)$
- 若 $\varphi = \neg\psi$，$\mathcal{R}(\varphi, t, x)$ 当且仅当 $\mathcal{R}(\psi, t, x)$
- 若 $\varphi = \psi \to \gamma$，$\mathcal{R}(\varphi, t, x)$ 当且仅当 $\mathcal{R}(\psi, t, x)$ 且 $\mathcal{R}(\gamma, t, x)$
- 若 $\varphi = \forall y\psi$，则 $\mathcal{R}(\varphi, t, x)$ 当且仅当
  - x 不在 φ 中自由出现，或者
  - y 不在 t 中出现且 $\mathcal{R}(\psi, t, x)$

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

令 Λ 表示所有一阶逻辑公理组成的集合

关键:“任给一个表达式 ε，是否有 $\varepsilon \in \Lambda$” 是 能行可判定的

一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义（（一阶逻辑的）推演 / 证明 / 演绎）

从公式集 Γ 到公式 φ 的一个 推演 （或 证明 或 演绎 ）是一个有穷的公式序列 $\langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$，满足 $\alpha_n = \varphi$ 并且对所有 $i \leq n$ 或者

(a) α_i 属于 $\Gamma \cup \Lambda$；或者

(b) 存在 $j, k < i$，使得 $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$

$\Gamma \vdash \varphi$ 即存在一个从 Γ 到 φ 的推演； $\vdash \varphi$ 即 $\emptyset \vdash \varphi$

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (概括定理)

如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 并且 x 不在 Γ 的任何公式中自由出现，那么

$$\Gamma \vdash \forall x \varphi$$

证明.

对见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 的证明序列归纳

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (重言规则（rule T）)

如果 $\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$ 并且 $(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta)^P$ 是重言式，那么

$$\Gamma \vdash \beta$$

证明.

$(\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta)^P$ 是重言式，则 $\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta$ 是公理。运用 n 次分离规则。

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (演绎定理)

$$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi\text{，当且仅当 } \Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$$

证明.

与命题逻辑相同

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

推论 (逆否命题)

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ 当且仅当 } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$$

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \text{ 当且仅当 } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$

证明.

由演绎定理和有关重言式

一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定义 (不一致)

我们称公式集 Σ 是 不一致的 ，当且仅当存在公式 β，
$\Sigma \vdash \beta$ 且 $\Sigma \vdash \neg\beta$ （也即对任意公式 α 有，$\Sigma \vdash \alpha$）

推论 (反证法)

如果 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 不一致，那么 $\Gamma \vdash \neg\varphi$

证明.

运用演绎定理

“更一阶逻辑”的元定理

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$ 且推演中不出现 c

证明.

假设 $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。取 y 不在任何 α_i （$i \leq n$） 中出现。对 $i \leq n$ 归纳证明 $\langle (\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_i)^c_y \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash (\alpha_i)^c_y$。利用概况引理的技巧，将其改造为见证 $\Gamma \vdash \forall y (\alpha_i)^c_y$ 的推演序列

习题

- 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3*
- 4.2.1, 4.2.3 (1)

下期预告

- 更多关于一阶逻辑希尔伯特公理系统的元定理