数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 命题逻辑的完全性的证明
- 命题逻辑完全性弱形式的构造性证明

命题逻辑的紧致性定理

定理 (紧致性定理)

公式集 Σ 是可满足的，当且仅当 Σ 的每个有穷子集是可满足的

证明.

直接证明

命题逻辑的紧致性定理

(不经过完全性定理）直接证明紧致性定理：

引理

给定公式集 Σ 和公式 α。如果公式集 Σ 是有穷可满足的，那么 $\Sigma \cup \{\alpha\}$ 或 $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ 是有穷可满足的。

- 给定公式的枚举 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。构造“极大有穷可满足”集。

紧致性定理的应用

定义

- 称二元组 (G, E) 是一个（无向）图（graph），当且仅当 G 是一个节点（vertice）集合，$E \subseteq G^2$ 是节点间的连线关系，E 是对称的，反自返的。
- 称 (G_0, E_0) 是 (V, E) 的子图，当且仅当 $G_0 \subseteq G$ 且 $E_0 = E \cap G_0^2$

紧致性定理的应用

定理 (四色定理)

任何（可能无穷的）平面（Kuratowski's theorem）无向图可以被四种颜色染色使得相连节点被染不同的颜色

紧致性定理推论

如果一个图（可能是可数无穷的）的每个有穷子图都能用四种颜色染色且不会造成相邻节点染成同一种颜色，那么这整个图都能用四种颜色染色

因此，四色定理的“有穷”版本蕴含完整版本

紧致性定理的应用

证明.

不妨设 $G = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$，$E \subset G^2$，$(G, E)$ 是一个图。令命题符号集合

$$\mathcal{A} = \{A_i^c \mid i \in G, c \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

令 Σ 包含下列公式

1. $A_i^1 \vee A_i^2 \vee A_i^3 \vee A_i^4$ $\quad (i \in G)$
2. $A_i^c \rightarrow \neg A_i^d$ $\quad (i \in G$ 且 $c \neq d)$
3. $\neg(A_i^c \wedge A_j^c)$ $\quad$ (若 iEj)

一阶谓词逻辑

不是命题逻辑的逻辑

- If there is one ring to rule them all, then everyone is ruled by a ring
- If everyone is ruled by a ring, then there is one ring rules everyone

$$\exists x \forall y\, Rxy \rightarrow \forall y \exists x\, Rxy$$

$$\forall y \exists x\, Rxy \rightarrow \exists x \forall y\, Rxy$$

一阶逻辑的语言

符号:

- 逻辑符号
  - 括号: (,)
  - 命题联词: $\neg, \rightarrow$
  - 量词: $\forall$
  - 变元: $v_1, v_2, \ldots$

一阶逻辑的语言

符号:

- 非逻辑符号（参数符号）
  - 常数符号: $c_1, c_2, \ldots$ $(*)$
  - 函数符号: $f_1, f_2, \ldots$ $(*)$
  - 谓词符号: $P_1, P_2, \ldots$ $(*)$
  - 等词: $\approx$ （可有可无）
- $(*)$ 可以没有，也可以有无穷多
- 存在能行的函数 $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ 告诉我们每个 f_i 是 $g(i)$-元函数符号，每个 P_i 是 $h(i)$-元谓词符号

一阶逻辑的语言

各种一阶逻辑语言

- 集合论语言: $\{\approx, \in\}$
- 初等数论的语言: $\{\approx, 0, <, S, +, \cdot\}$
- 序关系的语言: $\{\approx, R\}$

我们说“给定一个一阶逻辑语言”就是规定各类参数符号的集合。

一阶逻辑的语言

项（term）

给定一个一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，定义 $\mathcal{L}$ 中的 项 为:

- 每个变元 v_i 是项

  令 $\mathcal{V}$ 是所有变元组成的集合

- 每个 $\mathcal{L}$ 中的常数符号是项

- 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项并且 f 是 $\mathcal{L}$ 中 n 元函数符号，那么 $ft_1 \ldots t_n$ 也是项

令 $\mathcal{T}$ 是所有项组成的集合

一阶逻辑的语言

例:

初等数论语言 $\{\approx, 0, <, S, +, \cdot\}$ 中的项

- v_3
- $S0$
- $+Sv_1SS0$ ，常记作 $Sv_1 + SS0$

一阶逻辑的语言

合式公式（well-formed formula）

给定一个一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，定义 $\mathcal{L}$ 的 合式公式 （$\mathcal{F}$）如下：

- 如果 t_1, t_2 是项，那么 $t_1 \approx t_2$ 是公式（若 $\mathcal{L}$ 中有等词）
- 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项且 P 是一个 n 元谓词符号，那么 $Pt_1 \ldots t_n$ 是公式

  称上述公式是 原子公式
- 如果 α, β 是合式公式，那么 $(\neg\alpha), (\alpha \rightarrow \beta)$ 也是
- 如果 α 是合式公式，x 是变元，那么 $\forall x\alpha$ 也是

一阶逻辑的语言

注意:

- 这是一个递归的定义。你能写出合式公式集 $\mathcal{F}$ "自上而下的定义"和"自下而上的定义"吗?
- $t_1, t_2, \ldots$、$\alpha, \beta, \ldots$、$x, y, \ldots$ 是元语言中的符号

一阶逻辑的语言

缩写规定:

- $\alpha \vee \beta =_{\text{abbr}} \neg\alpha \to \beta$
- $\alpha \wedge \beta =_{\text{abbr}} \neg(\alpha \to \neg\beta)$
- $\alpha \leftrightarrow \beta =_{\text{abbr}} (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
- $\exists x\alpha =_{\text{abbr}} \neg\forall x\neg\alpha$

我们习惯称 $\forall x$ 为 全称量词，称 $\exists x$ 为 存在量词

自由出现与约束出现

例

给定 $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$$b = \sum_{j=0}^{k} a_j$$

自由出现与约束出现

对公式 α 递归定义 x 在 α 中自由出现 ：

- 当 α 是原子公式： x 在 α 中出现
- 当 $\alpha = \neg\beta$： x 在 β 中自由出现
- 当 $\alpha = \beta \to \gamma$： x 在 β 或 γ 中自由出现
- 当 $\alpha = \forall y\beta$： x 在 β 中自由出现且 $x \neq y$

x 在 $\forall x\alpha$ 中的出现称作 约束出现

自由出现与约束出现

我们称一个合式公式 α 是 语句 （sentence），当且仅当没有变元在 α 中自由出现

代入

我们定义元语言中的一个表达方式 α_t^x

首先对项 u 递归定义 u_t^x

- 当 $u = y$：

$$u_t^x = \begin{cases} t & \text{若 } x = y \\ y & \text{否则} \end{cases}$$

- 当 $u = ft_1 \ldots t_n$： $u_t^x = f(t_1)_t^x \ldots (t_n)_t^x$

代入

例

- $(v_1)^{v_1}_{fv_1v_2} = fv_1v_2$
- $(v_2)^{v_1}_{c} = v_2$
- $(fv_1gv_2)^{v_2}_{gc} = fv_1ggc$

代入

其次对公式 α 递归定义 α_t^x

- 当 $\alpha = t_1 \approx t_2$： $\alpha_t^x = (t_1)_t^x \approx (t_2)_t^x$
- 当 $\alpha = Pt_1 \ldots t_n$： $\alpha_t^x = P(t_1)_t^x \ldots (t_n)_t^x$
- 当 $\alpha = \neg\beta$： $\alpha_t^x = (\neg\beta)_t^x = \neg\beta_t^x$
- 当 $\alpha = \beta \to \gamma$： $\alpha_t^x = (\beta \to \gamma)_t^x = \beta_t^x \to \gamma_t^x$
- 当 $\alpha = \forall y\beta$：

$$\alpha_t^x = (\forall y\beta)_t^x = \begin{cases} \alpha & \text{若 } x = y \\ \forall y\beta_t^x & \text{否则} \end{cases}$$

代入

例

- $(Pv_1fv_2 \rightarrow \exists v_2 Pv_1v_2)_c^{v_1}$
- $(Pv_1fv_2 \rightarrow \exists v_2 Pv_1v_2)_c^{v_2}$
- $((Pv_1fv_2 \rightarrow \exists v_2 Pv_1v_2)_{v_2}^{v_1})_{v_1}^{v_2}$

习题

- 分别写出一阶谓词逻辑 合式公式 自上而下与自下而上的定义
- 定义递归函数 $F : \mathcal{F} \times \mathcal{V} \to P(\mathbb{N})$ 使得 $F(\alpha, x) = \{i_1, \ldots, i_k\}$ 当且仅当 x 在 α 中第 $i_1, \ldots, i_k$ 个出现是自由的出现
- 陈述并证明初等数论一阶逻辑语言 $\{\approx, 0, <, S, +, \cdot\}$ 的唯一可读性
- 3.1.1, 3.1.4, 3.2.1, 3.2.2 （对每个 3.2.1 中公式）

下期预告

- 一阶逻辑希尔伯特公理系统及其元定理