

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 命题逻辑公理系统的一些元定理
- 命题语言的语义
 - 真值指派
 - 真值表 (布尔函数)

命题联词

定理

对任意 n 元布尔函数 $G : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ($n \geq 1$), 都存在一个命题逻辑合式公式 α , 使得 $B_\alpha^n = G$

命题联词

定义

称一组联词（布尔函数） C 是 **功能完全的**，如果任意 n 元布尔函数（ $n \geq 1$ ）都可以由 C 中的布尔函数通过函数复合定义。

例：

- $\{B_{\neg}, B_{\wedge}, B_{\vee}\}$ ，由前述定理的证明（为什么？）
- $\{B_{\neg}, B_{\wedge}\}$ ，因为 $B_{\vee}(x, y) = B_{\neg}(B_{\wedge}(B_{\neg}(x), B_{\neg}(y)))$

...

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、或 B_{\vee}
- 寻找，例如 B_{\neg} 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例： $\{B_{\wedge}, B_{\rightarrow}\}$

命题逻辑的语义 (续)

定义

- 称一个真值指派 v 满足一个公式 α , 如果 $\bar{v}(\alpha) = 1$
- 称一个公式集 Σ 重言蕴含公式 τ ($\Sigma \models \tau$), 若每个满足 Σ 中所有公式的真值指派也满足 τ
- 称一个公式 τ 是重言式, 当且仅当 $\emptyset \models \tau$ (又记 $\models \tau$)
- 称公式 σ 和 τ 重言等价 ($\sigma \models \tau$), 当且仅当 $\{\sigma\} \models \tau$ (又记 $\sigma \models \tau$) 且 $\tau \models \sigma$

命题逻辑的语义 (续)

容易验证

- 公式 α (至多含 A_1, \dots, A_n) 是重言式, 当且仅当 B_α^n 是值为 1 的常函数
- 公式 σ 和 τ (至多含 A_1, \dots, A_n) 重言等价, 当且仅当

$$B_\sigma^n = B_\tau^n$$

命题逻辑希尔伯特系统的可靠性

命题逻辑的可靠性

定理 (可靠性 定理)

令 Σ 是一个公式集, τ 是一个公式。那么

$$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \models \tau$$

特别地, 若 $\vdash \tau$, 则 $\models \tau$

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$. 对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明: $\Sigma \vDash \beta_i$

情形 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情形 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义, 平凡

情形 3 若存在 $j, k < i$, $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑希尔伯特系统的完全性

命题逻辑的完全性

定理 (完全性定理)

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- **难点:** 对每组符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- **窍门:** 证明, $\Sigma \not\models \tau \Rightarrow \Sigma \not\vdash \tau$

命题逻辑的完全性

定义

称公式集 Σ 是 **不一致的** (inconsistent), 如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是 **一致的**, 当且仅当它不是不一致的

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是 **可满足的** (satisfiable), 当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是 **不可满足的**, 当且仅当它不是可满足的

注意: 可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

- (1) 如果 $\Sigma \models \tau$, 则 $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果 Σ 一致, 则 Σ 可满足

证明.

(1) \Rightarrow (2)

(2) \Rightarrow (1)

习题

- 2.3.10
- 2.5.3, 2.5.7*, 2.5.8*

下期预告

- 命题逻辑的完全性 (续)
- 命题逻辑的紧致性定理