数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 命题逻辑公理系统的一些元定理
- 命题语言的语义
    - 真值指派
    - 真值表（布尔函数）

定理

对任意 n 元布尔函数 $G:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$（$n \geq 1$），都存在一个命题逻辑合式公式 α，使得 $B_\alpha^n = G$

定义

称一组联词（布尔函数）C 是 功能完全的，如果任意 n 元布尔函数（$n \geq 1$）都可以由 C 中的布尔函数通过函数复合定义。

例:

- $\{B_\neg, B_\wedge, B_\vee\}$，由前述定理的证明（为什么?）
- $\{B_\neg, B_\wedge\}$，因为 $B_\vee(x, y) = B_\neg\big(B_\wedge(B_\neg(x), B_\neg(y))\big)$

$\ldots$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有 能复合出来的 函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_\wedge, B_\to\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有 能复合出来的 函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_\wedge, B_\to\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、或 $B_{\vee}$
- 寻找，例如 $B_{\neg}$ 的某个性质，证明所有 能复合出来的 函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_{\wedge}, B_{\rightarrow}\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、或 $B_{\vee}$
- 寻找，例如 $B_{\neg}$ 的某个性质，证明所有 能复合出来的 函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_{\wedge}, B_{\rightarrow}\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、或 $B_{\vee}$
- 寻找，例如 $B_{\neg}$ 的某个性质，证明所有 能复合出来的 函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_{\wedge}, B_{\rightarrow}\}$

命题逻辑的语义（续）

定义

- 称一个真值指派 v **满足** 一个公式 α，如果 $\bar{v}(\alpha) = 1$
- 称一个公式集 Σ **重言蕴含** 公式 τ（$\Sigma \vDash \tau$），若每个满足 Σ 中所有公式的真值指派也满足 τ
- 称一个公式 τ 是 **重言式**，当且仅当 $\emptyset \vDash \tau$（又记 $\vDash \tau$）
- 称公式 σ 和 τ **重言等价** （$\sigma \vDash\Dashv \tau$），当且仅当 $\{\sigma\} \vDash \tau$ （又记 $\sigma \vDash \tau$）且 $\tau \vDash \sigma$

命题逻辑的语义（续）

容易验证

- 公式 α（至多含 $A_1, \ldots, A_n$）是重言式，当且仅当 B_α^n 是值为 1 的常函数
- 公式 σ 和 τ（至多含 $A_1, \ldots, A_n$）重言等价，当且仅当

$$B_\sigma^n = B_\tau^n$$

命题逻辑希尔伯特系统的可靠性

命题逻辑的可靠性

定理（可靠性 定理）

令 Σ 是一个公式集，τ 是一个公式。那么

$$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \models \tau$$

特别地，若 $\vdash \tau$，则 $\models \tau$

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情形 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情形 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情形 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑希尔伯特系统的完全性

命题逻辑的完全性

定理（完全性 定理)

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点: 对每组符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- 窍门: 证明， $\Sigma \nvdash \tau \Rightarrow \Sigma \not\models \tau$

命题逻辑的完全性

定义

称公式集 Σ 是 不一致的 （inconsistent），如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是 一致的 ， 当且仅当它不是不一致的

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是 可满足的 （satisfiable），当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是 不可满足的 ，当且仅当它不是可满足的

注意：可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

习题

- 2.3.10
- 2.5.3, 2.5.7*, 2.5.8*

下期预告

- 命题逻辑的完全性（续）
- 命题逻辑的紧致性定理