数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 枚举与集合大小
- 命题逻辑的语言
  - 符号
  - 合式公式的递归定义

前情提要

命题逻辑语言的符号

- 无穷可枚举多个 命题符号： $A_0, A_1, A_2, \ldots$

  定义 $\mathscr{A} = \{A_0, A_1, \ldots\}$

- 联词： $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$

- 辅助符号： $(,)$

  定义 $\mathcal{S} = \mathscr{A} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, (,), \}$

前情提要

命题逻辑语言合式公式的递归定义

- 自上而下

$\mathcal{F}^* = \bigcap \{X \mid X$ 包涵所有命题变元且在复合命题构造下封闭$\}$

- 自下而上
  - $F_0 = \{A_0, A_1, \ldots\}$
  - $F_{n+1} = F_n \cup \{(\neg\alpha) \mid \alpha \in F_n\}$
    $\cup \{(\alpha \star \beta) \mid \alpha, \beta \in F_n$ 且 $\star = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{F}_* = \bigcup_n F_n$

命题逻辑的语言

当我们要证明诸如“所有合式公式都有某性质”时，我们往往要运用：

定理 (关于命题逻辑合式公式的归纳原理)

令 P 是一个关于合适公式的性质。若下述 (1)、(2) 成立，则所有合适公式 α 都有 P 性质，记 $P(\alpha)$

(1) 对所有命题符号 A_i，$P(A_i)$

(2) 对所有合式公式 α, β，若 $P(\alpha)$ 且 $P(\beta)$，则 $P((\neg\alpha))$ 且 $P(\alpha \star \beta)$ (注：$\star$ 可以是 $\vee, \wedge, \rightarrow$ 或 $\leftrightarrow$)

命题逻辑的语言

关于命题逻辑合式公式的归纳原理（定理）来源于自然数上的归纳原理（$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$ 的证明)：

取自然数的性质 P' 为：$P'(n)$，当且仅当所有 F_n 中的公式 α 有 $P(\alpha)$，关于合式公式的归纳原理就成了自然数上的归纳原理的一个特例。

命题逻辑的语言

归纳原理的应用

定理

- 没有合式公式是以 ¬ 开头的。
- 每个合式公式中左右括号的数目相同。且每一合式公式非空 真前段 中左括号多于右括号。因此，合式公式的真前段一定不是合式公式。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

经典命题逻辑的希尔伯特系统

真即被证明

——数学直觉主义

什么是证明

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- 公式的简写α, β, γ 是元语言符号，指代任一合式公式因此，有无穷条公理。但我们能机械地判定一个表达式是不是公理（why?）

希尔伯特系统的推理规则

分离规则（*modus ponens*,MP）:

从 $\alpha, \alpha \to \beta$ 可以推出 β

为强调它是纯形式的规则，又称之为变形规则。

希尔伯特系统的证明

定义 (推演/证明/演绎（deduction）)

从公式集 Γ 到公式 φ 的一个 推演 （或 证明 或 演绎 ）是一个有穷的公式序列 $\langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$，满足 $\alpha_n = \varphi$，并且对所有 $i \leq n$，或者

(a) α_i 属于 $\Gamma \cup \Lambda$；或者

(b) 存在 $j, k < i$, 使得 $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$

希尔伯特系统的证明

定义

- 称 α 是 Γ 的一个 定理 或 内定理 （记 $\Gamma \vdash \alpha$ ），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$ ，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

事实

Σ、Γ 是公式集，α 是公式

- 如果 $\Gamma \subset \Sigma$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Sigma \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$
- 如果 $\Sigma \vdash \alpha$ 并且对任意 $\beta \in \Sigma$ 有 $\Gamma \vdash \beta$，那么 $\Gamma \vdash \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

证明.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

($\Leftarrow$)

($\Rightarrow$)

习题

- 2.2.5 (给出证明)、2.2.8 （构造序列定义见教材)、2.2.9
- (∗) 描述一个计算机程序：输入任何表达式，该程序能判断该表达式是否是合式公式（书中习题 2.4.1）以及是否是 (A1)、(A2) 或 (A3)
- 2.4.4*
- 2.6.2

下期预告

- 经典命题逻辑的希尔伯特系统的元定理（续）
- 命题逻辑的语义