数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- n 元有序组、n 维卡氏积，n 元关系
- 自然数上的归纳法
- 函数、序列

记法 (序列)

令 I 是一个（下标）集合，$s : I \to X$ 是一个函数，我们又称 s 是一个 序列 。对 $i \in I$，记 $s_i = s(i)$，记 $s = \langle s_i \ : \ i \in I \rangle$

例

- 素数序列

  $$p = \langle p_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle = \langle p_0, p_1, \ldots, \rangle = \langle 2, 3, 5, 7, \ldots \rangle$$

枚举与集合大小

约定

我们将集合 $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 记作 n

因此，对自然数 n, m 来说，$m \in n$ 当且仅当 $m < n$

枚举与集合大小

定义

如果下标集 $I \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$，$e : I \to X$ 是一个满射，我们称 e 是对集合 X 的一个 枚举 。

注意:

- 以自然数或自然数集为下标集的序列都是对它值域的一个枚举
- 枚举可以是有穷的，也可以是无穷的
- 一个集合可以有许多枚举

枚举与集合大小

例

- 空集 $\emptyset$ 是一个序列，也是一个对 $\emptyset$ 的枚举
- $\langle a, c, b\rangle$
- $\langle a, b, b, c\rangle$
- $\langle a, b, c, c, c, \ldots\rangle$
- $\angle 0, 2, \ldots, 2n, \ldots\rangle$

枚举与集合大小

事实

如果存在一个对集合 X 的枚举，那么就存在一个对 X 的一一的枚举

定义

- 我们称一个集合 X 是 可枚举的 / 可数的 ，当且仅当存在一个对 X 的枚举
- 我们称一个集合 X 是 有穷的，当且仅当存在自然数 n 以及对 X 的枚举 $e : n \to X$

枚举与集合大小

例

- $\mathbb{N}, \mathbb{N}^+$,
- $\{2n \bigm| n \in \mathbb{N}\}, \{2n+1 \bigm| n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{Z}$：考虑 $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$：Cantor's zig-zag method

枚举与集合大小

Cantor's zig-zag method

$$f(n,m) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

事实

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是双射（习题 *）

我们称这样的双射是一个 对函数 （pairing function）

枚举与集合大小

例 (对函数)

- $g(n,m) = 2^n(2m+1) - 1$
- $$h(n,m) = \begin{cases} m^2 + n - 1, & \text{if 若} n < m \\ n^2 + n + m, & \text{否则.} \end{cases}$$

枚举与集合大小

例 (不可数的集合)

- $2^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to 2\}$
- $P(\mathbb{N})$
- $\mathbb{R}$

康托尔对角线法

枚举与集合大小

定义

我们称集合 X 和集合 Y 等数，记 $|X| = |Y|$，当且仅当存在双射 $h : X \to Y$

事实

集合等数是一个等价关系

枚举与集合大小

定义

- 我们称 集合 X 不比集合 Y 大，记 $|X| \leq |Y|$，当且仅当存在单射 $f: X \to Y$
- 我们称 集合 X 比集合 Y 小，记 $|X| < |Y|$，当且仅当 $|X| \leq |Y|$ 且 $|X| \neq |Y|$。

枚举与集合大小

定理 (Cantor-Bernstein)

对任意集合 X, Y，若 $|X| \leq |Y|$ 且 $|Y| \leq |X|$，则 $|X| = |Y|$

事实

$|n| < |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

命题逻辑的语言

语言的基本构件：符号

- 无穷可枚举多个 命题符号 ： $A_0, A_1, A_2, \ldots$

  定义 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots\}$

- 联词 ： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- 辅助符号 ： $(,)$

  定义 $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \}$

注意: 符号是任意指定的数学对象，可以是自然数或集合，满足一些条件（以便不产生混淆），本身没有任何意义

命题逻辑的语言

定义 (表达式（expression）)

我们称由命题逻辑符号（即 $\mathcal{S}$ 中元素）组成的有穷长度的符号序列（即符号串）为命题逻辑语言的 表达式 。定义

$$\mathcal{E} = \{s \mid \text{存在 } n \in \mathbb{N} \text{ 使得 } s : n \to \mathcal{S}\}$$

即所有表达式组成的集合。

命题逻辑的语言

约定

我们用，例如，$(A_0 \vee A_1)$ 作为序列 $\langle (, A_0, \vee, A_1,) \rangle$ 的缩写。而 A_i 作为表达式是 $\langle A_i \rangle$ 的缩写。根据语境，当我们说“命题变元 A_i”时，我们可能指的是表达式 $\langle A_i \rangle$

例 (表达式)

- $(A_0 \vee A_1)$
- $(A_0 \vee$

注意: 不是所有表达式都能构成合乎语法规则的命题

命题逻辑的语言

定义 (合式公式（well-founded formula）)

- 每个命题符号 A_i 都是 合式公式
- 若 α, β 是合式公式，那么

  $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是 合式公式
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

约定

- 任给两个有穷序列 s, t，我们用 $s * t$ 表示它们的连接
- 我们用，如 $(\alpha \to \beta)$ 表示 $\langle (\rangle * \alpha * \langle \to \rangle * \beta * \langle) \rangle$

关于合式公式的定义

- 元语言与对象语言
- 上述定义是一种递归定义

命题逻辑的语言

递归定义

- 递归定义不是循环定义
  - 自上而下

    $\mathcal{F}^* = \bigcap \{X \mid X$ 包涵所有命题变元且在复合命题构造下封闭$\}$

  - 自下而上
    - $F_0 = \{A_0, A_1, \ldots\}$
    - $F_{n+1} = F_n \cup \{(\neg\alpha) \mid \alpha \in F_n\}$

      $\cup\{(\alpha \star \beta) \mid \alpha, \beta \in F_n$ 且 $\star = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow \}$
    - $\mathcal{F}_* = \bigcup_n F_n$

命题逻辑的语言

事实

$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$ （证明稍后）

记法

令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$

- 自下而上定义的好处在于展现了每个合式公式的构造过程
- 自上而下的定义告诉我们可以运用归纳原理

习题

- 令 $s : n \to \mathcal{A}$、$t : m \to \mathcal{A}$，尝试给出两个有穷序列的连接 $s * t$ 的定义
- 2.2.2

下期预告

- 命题逻辑的语言（续）