

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- n 元有序组、 n 维卡氏积, n 元关系
- 自然数上的归纳法
- 函数、序列

函数

记法 (序列)

令 I 是一个 (下标) 集合, $s : I \rightarrow X$ 是一个函数, 我们又称 s 是一个 **序列**。对 $i \in I$, 记 $s_i = s(i)$, 记 $s = \langle s_i : i \in I \rangle$

例

- 素数序列

$$p = \langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle = \langle p_0, p_1, \dots, \rangle = \langle 2, 3, 5, 7, \dots \rangle$$

枚举与集合大小

约定

我们将集合 $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 记作 n

因此, 对自然数 n, m 来说, $m \in n$ 当且仅当 $m < n$

枚举与集合大小

定义

如果下标集 $I \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$, $e: I \rightarrow X$ 是一个满射, 我们称 e 是对集合 X 的一个 **枚举**。

注意:

- 以自然数或自然数集为下标集的序列都是对它值域的一个枚举
- 枚举可以有穷的, 也可以是无穷的
- 一个集合可以有許多枚举

枚举与集合大小

例

- 空集 \emptyset 是一个序列，也是一个对 \emptyset 的枚举
- $\langle a, c, b \rangle$
- $\langle a, b, b, c \rangle$
- $\langle a, b, c, c, c, \dots \rangle$
- $\langle 0, 2, \dots, 2n, \dots \rangle$

枚举与集合大小

事实

如果存在一个对集合 X 的枚举，那么就存在一个对 X 的——的枚举

定义

- 我们称一个集合 X 是 **可枚举的** / **可数的**，当且仅当存在一个对 X 的枚举
- 我们称一个集合 X 是 **有穷的**，当且仅当存在自然数 n 以及对 X 的枚举 $e: n \rightarrow X$

枚举与集合大小

例

- \mathbb{N}, \mathbb{N}^+ ,
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- \mathbb{Z} : 考虑 $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Cantor's zig-zag method

枚举与集合大小

Cantor's zig-zag method

$$f(n, m) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

事实

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是双射 (习题 *)

我们称这样的双射是一个对函数 (pairing function)

枚举与集合大小

例 (对函数)

- $g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$



$$h(n, m) = \begin{cases} m^2 + n - 1, & \text{if 若 } n < m \\ n^2 + n + m, & \text{否则.} \end{cases}$$

枚举与集合大小

例 (不可数的集合)

- $2^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow 2\}$
- $P(\mathbb{N})$
- \mathbb{R}

康托尔对角线法

枚举与集合大小

定义

我们称集合 X 和集合 Y **等数**，记 $|X| = |Y|$ ，当且仅当存在双射 $h: X \rightarrow Y$

事实

集合等数是一个等价关系

枚举与集合大小

定义

- 我们称 **集合 X 不比集合 Y 大**，记 $|X| \leq |Y|$ ，当且仅当存在单射 $f: X \rightarrow Y$
- 我们称 **集合 X 比集合 Y 小**，记 $|X| < |Y|$ ，当且仅当 $|X| \leq |Y|$ 且 $|X| \neq |Y|$ 。

枚举与集合大小

定理 (Cantor-Bernstein)

对任意集合 X, Y , 若 $|X| \leq |Y|$ 且 $|Y| \leq |X|$, 则 $|X| = |Y|$

事实

$$|n| < |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

命题逻辑的语言

语言的基本构件：符号

- 无穷可枚举多个命题符号： A_0, A_1, A_2, \dots

定义 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots\}$

- 联词： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- 辅助符号： $(,)$

定义 $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$

注意：符号是任意指定的数学对象，可以是自然数或集合，满足一些条件（以便不产生混淆），本身没有任何意义

命题逻辑的语言

语言的基本构件：符号

- 无穷可枚举多个命题符号： A_0, A_1, A_2, \dots

定义 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots\}$

- 联词： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- 辅助符号： $(,)$

定义 $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$

注意：符号是任意指定的数学对象，可以是自然数或集合，满足一些条件（以便不产生混淆），本身没有任何意义

命题逻辑的语言

定义 (表达式 (expression))

我们称由命题逻辑符号 (即 S 中元素) 组成的有穷长度的符号序列 (即符号串) 为命题逻辑语言的 **表达式**。定义

$$\mathcal{E} = \{s \mid \text{存在 } n \in \mathbb{N} \text{ 使得 } s : n \rightarrow S\}$$

即所有表达式组成的集合。

命题逻辑的语言

约定

我们用, 例如, $(A_0 \vee A_1)$ 作为序列 $\langle (, A_0, \vee, A_1,) \rangle$ 的缩写。
而 A_i 作为表达式是 $\langle A_i \rangle$ 的缩写。根据语境, 当我们说“命题变元 A_i ”时, 我们可能指的是表达式 $\langle A_i \rangle$

例 (表达式)

- $(A_0 \vee A_1)$
- $(A_0 \vee$

注意: 不是所有表达式都能构成合乎语法规则的命题

命题逻辑的语言

定义 (合式公式 (well-founded formula))

- 每个命题符号 A_i 都是 **合式公式**
- 若 α, β 是合式公式, 那么
 $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是 **合式公式**
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

定义 (合式公式 (well-founded formula))

- 每个命题符号 A_i 都是 合式公式
- 若 α, β 是合式公式, 那么
 $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是 合式公式
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

定义 (合式公式 (well-founded formula))

- 每个命题符号 A_i 都是 合式公式
- 若 α, β 是合式公式, 那么
 $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是 合式公式
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

约定

- 任给两个有穷序列 s, t , 我们用 $s * t$ 表示它们的连接
- 我们用, 如 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 表示 $\langle () * \alpha * \langle \rightarrow \rangle * \beta * \langle () \rangle$

关于合式公式的定义

- 元语言与对象语言
- 上述定义是一种递归定义

命题逻辑的语言

递归定义

- 递归定义不是循环定义

- 自上而下

$$\mathcal{F}^* = \bigcap \{X \mid X \text{ 包涵所有命题变元且在复合命题构造下封闭}\}$$

- 自下而上

- $F_0 = \{A_0, A_1, \dots\}$

- $F_{n+1} = F_n \cup \{(\neg\alpha) \mid \alpha \in F_n\}$

$$\cup \{(\alpha \star \beta) \mid \alpha, \beta \in F_n \text{ 且 } \star = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

- $\mathcal{F}_* = \bigcup_n F_n$

命题逻辑的语言

事实

$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$ (证明稍后)

记法

令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$

- 自下而上定义的好处在于展现了每个合式公式的构造过程
- 自上而下的定义告诉我们可以运用归纳原理

习题

- 令 $s : n \rightarrow \mathcal{A}$ 、 $t : m \rightarrow \mathcal{A}$ ，尝试给出两个有穷序列的连接 $s * t$ 的定义
- 2.2.2

下期预告

- 命题逻辑的语言（续）