

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- n 元有序组、 n 维卡氏积, n 元关系
- 自然数上的归纳法
- 函数

函数

记法 (n 元函数)

- 考虑 $f : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ 。 f 是 $X_1 \times \cdots \times X_n \times Y$ 上的一个 $n + 1$ 元关系。我们将 $(x_1, \dots, x_n, y) \in f$ 记作 $f(x_1, \dots, x_n) = y$
- $f : X^n \rightarrow X$ 常被称作 X 上的 n 元运算

例

自然数上的乘法是一个从 \mathbb{N}^2 到 \mathbb{N} 的 2 元函数 / 运算

函数

关于关系的运算，如定义域、值域、像、逆像、限制、复合都可以继承至函数

定理

如果 f 和 g 是函数，那么 $g \circ f$ 也是函数。它的定义域 $\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\text{dom}(g)]$ 。并且，对所有 $x \in \text{dom}(g \circ f)$ 有 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

注意：函数的逆未必是函数。

函数

关于关系的运算，如定义域、值域、像、逆像、限制、复合都可以继承至函数

定理

如果 f 和 g 是函数，那么 $g \circ f$ 也是函数。它的定义域 $\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\text{dom}(g)]$ 。并且，对所有 $x \in \text{dom}(g \circ f)$ 有 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

注意：函数的逆未必是函数。

函数

事实

给定函数 $f: X \rightarrow Y$, A 是 X 的子集。则 $g = f \upharpoonright A$ 也是一个函数。

此时, 我们称 g 是 f 到 A 上的限制, 而 f 是 g 的一个扩展。

注意: 在关于函数的语境下, 我们一般要求一个函数的扩展也是一个函数

函数

事实

给定函数 $f: X \rightarrow Y$, A 是 X 的子集。则 $g = f \upharpoonright A$ 也是一个函数。

此时, 我们称 g 是 f 到 A 上的限制, 而 f 是 g 的一个扩展。

注意: 在关于函数的语境下, 我们一般要求一个函数的扩展也是一个函数

函数

定义

一些函数的性质

- 函数 $f: X \rightarrow Y$ 是 **一一的** 或 **单射**，如果对任意 $x_1, x_2 \in X$ 都有 $x_1 \neq x_2$ 蕴含 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 函数 $f: X \rightarrow Y$ 是 **满射**，如果 $\text{ran}(f) = Y$
- 函数 $f: X \rightarrow Y$ 是 **双射** 或 **一一对应**，如果它既是单射又是满射

函数

记法 (序列)

令 I 是一个 (下标) 集合, $s : I \rightarrow X$ 是一个函数, 我们又称 s 是一个 **序列**。对 $i \in I$, 记 $s_i = s(i)$, 记 $s = \langle s_i : i \in I \rangle$

例

- 素数序列

$$p = \langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle = \langle p_0, p_1, \dots, \rangle = \langle 2, 3, 5, 7, \dots \rangle$$

枚举与集合大小

约定

我们将集合 $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 记作 n

因此, 对自然数 n, m 来说, $m \in n$ 当且仅当 $m < n$

枚举与集合大小

定义

如果下标集 $I \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$, $e: I \rightarrow X$ 是一个满射, 我们称 e 是对集合 X 的一个 **枚举**。

注意:

- 以自然数或自然数集为下标集的序列都是对它值域的一个枚举
- 枚举可以有穷的, 也可以是无穷的
- 一个集合可以有許多枚举

枚举与集合大小

例

- 空集 \emptyset 是一个序列，也是一个对 \emptyset 的枚举
- $\langle a, b, b, c \rangle$
- $\langle a, c, b \rangle$
- $\langle a, b, c, c, c, \dots \rangle$

枚举与集合大小

事实

如果存在一个对集合 X 的枚举，那么就存在一个对 X 的——的枚举

定义

- 我们称一个集合 X 是可枚举的 / 可数的，当且仅当存在一个对 X 的枚举
- 我们称一个集合 X 是有穷的，当且仅当存在自然数 n 以及对 X 的枚举 $e : n \rightarrow X$

枚举与集合大小

事实

如果存在一个对集合 X 的枚举，那么就存在一个对 X 的——的枚举

定义

- 我们称一个集合 X 是 **可枚举的** / **可数的**，当且仅当存在一个对 X 的枚举
- 我们称一个集合 X 是 **有穷的**，当且仅当存在自然数 n 以及对 X 的枚举 $e : n \rightarrow X$

枚举与集合大小

例

- \mathbb{N}, \mathbb{N}^+ ,
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- \mathbb{Z} : 考虑 $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Cantor's zig-zag method

枚举与集合大小

Cantor's zig-zag method

$$f(n, m) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

事实

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是双射 (习题 *)

我们称这样的双射是一个对函数 (pairing function)

枚举与集合大小

例 (对函数)

- $g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$



$$h(n, m) = \begin{cases} m^2 + n - 1, & \text{if 若 } n < m \\ n^2 + n + m, & \text{否则.} \end{cases}$$

枚举与集合大小

例 (不可数的集合)

- $2^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow 2\}$
- $P(\mathbb{N})$
- \mathbb{R}

康托尔对角线法

枚举与集合大小

定义

我们称集合 X 和集合 Y **等数**，记 $|X| = |Y|$ ，当且仅当存在双射 $h: X \rightarrow Y$

事实

集合等数是一个等价关系

枚举与集合大小

定义

- 我们称 **集合 X 不比集合 Y 大**，记 $|X| \leq |Y|$ ，当且仅当存在单射 $f: X \rightarrow Y$
- 我们称 **集合 X 比集合 Y 小**，记 $|X| < |Y|$ ，当且仅当 $|X| \leq |Y|$ 且 $|X| \neq |Y|$ 。

枚举与集合大小

定理 (Cantor-Bernstein)

对任意集合 X, Y , 若 $|X| \leq |Y|$ 且 $|Y| \leq |X|$, 则 $|X| = |Y|$

事实

$$|n| < |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

习题

- 我们称函数 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是 **递增的**，当且仅当对任意自然数 $n < m$ 有 $f(n) < f(m)$ 。令 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是递增的，证明：对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $n \leq f(n)$
- 1.4.1、1.4.5 (1), (3)、1.4.6、1.4.7、1.4.12*
- 1.5.6

(下页还有)

习题

- 利用皮亚诺公理和加法定义（书 23 页）证明加法交换律，即对任意自然数 n, m

$$n + m = m + n$$

- 如果集合 X 和集合 Y 等数且 X 是可数的，那么 Y 也是可数的

下期预告

- 命题逻辑的语言