

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 关系上的运算：定义域、值域、像、逆像、逆、复合、延拓与限制
- 等价关系与划分

关系

定义 (n 元有序组)

- 我们称有序对 (a, b) 是一个 2 元有序组
- 对 $n \geq 1$, 任给 x_0, \dots, x_n, x_{n+1} , 定义 $n + 2$ 元有序组 $(x_0, \dots, x_{n+1}) = ((x_0, \dots, x_n), x_{n+1})$

事实

对任意 n , 任给 $x_0, \dots, x_{n+1}, y_0, \dots, y_{n+1}$ 。

$(x_0, \dots, x_{n+1}) = (y_0, \dots, y_{n+1})$ 当且仅当对每个 $i \leq n + 1$ 都有

$$x_i = y_i$$

关系

定义

- 定义卡氏积 $X_1 \times \cdots \times X_n$

$$= \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{对 } 1 \leq i \leq n, x_i \in X_i\}$$

- 我们称 $R \subset X^n$ 是 X 上的一个 n 元关系
- 令 R 是一个 n 元关系。我们通常将 $(x_0, \dots, x_n) \in R$ 记作 $R(x_1, \dots, x_n)$

关系

例

- 劳务外包模式中的：发包单位、外包单位和劳动者
- 给定 n , $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \equiv b(\text{mod}n)\}$ 是一个 2 元关系;
 $\{(a, b, n) \in \mathbb{N}^3 \mid a \equiv b(\text{mod}n)\}$ 是一个 3 元关系
- 三维坐标系中, 点 a, b, c, d 不在一个平面上

自然数上的归纳法

定理

以下命题等价:

- 1 自然数集 \mathbb{N} 的任何非空子集有最小元
- 2 对任何 $P \subset \mathbb{N}$, 若 $0 \in P$ 且任何自然数 $n \in P$ 都蕴含 $n + 1 \in P$, 则 $P = \mathbb{N}$
- 3 对任何 $P \subset \mathbb{N}$, 若任何自然数 n 都满足 “若任何 $m < n$ 都有 $m \in P$, 则 $n \in P$ ”, 则 $P = \mathbb{N}$

自然数上的归纳法

定理

以下命题等价:

- 1 自然数集 \mathbb{N} 的任何非空子集有最小元
- 2 对任何 $P \subset \mathbb{N}$, 若 $0 \in P$ 且任何自然数 $n \in P$ 都蕴含 $n+1 \in P$, 则 $P = \mathbb{N}$
- 3 对任何 $P \subset \mathbb{N}$, 若任何自然数 n 都满足 “若任何 $m < n$ 都有 $m \in P$, 则 $n \in P$ ”, 则 $P = \mathbb{N}$

函数

定义

考虑关系 $f \subset X \times Y$ 。如果 f 满足：对任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ 都有 $y_1 = y_2$ ，那么我们称 f 是一个函数。

记法

- 若 f 是一个函数，我们将 $(x, y) \in f$ 记作 $f(x) = y$ 或 $f : x \mapsto y$ ，并称 f 在 x 处的值是 y
- 当 $\text{dom } f = X$ 且 $\text{ran } f \subset Y$ 时，我们称 f 是 X 到 Y 的函数，记作 $f : X \rightarrow Y$

函数

例

- 一般来说, $\{(x, y) \mid y \text{ 是 } x \text{ 的母亲}\}$ 是一个函数, 而 $\{(y, x) \mid y \text{ 是 } x \text{ 的母亲}\}$ 未必是函数
- 集合 X 上等于关系 $\{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}$ 是一个函数, 即 **等同函数**, 记作 Id_X

函数

定理

函数 $f = g$, 当且仅当 $\text{dom } f = \text{dom } g$ 并且对任意 $x \in \text{dom } f$, $f(x) = g(x)$

因此, 我们可以通过给出一个函数 f 的定义域 $\text{dom}(f)$ 以及 f 在定义域中每个 x 处的值来定义一个函数

例

- $\text{dom}(s) =$ 选课的学生, 对选课学生 x , $s(x) = x$ 的成绩
- $\text{dom}(p) = \mathbb{N}$, $p(n) =$ 第 n 个素数

函数

定理

函数 $f = g$, 当且仅当 $\text{dom } f = \text{dom } g$ 并且对任意 $x \in \text{dom } f$, $f(x) = g(x)$

因此, 我们可以通过给出一个函数 f 的定义域 $\text{dom}(f)$ 以及 f 在定义域中每个 x 处的值来定义一个函数

例

- $\text{dom}(s) =$ 选课的学生, 对选课学生 x , $s(x) = x$ 的成绩
- $\text{dom}(p) = \mathbb{N}$, $p(n) =$ 第 n 个素数

函数

记法 (n 元函数)

- 考虑 $f : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ 。 f 是 $X_1 \times \cdots \times X_n \times Y$ 上的一个 $n + 1$ 元关系。我们将 $(x_1, \dots, x_n, y) \in f$ 记作 $f(x_1, \dots, x_n) = y$
- $f : X^n \rightarrow X$ 常被称作 X 上的 n 元运算

例

自然数上的乘法是一个从 \mathbb{N}^2 到 \mathbb{N} 的 2 元函数 / 运算

函数

关于关系的运算，如定义域、值域、像、逆像、限制、复合都可以继承至函数

定理

如果 f 和 g 是函数，那么 $g \circ f$ 也是函数。它的定义域 $\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\text{dom}(g)]$ 。并且，对所有 $x \in \text{dom}(g \circ f)$ 有 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

注意：函数的逆未必是函数。

函数

关于关系的运算，如定义域、值域、像、逆像、限制、复合都可以继承至函数

定理

如果 f 和 g 是函数，那么 $g \circ f$ 也是函数。它的定义域 $\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\text{dom}(g)]$ 。并且，对所有 $x \in \text{dom}(g \circ f)$ 有 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

注意：函数的逆未必是函数。

函数

事实

给定函数 $f: X \rightarrow Y$, A 是 X 的子集。则 $g = f \upharpoonright A$ 也是一个函数。

此时, 我们称 g 是 f 到 A 上的限制, 而 f 是 g 的一个扩展。

注意: 在关于函数的语境下, 我们一般要求一个函数的扩展也是一个函数

函数

事实

给定函数 $f: X \rightarrow Y$, A 是 X 的子集。则 $g = f \upharpoonright A$ 也是一个函数。

此时, 我们称 g 是 f 到 A 上的限制, 而 f 是 g 的一个扩展。

注意: 在关于函数的语境下, 我们一般要求一个函数的扩展也是一个函数

函数

定义

一些函数的性质

- 函数 $f: X \rightarrow Y$ 是 **一一的** 或 **单射**，如果对任意 $x_1, x_2 \in X$ 都有 $x_1 \neq x_2$ 蕴含 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 函数 $f: X \rightarrow Y$ 是 **满射**，如果 $\text{ran}(f) = Y$
- 函数 $f: X \rightarrow Y$ 是 **双射** 或 **一一对应**，如果它既是单射又是满射

函数

记法 (序列)

令 I 是一个 (下标) 集合, $s : I \rightarrow X$ 是一个函数, 我们又称 s 是一个 **序列**。对 $i \in I$, 记 $s_i = s(i)$, 记 $s = \langle s_i : i \in I \rangle$

例

- 素数序列

$$p = \langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle = \langle p_0, p_1, \dots, \rangle = \langle 2, 3, 5, 7, \dots \rangle$$

枚举与集合大小

约定

我们将集合 $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 记作 n

因此, 对自然数 n, m 来说, $m \in n$ 当且仅当 $m < n$

枚举与集合大小

定义

如果下标集 $I \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$, $e: I \rightarrow X$ 是一个满射, 我们称 e 是对集合 X 的一个 **枚举**。

注意:

- 以自然数或自然数集为下标集的序列都是对它值域的一个枚举
- 枚举可以是有穷的, 也可以是无穷的
- 一个集合可以有許多枚举

枚举与集合大小

例

- 空集 \emptyset 是一个序列，也是一个对 \emptyset 的枚举
- $\langle a, b, b, c \rangle$
- $\langle a, c, b \rangle$
- $\langle a, b, c, c, c, \dots \rangle$

枚举与集合大小

事实

如果存在一个对集合 X 的枚举，那么就存在一个对 X 的——的枚举

定义

- 我们称一个集合 X 是可枚举的 / 可数的，当且仅当存在一个对 X 的枚举
- 我们称一个集合 X 是有穷的，当且仅当存在自然数 n 以及对 X 的枚举 $e : n \rightarrow X$

枚举与集合大小

事实

如果存在一个对集合 X 的枚举，那么就存在一个对 X 的——的枚举

定义

- 我们称一个集合 X 是 **可枚举的** / **可数的**，当且仅当存在一个对 X 的枚举
- 我们称一个集合 X 是 **有穷的**，当且仅当存在自然数 n 以及对 X 的枚举 $e : n \rightarrow X$

枚举与集合大小

例

- \mathbb{N}, \mathbb{N}^+ ,
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- \mathbb{Z} : 考虑 $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Cantor's zig-zag method

枚举与集合大小

Cantor's zig-zag method

$$f(n, m) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

事实

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是双射 (习题 *)

我们称这样的双射是一个对函数 (pairing function)

枚举与集合大小

例 (对函数)

- $g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$



$$h(n, m) = \begin{cases} m^2 + n - 1, & \text{if 若 } n < m \\ n^2 + n + m, & \text{否则.} \end{cases}$$

枚举与集合大小

例 (不可数的集合)

- $2^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow 2\}$
- $P(\mathbb{N})$
- \mathbb{R}

康托尔对角线法

枚举与集合大小

定义

我们称集合 X 和集合 Y **等数**，记 $|X| = |Y|$ ，当且仅当存在双射 $h: X \rightarrow Y$

事实

集合等数是一个等价关系

枚举与集合大小

定义

- 我们称 **集合 X 不比集合 Y 大**，记 $|X| \leq |Y|$ ，当且仅当存在单射 $f: X \rightarrow Y$
- 我们称 **集合 X 比集合 Y 小**，记 $|X| < |Y|$ ，当且仅当 $|X| \leq |Y|$ 且 $|X| \neq |Y|$ 。

枚举与集合大小

定理 (Cantor-Bernstein)

对任意集合 X, Y , 若 $|X| \leq |Y|$ 且 $|Y| \leq |X|$, 则 $|X| = |Y|$

事实

$$|n| < |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

习题

- 我们称函数 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是 **递增的**，当且仅当对任意自然数 $n < m$ 有 $f(n) < f(m)$ 。令 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是递增的，证明：对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $n \leq f(n)$
- 1.4.1、1.4.5 (1), (3)、1.4.6、1.4.7、1.4.12*
- 1.5.6

(下页还有)

习题

- 利用皮亚诺公理和加法定义（书 23 页）证明加法交换律，即对任意自然数 n, m

$$n + m = m + n$$

- 如果集合 X 和集合 Y 等数且 X 是可数的，那么 Y 也是可数的

下期预告

- 命题逻辑的语言