数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 集合，外延原理
- 空集，子集，真子集，幂集
- 并，交，差，一般并，一般交
- 有序对，卡氏积，关系

关系

定义 (几个关系的性质)

- 关系 $R \subset A^2$ 是 自返的，当且仅当对任意 $a \in A$ 有 Raa
- 关系 $R \subset A^2$ 是 传递的，当且仅当对任意 $a, b, c \in A$ 有，Rab 与 Rbc 蕴含 Rac
- 关系 $R \subset A^2$ 是 对称的，当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有，Rab 蕴含 Rba
- 关系 $R \subset A^2$ 是 反对称的，当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有，Rab 与 Rba 蕴含 $a = b$

定义 (序)

令 $R \subset A^2$

- 若 R 是自反的、传递的，我们称 R 是一个 A 上的 准序 （preorder）
- 若准序 R 是反对称的，则称 R 是一个 A 上的 偏序 （partial order）
- 若偏序 R 满足对任意 $a, b \in A$ 有 aRb 或 bRa，则称 R 是 A 上的一个 全序 或 线序

例

- 整除关系（习题）
- 考虑 $\mathbb{N}^2$ 上的关系：$(n_1, m_2) \preceq (n_2, m_2)$，当且仅当 $n_1 < n_2$，或 $n_1 = n_2$ 且 $m_1 \leq m_2$

定义

令 R 是一个二元关系，我们定义

- R 的 定义域： $\operatorname{dom} R = \{x \mid 存在\ y\ 使得\ R(x,y)\}$
- R 的 值域： $\operatorname{ran} R = \{y \mid 存在\ x\ 使得\ R(x,y)\}$
- 集合 X 在 R 下的 像：

$$R[X] = \{y \mid 存在\ x \in X\ 使得\ R(x,y)\}$$

- 集合 Y 在 R 下的 逆像：

$$R^{-1}[Y] = \{x \mid 存在\ y \in Y\ 使得\ R(x,y)\}$$

关系

定义

令 R, S 一个二元关系，我们定义

- R 的 逆 ： $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
- R 和 S 的 复合 ： $S \circ R = \{(x, z) \mid$ 存在 y 使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S\}$

注意：$R^{-1}[Y]$ 不会出现歧义

定义

如果 S 是 $X \times Y$ 上二元关系，Z 是 X 的子集，我们称 R 是 S 在 Z 上的限制，记 $R = S \upharpoonright Z$，当且仅当

$R = S \cap (Z \times Y)$

此时，$\operatorname{ran} R = S[Z]$

例

令 S 是整数集 $\mathbb{Z}$ 上的后继关系，即

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid j = i + 1\}$$

- $S^{-1} = \{(i, j) \mid j = i - 1\}$ 是整数上的前驱关系
- $S \circ S = \{(i, j) \mid j = i + 2\}$
- $S \restriction \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的后继关系
- $S[\mathbb{N}] = \operatorname{ran}(S \restriction N) = \{1, 2, 3, \ldots,\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

等价关系与划分

定义 (等价关系)

我们称 $R \subset A^2$ 是一个 等价关系 ，当且仅当 R 是自返的、传递的以及对称的

例

- 等同关系
- (集合间的）等势关系
- $n \equiv m \ (\mathrm{mod} k)$

例

考虑所有人的集合 P 上的二元关系:

- $D = \{(x, y) \mid y$ 是 x 的祖先 $\}$
- $B = \{(x, y) \mid x$ 和 y 有一个共同的祖先 $\}$
- $S = \{(x, y) \mid x$ 和 y 有共同的母亲 $\}$

等价关系与划分

定义

令 $\sim$ 是 X 上的一个等价关系且 $x \in X$。我们定义 以 x 为代表的 $\sim$ 等价类 为集合

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

例

- $[x]_= = \{x\}$
- 定义 $n \sim m$ 当且仅当 $n \equiv m \pmod 2$。则 $[0]_\sim = \{n \mid n$ 是偶数 $\}$，而 $[3]_\sim = [11]_\sim$

等价关系与划分

引理

令 $\sim$ 是 X 上的等价关系，则对任意 $x, y \in X$，要么 $[x]_\sim = [y]_\sim$，要么 $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$

等价关系与划分

定义

给定集合 X 以及 $S \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$。若 S 满足

- 对所有 $a, b \in S$，如果 $a \neq b$，则 $a \cap b = \emptyset$
- $\bigcup S = X$

则称 S 是 X 的一个 划分

等价关系与划分

定义

令 $\sim$ 为 X 上的一个等价关系，我们定义

$$X/\sim \;=\{[x]\mid x\in X\}$$

为 X 在 $\sim$ 下的商集

等价关系与划分

定理

令 $\sim$ 为 X 上的一个等价关系。则 $X/\sim$ 是 X 的一个划分

定理

令 S 为 X 的一个划分。定义 X 上二元关系

$$\sim_S = \{(x, y) \in X^2 \mid \text{存在 } Y \in S \text{ 使得 } x, y \in Y\}$$

则 $\sim_S$ 是 X 上的一个等价关系

习题

- 举例：R 是对称的也是反对称的
- 验证：自然数集 $\mathbb{N}$ 上的整除关系是偏序。整数集 $\mathbb{Z}$ 上的整除关系呢?

习题

令 R, S, T 是任意二元关系，X, Y 是任意集合。证明：

- $R[X \cap Y] \subset R[X] \cap R[Y]$ （等号成立吗，能举出反例吗?）
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- $(R \circ S)^{-1} = (S^{-1}) \circ (R^{-1})$
- $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

习题

- 1.5.1、1.5.5、1.5.9（若没来得及讲）
- 假设 $\leq$ 是 X 上的一个准序。定义 X 上关系

$$\sim = \left\{(x, y) \in X^2 \,\middle|\, x \leq y \text{ 且 } y \leq x\right\}$$

  - 证明 $\sim$ 是 X 上的等价关系。
  - 定义 $X/\sim$ 上的关系 $\leq$，使得 $[x] \leq [y]$ 当且仅当 $x \leq y$，并证明 $\leq$ 是偏序

下期预告

- 自然数上的归纳法
- 函数
- 集合的大小