

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年秋季

前情提要

- 集合, 外延原理
- 空集, 子集, 真子集, 幂集
- 并, 交, 差, 一般并, 一般交
- 有序对, 卡氏积, 关系

关系

定义 (几个关系的性质)

- 关系 $R \subset A^2$ 是 **自返的** , 当且仅当对任意 $a \in A$ 有 Raa
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **传递的** , 当且仅当对任意 $a, b, c \in A$ 有, Rab 与 Rbc 蕴含 Rac
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **对称的** , 当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有, Rab 蕴含 Rba
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **反对称的** , 当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有, Rab 与 Rba 蕴含 $a = b$

关系

定义 (序)

令 $R \subset A^2$

- 若 R 是自反的、传递的，我们称 R 是一个 A 上的 **准序** (preorder)
- 若准序 R 是反对称的，则称 R 是一个 A 上的 **偏序** (partial order)
- 若偏序 R 满足对任意 $a, b \in A$ 有 aRb 或 bRa ，则称 R 是 A 上的一个 **全序** 或 **线序**

关系

例

- 整除关系 (习题)
- 考虑 \mathbb{N}^2 上的关系: $(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2)$, 当且仅当 $n_1 < n_2$, 或 $n_1 = n_2$ 且 $m_1 \leq m_2$

关系

定义

令 R 是一个二元关系, 我们定义

■ R 的 **定义域**: $\text{dom } R = \{x \mid \text{存在 } y \text{ 使得 } R(x, y)\}$

■ R 的 **值域**: $\text{ran } R = \{y \mid \text{存在 } x \text{ 使得 } R(x, y)\}$

■ 集合 X 在 R 下的 **像**:

$$R[X] = \{y \mid \text{存在 } x \in X \text{ 使得 } R(x, y)\}$$

■ 集合 Y 在 R 下的 **逆像**:

$$R^{-1}[Y] = \{x \mid \text{存在 } y \in Y \text{ 使得 } R(x, y)\}$$

关系

定义

令 R, S 一个二元关系, 我们定义

- R 的逆: $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
- R 和 S 的复合: $S \circ R = \{(x, z) \mid \text{存在 } y \text{ 使得 } (x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in S\}$

注意: $R^{-1}[Y]$ 不会出现歧义

关系

定义

如果 S 是 $X \times Y$ 上二元关系, Z 是 X 的子集, 我们称 R 是 S 在 Z 上的限制, 记 $R = S \upharpoonright Z$, 当且仅当

$$R = S \cap (Z \times Y)$$

此时, $\text{ran } R = S[Z]$

关系

例

令 S 是整数集 \mathbb{Z} 上的后继关系, 即

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid j = i + 1\}$$

- $S^{-1} = \{(i, j) \mid j = i - 1\}$ 是整数上的前驱关系
- $S \circ S = \{(i, j) \mid j = i + 2\}$
- $S \upharpoonright \mathbb{N}$ 是 \mathbb{N} 上的后继关系
- $S[\mathbb{N}] = \text{ran}(S \upharpoonright \mathbb{N}) = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

等价关系与划分

定义 (等价关系)

我们称 $R \subset A^2$ 是一个 **等价关系**，当且仅当 R 是自返的、传递的以及对称的

例

- 等同关系
- (集合间的) 等势关系
- $n \equiv m \pmod{k}$

等价关系与划分

例

考虑所有人的集合 P 上的二元关系:

- $D = \{(x, y) \mid y \text{ 是 } x \text{ 的祖先}\}$
- $B = \{(x, y) \mid x \text{ 和 } y \text{ 有一个共同的祖先}\}$
- $S = \{(x, y) \mid x \text{ 和 } y \text{ 有共同的母亲}\}$

等价关系与划分

定义

令 \sim 是 X 上的一个等价关系且 $x \in X$ 。我们定义以 x 为代表的 \sim 等价类 为集合

$$[x]_{\sim} = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

例

- $[x]_{=} = \{x\}$
- 定义 $n \sim m$ 当且仅当 $n \equiv m \pmod{2}$ 。则 $[0]_{\sim} = \{n \mid n \text{ 是偶数}\}$, 而 $[3]_{\sim} = [11]_{\sim}$

等价关系与划分

引理

令 \sim 是 X 上的等价关系, 则对任意 $x, y \in X$, 要么 $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$, 要么 $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset$

等价关系与划分

定义

给定集合 X 以及 $S \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$ 。若 S 满足

- 对所有 $a, b \in S$, 如果 $a \neq b$, 则 $a \cap b = \emptyset$
- $\bigcup S = X$

则称 S 是 X 的一个 **划分**

等价关系与划分

定义

令 \sim 为 X 上的一个等价关系, 我们定义

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

为 X 在 \sim 下的商集

等价关系与划分

定理

令 \sim 为 X 上的一个等价关系。则 X/\sim 是 X 的一个划分

定理

令 S 为 X 的一个划分。定义 X 上二元关系

$$\sim_S = \{(x, y) \in X^2 \mid \text{存在 } Y \in S \text{ 使得 } x, y \in Y\}$$

则 \sim_S 是 X 上的一个等价关系

习题

- 举例： R 是对称的也是反对称的
- 验证：自然数集 \mathbb{N} 上的整除关系是偏序。整数集 \mathbb{Z} 上的整除关系呢？

习题

令 R, S, T 是任意二元关系, X, Y 是任意集合。证明:

- $R[X \cap Y] \subset R[X] \cap R[Y]$ (等号成立吗, 能举出反例吗?)
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- $(R \circ S)^{-1} = (S^{-1}) \circ (R^{-1})$
- $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

习题

- 1.5.1、1.5.5、1.5.9 (若没来得及讲)
- 假设 \leq 是 X 上的一个准序。定义 X 上关系

$$\sim = \{(x, y) \in X^2 \mid x \leq y \text{ 且 } y \leq x\}$$

- 证明 \sim 是 X 上的等价关系。
- 定义 X/\sim 上的关系 \leq , 使得 $[x] \leq [y]$ 当且仅当 $x \leq y$, 并证明 \leq 是偏序

下期预告

- 自然数上的归纳法
- 函数
- 集合的大小