

可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情回顾

- 对每个 01 序列 A 都存在马丁-洛夫随机序列 Z 有 $A \leq_T Z$
- 相对于 A 马丁-洛夫测试 / 随机的
- 给定序列 A 、 B 。 $A \oplus B$ 是马丁-洛夫随机的，当且仅当 B 是马丁-洛夫随机的并且 A 是相对于 B 马丁-洛夫随机的。
- 2-随机的序列都是广义低效的

更弱的随机性概念

回忆: Z 是马丁-洛夫随机的, 当且仅当对任何 c.e. 的 (上) 鞅 d , $Z \notin S[d]$

如果 d 仅仅是 c.e. 的 (上) 鞅, 按照这个策略可能永远无法真正 “买定离手”。我们希望除了可以能行地知道至少应该押注多少, 至少还可以能行地知道至多应该押注多少。

可计算随机

定义

我们称一个（上）鞅是 **可计算的**，当且仅当它的值是统一地递归的，即存在一个递归函数 $p : 2^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}$ ，任给 $\sigma \in 2^{<\omega}$ ，程序 $\Phi_{p(\sigma)}$ 可以判定一个二进有理数是否小于 $d(\sigma)$ 。

如果 d 是可计算的，那么对任意有理数 r ，任意 $n > 0$ ，可以能行地判定是否 $r \in (d(\sigma) - 2^{-n}, d(\sigma) + 2^{-n})$

可计算随机

我们可以仅用有理数值的可计算函数模拟任意可计算的鞅，
从而做到 “买定离手”

引理

对每个可计算的鞅 $d : 2^{<\omega} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ 存在可计算函数
 $f : 2^{<\omega} \rightarrow \mathbb{Q}^{\geq 0}$ ， f 是鞅且 $S[f] = S[d]$

可计算随机

定义

我们称序列 $Z \in 2^\omega$ 是 **可计算随机的**，当且仅当不存在可计算的鞅可以在 Z 上获胜。

- 对每个可计算的上鞅都存在一个可计算的鞅处处占优，所以将定义中的“鞅”替换为“上鞅”得到的定义是等价的
- 马丁-洛夫随机 \Rightarrow 可计算随机

施诺尔随机性

可计算的鞅无法保证何时获得给定量的收益

定义 (施诺尔随机性)

- 令 d 是一个鞅, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个严格递增函数。称 d 在序列 Z 上 g 获胜, 当且仅当存在无穷 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $d(Z \upharpoonright g(n)) \geq n$
- 令 $S_g[d]$ 是所有 d 在其上 g 获胜的序列组成的集合;
- 称序列 $Z \in 2^\omega$ 是施诺尔随机的, 当且仅当对任意可计算的鞅 d 任意可计算的严格递增函数 g , d 都不在 Z 上 g 获胜, 即 $Z \notin S_g[d]$

施诺尔随机性

施诺尔随机性仍然满足我们对随机性的一些直观。例如，存在等价的基于统计学测试的刻画

定义

我们称一个马丁-洛夫测试 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个 **施诺尔测试**，当且仅当 $\{\lambda(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是统一地可计算的

施诺尔随机性

定理

序列 Z 是施诺尔随机的, 当且仅当对任意施诺尔测试

$$\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}, Z \notin \bigcap_n U_n$$

施诺尔随机性

在上面的证明中，我们只需要 Z 属于无穷个 U_n 就可以证明 Z 不是施诺尔随机的。因而：

推论

序列 Z 不是施诺尔随机的，当且仅当存在施诺尔测试 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使得存在无穷个 n 有 $Z \in U_n$

施诺尔随机性

容易验证，有关例子中的马丁-洛夫测试都是施诺尔测试，因而：

- 施诺尔随机序列都满足大数定律
- 可计算序列都不是施诺尔随机的

施诺尔随机性

事实

不存在通用施诺尔测试

证明.

任给施诺尔测试 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 。由于 $\lambda(U_1) \leq 2^{-1}$ 是一个可计算实数。我们可以能行地找到最短的 σ_0 使得 $[\sigma_0] \notin U_1$, 并由此递归地找到 $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots$ 都满足 $[\sigma_i] \notin U_1$ 。 $Z = \bigcup_i \sigma_i$ 是一个通过测试 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的可计算序列

非马丁-洛夫随机的可计算随机

马丁-洛夫随机 \Leftrightarrow 可计算随机 \Leftrightarrow 施诺尔随机

非马丁-洛夫随机的可计算随机

定理

假设 $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是非降的 ($n_1 < n_2 \Rightarrow h(n_1) \leq h(n_2)$)、无界的 ($\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty$) 递归函数。那么存在一个可计算随机的序列 Z 使得对几乎所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$K(Z \upharpoonright n | n) \leq h(n).$$

特别地, 令 $h(n) = \log n$ 。因而, 对几乎所有 $n \in \mathbb{N}$,
 $K(Z \upharpoonright n) \leq 3 \log n$ 。

非马丁-洛夫随机的可计算随机

定义

一个 **部分可计算鞅** 是一个部分递归函数 $p : 2^{<\omega} \rightarrow \mathbb{Q}$ 并且满足：对任意 $\tau \in \text{dom } p$,

- 对任意 $\sigma < \tau$ 有 $\sigma \in \text{dom } p$
- $\tau 0 \in \text{dom } p$ 当且仅当 $\tau 1 \in \text{dom } p$
- 若 $\tau, \tau 0, \tau 1 \in p$, 则满足 $p(\tau 0) + p(\tau 1) = 2p(\tau)$

施诺尔随机与高效性

与低效性相对，经典递归论中还存在一组高效性概念

定义

称一个 Δ_2^0 集合 A 是 **高效的** (high), 当且仅当 $\emptyset'' \leq A'$

高效的集合类似 \emptyset' , 直观上是作为信息源很有用的集合

施诺尔随机与高效性

引理

集合 A 是高效的, 当且仅当存在函数 $f \leq_T A$ 控制 (dominate) 所有可计算函数

定理

如果序列 Z 是施诺尔随机的, 并且 Z 不是高效的, 那么 Z 就是马丁-洛夫随机的

谢谢!