

可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情回顾

- 相对柯尔莫哥洛夫复杂度:

$$C(\sigma|\tau) = \min \{|\mu| : U^{\bar{\tau}}(\mu) = \sigma\}$$

- C 的递归论性质: $C \leq_{\text{wtt}} 0'$, C 不是可计算的

前情回顾

- 无前束集合、无前束程序
- 通用无前束程序: $U^{\text{pf}}(1^e 0 \sigma) = \Psi_e(\sigma)$
- 柯尔莫哥洛夫复杂度: $K(\sigma) = K_{U^{\text{pf}}}(\sigma) = C_{U^{\text{pf}}}(\sigma)$
- K 的上界: $K(\sigma) \leq 2|\sigma| + c$,
 $K(\sigma) \leq K(|\sigma|) + |\sigma| + c_1 \leq 2 \log |\sigma| + |\sigma| + c_2$
- 但是对任意 d 存在 σ 使得: $K(\sigma) > |\sigma| + \log |\sigma| + d$
- 柴廷数: $\Omega = \lambda([\text{dom } U^{\text{pf}}]^{<}) \leq 1$

无前束程序存在引理

记法

对任意无前束程序 M , 令 $\Omega_M = \lambda([\text{dom } M]^\leftarrow)$ 为 M 的停机
概率

显然, $\Omega_M \leq 1$

无前束程序存在引理

定义

令序列 $\{\langle d_i, \tau_i \rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是可计算的，其中每个 $d_i \in \mathbb{N}$, $\tau_i \in 2^{<\omega}$ 。

若 $\sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-d_i} \leq 1$ ，则称 $\{\langle d_i, \tau_i \rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是一个 **请求序列**

其中，我们称 $\sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-d_i} \leq 1$ 为 **份量条件** (weight condition)。即每个 τ_i 要求一个份量为 2^{-d_i} 的描述，但要求的总份量不能超过 1

无前束程序存在引理

引理 (列文-施诺尔-柴廷)

任给请求序列 $\{\langle d_i, \tau_i \rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$, 存在满足该请求序列的无前束程序 M , 即: 存在无前束集合 $\{\sigma_i : i < \mathbb{N}\} = \text{dom } M$, 且对任意 $i \in \mathbb{N}$ 有 $M(\sigma_i) = \tau_i$, $|\sigma_i| = d_i$

上述程序 M 可以能行地从请求序列 (作为递归序列的某个编码) 得到

无前束程序存在引理

推论

假设存在请求序列 $\{\langle d_i, \tau_i \rangle : i \in \mathbb{N}\}$, 则存在常量 $c \in \mathbb{N}$, 对 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$K(\tau_i) \leq d_i + c.$$

1-随机

定义

- 给定 $d \in \mathbb{N}$ 。我们称 01 串 σ 是 d - K -随机的，当且仅当

$$K(\sigma) \geq |\sigma| - d$$

- 我们称无穷 01 序列 $Z \in 2^\omega$ 是 1-随机的，当且仅当存在 $d \in \mathbb{N}$ ，使得 Z 的每个有穷前段都是 d 随机的，即对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，有

$$K(Z \upharpoonright n) \geq n - d$$

1-随机

回忆: 对任意 d , 对任意无穷 01 序列 Z 总有一个前段

$\sigma \prec Z$, 使得 $C(\sigma) < |\sigma| - d$

因而, 如果把 1-随机定义中的 K 换成 C , 就不存在

“ 1_C -随机的”序列了

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

回忆: 柴廷数 $\Omega = \sum_{\tau \in \text{dom } U^{\text{pf}}} 2^{-|\tau|} = \lambda([\text{dom } U^{\text{pf}}]^{<})$

对 Ω “自下而上” 能行的逼近: 对 $s \in \mathbb{N}$ 定义

$$\Omega_s = \lambda([\{\sigma : U_s^{\text{pf}}(\sigma) \downarrow\}]^{<})$$

$s \mapsto \Omega_s$ 是可计算的, $\Omega_s \leq \Omega_{s+1} \leq \Omega$, 并且 $\Omega = \lim_{s \rightarrow \infty} \Omega_s$

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

定义

对无穷序列 $Z \in 2^\omega$, 令 $L(Z) = \{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L Z\}$, 即完全二叉树中所有在无穷枝 Z “左侧” 的字符串组成的集合。

事实

如果把 Ω 看作是它的二进制表示 (一个无穷 01 序列), $L(\Omega)$ 是 c.e. 的

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

定义

我们称序列 $Z \in 2^\omega$ 或实数 $r = z.Z$ ($z \in \mathbb{Z}$) 是左递归可枚举的 (left c.e.), 当且仅当 $L(Z)$ 是 c.e. 的, (当考虑实数时) 即小于 r 的二进有理数是递归可枚举的。

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

事实

- 下列命题等价
 - Z 是左递归可枚举的
 - 存在可计算的序列 $\sigma_0 <_L \sigma_1 <_L \dots$ 使得 $\lim_n \sigma_n = Z$,
即: 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 存在 σ_n , 使得 $\sigma_n \upharpoonright m = Z \upharpoonright m$
- 如果 Z (作为特征函数对应的集合) 是 c.e. 的, 那么 Z 是左 c.e. 的

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

并非所有与左 c.e. 的序列是 c.e. 的

例

令

$$A_0 = 010101 \dots。$$

逐一运行所有 $\Phi_{e,s}(2e+1)$, 不妨设对任意 s , 只有至多一个满足 $e \leq s$ 的 $\Phi_e(2e+1)$ 得到运行。假设 A_s 已定义。定义

A_{s+1} 如下: 如果发现某个 $\Phi_{e,s}(2e+1)$ 首次停机, 则令

$A_{s+1}(2e) = 1, A_{s+1}(2e+1) = 0$, 其余与 A_s 相同。令

$$A = \lim_s A_s$$

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

事实

- 如果 Z 是左 c.e. 的, 那么 $Z \leq_T 0'$
- $\Omega \equiv_T 0'$

柴廷数 Ω 与左递归可枚举

事实

Ω 是 1-随机的, 即存在常量 $c \in \mathbb{N}$ 使得, 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$K(\Omega \upharpoonright n) \geq n - c$$

习题

- 定义 $\hat{\Omega} = \sum_{\sigma \in 2^{<\omega}} 2^{-K(\sigma)}$ 。证明: $\hat{\Omega}$ 是左 c.e. 的, 并且是 1-随机的。

下期预告

- 基于统计学测试的刻画：马丁-洛夫随机性