可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情回顾

- Friedberg-Muchnik 定理:

  存在不可比的 c.e. 集对

有穷损害优先方法

定理 (Sacks Splitting Theorem)

任给 c.e. 集 B 和不可计算的 c.e. 集 C，可以能行地得到低效的 c.e. 集 A_0 和 A_1，使得 $B = A_0 \cup A_1$，$A_0 \cap A_1 = \emptyset$，且 $C \not\leq_T A_i \ \ (i = 0, 1)$

注意: 此时 $B \equiv_T A_0 \oplus A_1$

推论

存在 c.e. 集的 $<_T$ 无穷下降链

康托尔空间

定义 (康托尔空间)

- 对任意有穷 01 字符串 $\sigma \in 2^{<\omega}$，定义 柱集 （cylinder）

$$[\sigma] = \{Z \in 2^{\omega} \mid y \prec Z\}$$

- 对一集 01 字符串 $E \subset 2^{<\omega}$，定义

$$[E]^{\prec} = \bigcup \{[\sigma] \mid \sigma \in E\} = \{Z \in 2^{\omega} \mid \exists \sigma \in E(\sigma \prec Z)\}$$

康托尔空间

定义 (康托尔空间)

- 定义 康托尔空间 为 2^ω 上的以所有柱集为拓扑基的拓扑空间。即 $U \subset 2^\omega$ 是 开集 （或 $\mathbf{\Sigma}^0_1$ 集），当且仅当存在 $E \subset 2^{<\omega}$ 使得，$U = [E]^{\prec}$
- 称 $P \subset 2^\omega$ 是 闭集 （或 $\mathbf{\Pi}^0_1$ 集），当且仅当 $2^\omega \setminus P$ 是开集

康托尔空间

定义

我们称集合 $E \subset 2^{<\omega}$ 是 **无前束的** （prefix-free），当且仅当

$\forall \sigma, \tau \in E \ (\sigma \neq \tau \to \sigma | \tau)$

事实

$U \subset 2^{\omega}$ 是开集，当且仅当存在无前束的 $E \subset 2^{<\omega}$ 使得

$U = [E]^{<}$

康托尔空间

事实

- 康托尔空间是实数序拓扑的闭子拓扑（康托尔集）
- 康托尔空间是无穷个 $\{0,1\}$ 上离散空间的乘积空间 $\{0,1\}^\omega$

康托尔空间

事实

- 在康托尔空间中，每个柱集 $[\sigma]$ 都是即开又闭的
- 康托尔空间和每个柱集子空间都是紧致的，即每个开覆盖都存在有穷子覆盖 （紧空间的闭子空间是紧的或 Tychonoff 定理）

定义

给定 $A \subset 2^\omega$，我们称开集族 $\mathcal{U}$ 是 A 的一个 开覆盖 ，当且仅当 $A \subset \bigcup \mathcal{U}$

康托尔空间

事实

- 对 $2^{<\omega}$ 的子树 B，$Paths(B) = \{Z \in 2^{\omega} \mid Z \text{ 是 } B \text{ 中路径}\}$ 是闭集
- 如果 $P \subset 2^{\omega}$ 是闭的，那么 $T_P = \{\sigma \mid [\sigma] \cap P \neq \emptyset\}$ 是一棵没有死枝的树
- 如果 B 是一棵没有死枝的树，那么 $B = T_{Paths(B)}$

康托尔空间

对开集 $U \subset 2^{\omega}$，令 $P = 2^{\omega} \setminus U$，定义

$$A_U = 2^{<\omega} \setminus T_P = \{\sigma \mid [\sigma] \subset U\}$$

事实

- 如果 U 是开集，那么 A_U 是一个理想：若 $\sigma \in A_U$ 且 $\sigma \prec \tau$，则 $\tau \in A_U$；若 $\sigma 0, \sigma 1 \in A_U$，则 $\sigma \in A_U$
- 如果 I 是满足上述条件的 01 字符串理想，那么 $C = A_{[C]^{\prec}}$

康托尔空间

事实

$X \subset 2^\omega$ 是即开又闭的，当且仅当存在有穷的 $F \subset 2^{<\omega}$，使得 $X = [F]^<$

康托尔空间

在康托尔空间上有一个自然的 测度 （measure）：

- 对 $\sigma \in 2^{<\omega}$，定义 $\lambda([\sigma]) = 2^{-|\sigma|}$
- 对开集 $U = [E]^{\prec}$，其中 E 是无前束字符串集，定义 $\lambda(U) = \sum_{\sigma \in E} \lambda([\sigma])$
- 定义闭集 $2^{\omega} \setminus U$ 的测度 $\lambda(2^{\omega} \setminus U) = 1 - \lambda(U)$

习题

- (*)康托尔空间是无穷个 $\{0,1\}$ 上离散空间的乘积空间 $\{0,1\}^{\omega}$
- 1.8.7*, 1.8.8*

下期预告

- Kolmogorov 复杂度