

1.5.19 A 是 high $\Leftrightarrow \exists f \in_r A$ f 支配所有可计算函数.

注意: 支配所有可计算函数比不被任何可计算函数支配更强.

证明 (二) Φ_e 是可计算的. 即 Φ_e 是全函数.

" Φ_e 是全函数" 即 $\forall x \exists s \Phi_{e,s}(x) \downarrow$

故 $Tot = \{e \mid \Phi_e \text{ 是全函数}\}$ 是 Π_1^0 的

因而 $Tot \leq_m 0'' \leq_r A'$

因此, Tot 是 $\Delta_2^0(A)$ 的, 即存在 A 可计算的

对 Tot 的逼近: $\langle T_s \rangle_{s \in \mathbb{N}}$, $T_s \subseteq s$. 且

$$\forall e \lim_s T_s(e) \downarrow = Tot(e)$$

定义 $f \in_r A$, 使对任 x ,

$$f(x) = \max \{ \Phi_{e,s_x}(x) \mid e \leq x, \Phi_{e,s_x}(x) \downarrow \}$$

其中 s_x 是 $\frac{x}{2}$ 的 s (使对任 $e \leq x$, 或 $\Phi_{e,s}(x) \downarrow$)

$$\text{或 } T_s(e) = 0$$

用 A 计算

f 是 C 可计算的. 因为 s 总能找到. 对任意 $e \leq x$

若 $e \in Tot$, 总有 s 使 $\Phi_{e,s}(x) \downarrow$, 若 $e \notin Tot$, 总有 s

