可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情回顾

- 低效的：low_n
- 超低效的
- 广义低效的：GL_n

支配

定义

- 任给函数 $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们称 f 支配（dominates）g，当且仅当存在 m，对任意 $n \geq m$ 有 $f(n) \geq g(n)$
- 考虑 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和部分函数 ψ，我们称 f 支配（dominates）ψ，当且仅当存在 m，对任意 $n \geq m$ 有 $\psi(n) \downarrow \to f(n) \geq \psi(n)$

支配

事实

A 是 GL_1 的，当且仅当每个 A 中部分可计算的函数 Φ_e^A 都被某个 $f \leq_T A \oplus 0'$ 支配

定义 (可计算支配)

我们称集合 A 是 **可计算支配的** (computably dominated)，当且仅当每个函数 $g \leq_T A$ 都被一个可计算函数支配

定义 (超免疫)

- 任给集合 A，定义 p_A 是 A 从小到大的枚举函数。即对任意 n， $p_A(n) < p_A(n+1)$ 且 $\operatorname{ran} p_A = A$
- 我们称集合 E 是 超免疫的 （hyperimmune），当且仅当 E 是无穷的，且 p_E 不被任何可计算函数支配

支配

事实

集合 A 不是可计算支配的，当且仅当存在超免疫的集合 $E \equiv_T A$

定义

- 我们称集合 A 是 **超免疫度的** （of hyperimmune degree），当且仅当它不是可计算支配的
- 我们又称可计算支配的集合 A 是 **无超免疫度的** （of hyperimmune-free degree）

支配

事实

集合 A 不是可计算支配的，当且仅当存在超免疫的集合 $E \equiv_T A$

定义

- 我们称集合 A 是 **超免疫度的** （of hyperimmune degree），当且仅当它不是可计算支配的
- 我们又称可计算支配的集合 A 是 **无超免疫度的** （of hyperimmune-free degree）

支配

事实

集合 A 是可计算支配的，当且仅当对任意函数 f

$$f \leq_T A \to f \leq_{tt} A$$

证明.

假设 $f = \Phi_e^A$。令 $g(x) = \mu s \Phi_{e,s}^A(x)$。则 $g \leq_T A$。取可计算的函数 t 支配 g，t 支配了 Φ_e^A 的运行时间

支配

事实

集合 A 是可计算支配的，当且仅当对任意函数 f

$$f \leq_T A \to f \leq_{tt} A$$

证明.

假设 $f \leq_{tt} A$，取 $f'(x)$ 是“真值表所有可能值的最大元”

支配

事实

如果 A 是 Δ_2^0 的且不可计算，那么 A 不是可计算支配的

证明.

反设 A 是可计算支配的。令 $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ 是 A 的可计算支配。考虑 $g(s) = \mu t \geq s\ A_t\upharpoonright s = A_s\upharpoonright s$。$g \leq_T A$，因而被某个可计算的 f 支配。从而 A 是可计算的。

高效性

定义

我们称集合 A 是 high$_n$ 的，当且仅当 $0^{(n+1)} \leq_T A^{(n)}$

注意:

- Δ^0_2 集合 A 是 high$_n$ 的，当且仅当 $A^{(n)} \equiv_T 0^{(n+1)}$
- 可计算 $\subset$ low$_1$ $\subset$ low$_2$ $\subset \cdots \subset$ 非 high$_2$ $\subset$ 非 high$_1$ $\subset$ $\{A \mid A \not\geq_T 0'\}$

高效性

事实

$0'$ 是高效的（high_1 的），且存在 $f \leq_T 0'$ 支配所有的可计算函数

事实

集合 A 是高效的，当且仅当存在 $f \leq_T A$ 支配所有可计算函数

Post 问题

是否存在 c.e. 集合 A 有 $0 <_T A <_T 0'$

0 和 $0'$ 之间的集合

记法

对集合 A, B，我们用 $A|_T B$ 表示 $A \not\leq_T B$ 且 $B \not\leq_T A$

定理 (Post and Kleene)

存在集合 $A, B \leq_T 0'$ 有 $A|_T B$，因而 $0 <_T A, B <_T 0'$

证明.

有穷扩张、对角线

单集

定义

- 一个 c.e. 的集合 A 是 单集 （simple set），当且仅当 $\mathbb{N} \setminus A$ 且对每个无穷 c.e. 集合 W，$A \cap W \neq \emptyset$

事实

- 如果 A 是单集，那么 $\mathbb{N} \setminus A$ 不是 c.e. 的，因而 A 不是可计算的
- 如果 A 是低效的单集，那么 $0 <_T A <_T 0'$
- 存在一个单集

单集

事实

存在一个低效的单集 A，因而 $0 <_T A <_T 0'$

证明.

有穷损害优先方法

习题

- 1.5.13, 1.5.14, 1.5.17*
- 1.5.21

下期预告

- 可计算支配、高效
- Post 问题