

可计算性理论

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情回顾

- 使用函数 use $\Phi_e^Z(x)$, $\Phi_e^\sigma(x) = y$ 、 $\Phi_{e,s}^\sigma(x) = y$
- 真值表归约与弱真值表归约
- 联
- 自然数集合的算术层谱

$A \in \Sigma_{n+1}^0 \Leftrightarrow A$ 是 0^n 中 c.e. 的

前情回顾

- Sheonfield 极限引理: $A \in \Delta_2^0 \Leftrightarrow A \leq_T 0' \Leftrightarrow$ 存在 A 的可计算逼近
- n -c.e. 与 ω -c.e.

$$A \text{ 是 } \omega\text{-c.e. 的} \Leftrightarrow A \leq_{wtt} 0' \Leftrightarrow A \leq_{tt} 0'$$

低效性

定义

- 我们称集合 A 是 **低效的** (low), 当且仅当 $A' \leq_T 0'$
- 我们称集合 A 是 **低效 _{n} 的** (low _{n}), 当且仅当 $A^{(n)} \leq_T 0^{(n)}$
- 我们称集合 A 是 **高效的** (high), 当且仅当 $0'' \leq_T A'$

直观上, A 是低效的, 即 A 作为信息源的计算都可以用 $0'$ 来替代

低效性

事实

- 如果 A 是低效的, 那么 $A \leq_T 0'$ 且 $A' \equiv_T 0'$
- 如果 A 是低效 $_n$ 的, 那么 $A^{(n)} \equiv_T 0^{(n)}$
- 可计算 \subset 低效 $_1 \subset$ 低效 $_2 \subset \dots \subset \{A \mid A \not\leq_T 0'\}$

低效性

定义

集合 A 是 **超低效的** (superlow), 当且仅当 $A' \leq_{tt} 0'$,

事实

- A 是超低效的, 当且仅当即 $A' \equiv_{tt} 0'$, 也即 A' 是 ω -c.e. 的
- 如果 A 是超低效的, 那么 A 是低效的
- 如果 A 是 (超) 低效的, $B \leq_T A$, 那么 B 也是 (超) 低效的

低效性

注意: 低效的集合 A 必须是 Δ_2^0

定义

- A 是 **广义低效₁** 的 (generalized low₁), 记作 GL_1 , 当且仅当 $A' \equiv_T A \oplus 0'$
- A 是 **广义低效₂** 的, 记作 GL_2 , 当且仅当 $A'' \equiv_T (A \oplus 0)'$

支配

定义

- 任给函数 $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 我们称 f **支配** (dominates) g , 当且仅当存在 m , 对任意 $n \geq m$ 有 $f(n) \geq g(n)$
- 考虑 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 和部分函数 ψ , 我们称 f **支配** (dominates) ψ , 当且仅当存在 m , 对任意 $n \geq m$ 有 $\psi(n) \downarrow \rightarrow f(n) \geq \psi(n)$

支配

事实

A 是 GL_1 的, 当且仅当每个 A 中部分可计算的函数 Φ_e^A 都被某个 $f \leq_T A \oplus 0'$ 支配

习题

1.5.5, 1.5.7, 1.5.8

下期预告

- 可计算支配、高效
- Post 问题