<u>Fact</u> 集合 A 是 Σ_1^0 的，当且仅当 A 是 c.e. 的

证明

(⇒) 不妨设 $A=\{x \mid \exists y\, \varphi(x,y)\}$

考虑程序 P_e：输入 x，找 y 使得 $\varphi(x,y)$ 成立

（$\varphi(x,y)$ 是否成立可计算）。若找到，停机并输出 0.

则 $A=\mathrm{dom}\,\Phi_e$

(⇐) 假设 $A=\mathrm{dom}\,\Phi_e$，则

$$x\in A \leftrightarrow \exists y\ \Xi(e,x,y)$$

$\Xi(e,x,y) \leftrightarrow \Phi_e(x)=y$ 是通用图灵机程序，是 Σ_1^0 可定义的。故 A 也是 Σ_1^0 的。

定理 对 $n\geq 1$

(1) A 是 Σ_n^0 的 当且仅当 A 是 $O^{(n-1)}$ 中 c.e. 的

(2) $O^{(n)}$ 是 Σ_n^0 完全的. 即对任 $A\in\Sigma_n^0$, 有 $A\leq_m O^{(n)}$

证明 对 $n\geq 1$ 归纳证明

由 A 有 $O^{(n-1)}$ 中 c.e. 当且仅当 $A\leq_m O^{(n)}$

(2) 从 (1) 可得.

假设对 (1), (2) 对 $<n$ 的情况已证.

先证 (1) 的 ($\Rightarrow$).

假设 $A=\{x\mid \exists y_1\forall y_2\cdots Q y_n\,\varphi(x,y_1,\cdots y_n)\}$

则 $B=\{(x,y_1)\mid \forall y_2\cdots Q y_n\,\varphi(x,y,y_2\cdots y_n)\}$ 是 Π_{n-1}^0 的

$N-B$ 是 Σ_{n-1}^0 的. 由归纳