模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情提要

- 点模型类的模态可定义性
- K 是一个广义模态点模型类，当且仅当 K 在互模拟和超积下封闭且 $\overline{\mathsf{K}}$ 在超幂下封闭
- 框架可定义性
- 模态可定义的非一阶性质
    - Löb 公式: $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$
    - McKinsey 公式: $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$

框架可定义与二阶逻辑

事实

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-公式 ϕ（其中至多出现命题变元 $p_1, \ldots, p_n$）。对任意 τ-框架 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}$ 中 w 有

$$\mathfrak{F}, w \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n \, ST_x(\phi)[w]$$

$$\mathfrak{F} \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x \, ST_x(\phi)$$

定义

我们称 $\forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x \, ST_x(\phi)$ 是 ϕ 的 二阶翻译

框架可定义与二阶逻辑

例

- $p \to \Diamond p$ 的二阶翻译：$\forall P \forall x(Px \to \exists y(Rxy \wedge P_y))$
- $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ 的二阶翻译：

  $\forall P \forall x(\exists y \exists z\, (Rxy \wedge Ryz \wedge Pz) \to \exists y\, (Rxy \wedge Py))$
- $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ 的二阶翻译

模态不可定义的框架类

- 所有模态可定义的都是二阶逻辑可定义的
- 存在模态可定义的而一阶不可定义的框架类
- 是否存在二阶可定义但模态不可定义的框架类?
- 是否存在一阶可定义但模态不可定义的框架类?

模态不可定义的框架类

定义 (有界同态)

给定模态语言类型 τ 和 τ-框架 $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$、$\mathfrak{F}' = (W', R'_\triangle)_{\triangle\in\tau}$。我们称 $f : W \to W'$ 是 $\mathfrak{F}$ 到 $\mathfrak{F}'$ 的 有界态射 (bounded morphism)，记作 $f : \mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}'$，当且仅当

- 对所有 $\triangle\in\tau$，$R_\triangle wv_1 \ldots v_n$ 蕴含 $R'_\triangle f(w)f(v_1)\ldots f(v_n)$
- 如果 $R'_\triangle f(w)v'_1 \ldots v'_n$，那么存在 $v_1, \ldots, v_n$ 使得 $R_\triangle wv_1 \ldots v_n$ 且 $f(v_i) = v'_i$ $(1 \leq i \leq n)$

模态不可定义的框架类

定理

给定模态语言类型 τ 以及 τ-公式 ϕ

- $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ 是一集 τ-框架。若对所有 $i \in I$ 有 $\mathfrak{F}_i \Vdash \phi$，则 $\biguplus_{i\in I} \mathfrak{F}_i \Vdash \phi$
- 假设 $\mathfrak{F}'$ 是 $\mathfrak{F}$ 的一个生成子框架。若 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$，则 $\mathfrak{F}' \Vdash \phi$
- 假设 $\mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}'$。若 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$，则 $\mathfrak{F}' \Vdash \phi$

模态不可定义的框架类

例

- 有穷框架类不是模态可定义的
- “存在自反点”不是模态可定义的
- “不自反”不是模态可定义的

模态不可定义的框架类

推论

给定模态语言类型 τ、τ-框架 $\mathfrak{F}$ 和 τ-公式 ϕ。若 $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} \Vdash \phi$，则 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$

例

$\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$

模态不可定义的框架类

定理 (Goldblatt-Thomason)

给定模态语言类型 τ。K 是一阶可定义的 τ-框架类。K 是模态可定义的，当且仅当它在有界态射象、生成子框架、不交并和超滤扩张的逆下封闭

Sahlqvist 定理

问题：哪些模态逻辑公式在框架可定义意义上对应于一个一阶逻辑公式，这种对应能否能行地得到？

Sahlqvist 定理

定义

给定模态语言类型 τ 和 τ-公式 ϕ。$\alpha(x)$ 是相应一阶或二阶逻辑公式。我们称 ϕ 和 $\alpha(x)$ 是彼此的 局部框架对应 （local frame correspondents），当且仅当对任何 τ-框架 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}$ 中 w 有

$$\mathfrak{F}, w \Vdash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{F} \vDash \alpha[w]$$

此时，我们又称 $\forall x \alpha(x)$ 和 ϕ 是彼此的 全局框架对应

Sahlqvist 定理

定义

- 命题符号 p 在公式 ϕ 中的一个出现是 正出现 / 负出现，当且仅当它处于偶数 / 奇数个否定符号的辖域中 (我们假设初始命题连接词只有 $\neg, \vee, \wedge$)
- 一个公式 ϕ 是 正的 / 负的，当且仅当其中每个命题符号的出现都是正出现/负出现

Sahlqvist 定理

定义

- 命题符号 p 在公式 ϕ 中的出现是 统一的 （uniform），当且仅当 p 在在 ϕ 中所有的出现都是正出现或所有的出现都是负出现
- 一个公式 ϕ 是 统一的 ，当且仅当其中所有命题符号的出现都是统一的

Sahlqvist 定理

定义 (Sahlqvist 公式)

给定模态语言类型 τ

- 我们称一个 τ-公式是一个 Sahlqvist 前件，当且仅当它是由 $\top$、$\bot$、盒形原子式（$\Box p_i$）以及否定式 $\neg\phi$ 通过 $\wedge, \vee$ 和菱形模态词生成的
- 一个 Sahlqvist 蕴含式 形如 $\phi \to \psi$，其中 ϕ 是一个 Sahlqvist 前件，ψ 是一个正公式

Sahlqvist 定理

定义 (Sahlqvist 公式)

给定模态语言类型 τ

- 一个 Sahlqvist 公式是由 Sahlqvist 蕴含式通过任意运用盒形模态词、$\wedge$ 以及在不分享相同命题符号的公式间运用 $\vee$ 得到的

Sahlqvist 定理

定理 (Sahlqvist 对应定理)

给定模态语言类型 τ，令 χ 是一个 τ-Sahlqvist 公式，那么 χ 局部框架对应于一阶逻辑公式 $c_\chi(x)$，并且 c_χ 可以由 χ 能行地得到

Sahlqvist 定理

定义

- 一个非常简单的 Sahlqvist 前件仅从 $\top, \bot$、命题符号通过 $\wedge$ 和 $\Diamond$ 生成
- 一个非常简单的 Sahlqvist 公式是形如 $\phi \to \psi$ 的蕴含式，其中 ϕ 是非常简单的 Sahlqvist 前件，ψ 是正的

事实

Sahlqvist 对应定理对非常简单的 Sahlqvist 公式成立

Sahlqvist 定理

例

- $(p \wedge \Diamond\Diamond p) \to \Diamond p$
- $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$
- $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$

Sahlqvist 定理

定理

任意基本模态逻辑公式是否框架对应于一个一阶逻辑公式是不可判定的

例

$(\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p) \wedge (\Diamond\Diamond q \to \Diamond q)$ 不等价于一个 Sahlqvist 公式，但有一阶逻辑对应：对所有传递框架 $\mathfrak{F}$ 有

$$\mathfrak{F} \Vdash \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{F} \vDash \forall x \exists y\ (Rxy \wedge \forall z(Ryz \to z = y))$$

下期预告

考试：2021-06-07, 18:30-20:10, HGX401